

幾何学I小テスト 第2回

担当: 中島 啓 TA: 佐々木建祀郎, 佐藤敬志, 中西克典

2012年5月16日(水) 午後1:00~2:30

線形代数に自信があるものは、問題2を、そうでないものは、問題1を解け。ただし、解かなかった問題は、演習問題として自習すること。

問題1. V を \mathbf{R} 上の有限次元ベクトル空間とする。 V の双対空間 V^* を V から \mathbf{R} への線型写像の全体のなす空間 $\text{Hom}(V, \mathbf{R})$ と定める。

(1) V^* は線型空間であることを示せ。ただし、 $a, b \in \mathbf{R}$, $f, g \in V^*$ に対して $af + bg \in V^*$ を $(af + bg)(v) = af(v) + bg(v)$ で定義する。

(2) e_1, \dots, e_n を V の基底とすると、 $\theta_i \in V^*$ を $\theta_i(\sum_j x_j e_j) = x_i$ によって定義する。 $\theta_1, \dots, \theta_n$ は V^* の基底であることを示せ。(e_1, \dots, e_n の双対基底という。)

(3) V, W を共に \mathbf{R} 上の有限次元ベクトル空間とし、 $\Phi: V \rightarrow W$ を線型写像とする。このとき $\Phi^*: W^* \rightarrow V^*$ を

$$\Phi^*(f)(v) = f(\Phi(v)), \quad f \in W^* = \text{Hom}(W, \mathbf{R}), \quad v \in V$$

によって定義する。 Φ^* が線型写像であることを証明せよ。

(4) $\Psi: V \rightarrow (V^*)^*$ を $v \mapsto \{V^* \ni f \mapsto f(v) \in \mathbf{R}\}$ によって定める。 Ψ が線型空間の同型写像であることを証明せよ。

(5) e'_1, \dots, e'_n を V の別の基底とする。 $e'_i = \sum_j a_{ij} e_j$ によって、基底の変換行列 $A = (a_{ij})$ を定める。 e'_1, \dots, e'_n の双対基底を $\theta'_1, \dots, \theta'_n$ とするとき、 $\theta_1, \dots, \theta_n$ と $\theta'_1, \dots, \theta'_n$ の間の基底の変換行列を A を用いて表せ。

問題2. V を \mathbf{R} 上の有限次元ベクトル空間とする。 $\overbrace{V \times \cdots \times V}^{k \text{ 個}}$ から \mathbf{R} への写像 α で、次の二つの性質を持つものの全体を $\wedge^k V^*$ で表す。

多重線型性 各成分について線型写像である。すなわち

$$\alpha(v_1, \dots, av_i + bv'_i, \dots, v_k) = a\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + b\alpha(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k)$$

が成り立つ。

交代性 σ を $\{1, \dots, k\}$ の置換とするとき、

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma) \alpha(v_1, \dots, v_k)$$

が成り立つ。ここで $\varepsilon(\sigma)$ は σ の符号である。

$k = 1$ の場合は、 $\wedge^1 V^*$ は上の問の V^* に他ならない。また、 $k = 0$ のときは、 $\wedge^0 V^* = \mathbb{R}$ と理解する。

(1) $\wedge^k V^*$ は線形空間であることを示せ。

(2) $\alpha \in \wedge^k V^*, \beta \in \wedge^l V^*$ とするとき α と β の外積 $\alpha \wedge \beta \in \wedge^{k+l} V^*$ を

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

によって定義する。ただし、 σ は $\{1, \dots, k+l\}$ の置換をすべて動かして和を取るものとする。 $\alpha \wedge \beta$ が確かに $\wedge^{k+l} V^*$ に入っていることを証明せよ。

(3) 上の \wedge について以下の性質を証明せよ。

$$(a\alpha + b\alpha') \wedge \beta = a\alpha \wedge \beta + b\alpha' \wedge \beta \quad (0.1)$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha \quad (0.2)$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \quad (0.3)$$

三番目の式から三つの元の外積を $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ と書いて問題がない。

(4) $\theta_1, \dots, \theta_k \in V^* = \wedge^1 V^*$ とするとき、上の定義に基づいて

$$(\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k)(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \theta_1(v_1) & \dots & \theta_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_k(v_1) & \dots & \theta_k(v_k) \end{pmatrix}$$

を証明せよ。

(5) e_1, \dots, e_n を V の基底とし、 $\theta_1, \dots, \theta_n$ をその V^* の双対基底とする。このとき $\{1, \dots, n\}$ の、 k 個の元からなる部分集合 $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_k$) に対して

$$\theta_I = \theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_n}$$

と定義する。このとき $\{\theta_I \mid I \subset \{1, \dots, n\}, \#I = k\}$ は、 $\wedge^k V^*$ の基底になることを証明せよ。

(6) e'_1, \dots, e'_n を V の別の基底とする。 $e'_i = \sum_j a_{ij} e_j$ によって、基底の変換行列 $A = (a_{ij})$ を定める。 e'_1, \dots, e'_n の双対基底を $\theta'_1, \dots, \theta'_n$ とする。 θ'_I を上と同様に定める。 $\{\theta_I \mid I \subset \{1, \dots, n\}, \#I = k\}$ と $\{\theta'_I \mid I \subset \{1, \dots, n\}, \#I = k\}$ の間の基底の変換行列が、 A の転置行列の小行列式で与えられることを証明せよ。