記号を簡潔にするために、二つの行列 B_1, B_2 を一つにまとめて B で表す。$\mathbb{C}^2 \otimes \mathrm{End}(V)$ の元であるとみなす。あとで、一般の箙多様体を考えるときも、同じようにまとめて取り扱う方が自然になる。

箙多様体の積 $\mathfrak{M}(n,r) \times \mathfrak{M}(n-1,r)$ の中の部分集合 $\mathfrak{P}(n,r)$を、

$$\{([B^1,a^1,b^1],[B^2,a^2,b^2]) \mid \exists\xi\colon V^1 \twoheadrightarrow V^2, B^2\xi = \xi B^1, a^2 = \xi a^1, b^2\xi = b^1\}$$

と定める。これを**ヘッケ対応 (Hecke correspondence)**とよぶ。

注 11.2. (1) ξ は、全射と仮定しなくても、安定性から自動的に全射となる。実際、$\mathrm{Im}\,\xi$ は $\mathrm{Im}\,a^2$ を含み、B^2 で不変なので、V^2 全体に一致しないといけない。

(2) (B^1,a^1,b^1), (B^2,a^2,b^2)と代表元を固定すると、ξは存在するとすれば、ただ一つである。実際、ξ^a, ξ^bがともに上の式を満たせば、$\mathrm{Ker}(\xi^a-\xi^b)$に安定性を適用して、$\xi^a=\xi^b$を得る。

インシデンス多様体の類似であることは、次の $r=1$ の場合から見て取れる。

命題 11.3. $r=1$ とし、$\mathfrak{M}(n,1)=X^{[n]}$, $\mathfrak{M}(n-1,1)=X^{[n-1]}$ と点のヒルベルト概型、すなわち $\mathbb{C}[x,y]$ のイデアルの空間とみなす。このとき $\mathfrak{P}(n,1)$ は、上の(11.1)に他ならない。

証明. $X^{[n]}$ と $\mathfrak{M}(n,1)$ の対応のさせ方を思い出す、$I_1 \subset I_2$ のとき$\xi\colon V^1 = \mathbb{C}[x,y]/I^1 \twoheadrightarrow \mathbb{C}[x,y]/I^2 = V^2$ が誘導され、上の式 $B^2\xi=\xi B^1$, $a^2=\xi a^1$ が成り立つ。

逆に、$I^1=\{f(x,y) \mid f(B_1^1,B_2^1)a^1=0\}$, $I^2=\{f(x,y) \mid f(B_1^2,B_2^2)a^2=0\}$ で、上の式が成り立っていると、後者の条件式は $\xi f(B_1^1,B_2^1)a^1=0$ と同値だから $I^1 \subset I^2$ が成り立つ。 □

あとで、対応として $\mathfrak{M}(n,r)$, $\mathfrak{M}(n-1,r)$ の同変コホモロジーの間に写像を定義するためには、$\mathfrak{P}(n,r)$ から$\mathfrak{M}(n,r)$, $\mathfrak{M}(n-1,r)$への射影が固有写像であることが必要である。第一成分への射影 $p_1\colon \mathfrak{P}(n,r) \to \mathfrak{M}(n,r)$ については、これは問題ないことが知られているが、$\mathfrak{M}(n-1,r)$ については、たとえば $r=1$, $n=1$ のときに $\mathfrak{P}(1,1)=\mathbb{C}^2$ であることから、正しくない。これを修正するために、$\Pi\colon \mathfrak{P}(n,r) \to \mathbb{C}^2$ を

$$\Pi([B^1,a^1,b^1],[B^2,a^2,b^2]) = \mathrm{tr}\,B^1 - \mathrm{tr}\,B^2$$

で定義する。ここで、$\mathrm{tr}\,B_\alpha^1 - \mathrm{tr}\,B_\alpha^2$ は B_α^1 を $\mathrm{Ker}\,\xi$ に制限して、スカラーと思ったものに他ならない。したがって、 $r=1$ のとき、(11.1)の記述で見ると、Π は $\mathrm{Supp}(I^2/I^1)$ を与える写像である。

事実 11.4. 射影 p_1, $p_2 \times \Pi$

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{P}(n,r) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2\times\Pi"] & \\ \mathfrak{M}(n,r) & & \mathfrak{M}(n-1,r)\times\mathbb{C}^2 \end{tikzcd}$$

は、それぞれ固有である。

これは$r=1$のときは、事実 10.33 の前半の主張からの帰結である。実際、$\mathfrak{P}(n,r) \to X^{[n]} \times X^{[n-1]} \times \mathbb{C}^2$ は固有写像で、像は $\{(C+x,C,x) \in \mathrm{Sym}^n X \times \mathrm{Sym}^{n-1} X \times \mathbb{C}^2\}$であり、この像から $\mathrm{Sym}^n X$, $\mathrm{Sym}^{n-1} X \times \mathbb{C}^2$ への射影が固有であるから、主張が従う。

$\mathfrak{P}(n,r)$を調べるために、次の複体 $\mathscr{C}^\bullet$ を考える。これは、接空間を計算する複体(10.23)を少し変更したものである。*** で、その意味を説明する。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(V^1,V^2) & \xrightarrow{\sigma} & t_1\,\mathrm{Hom}(V^1,V^2) & \xrightarrow{\tau} & t_1t_2\,\mathrm{Hom}(V^1,V^2) \\ & & \oplus & & \oplus \\ & & t_2\,\mathrm{Hom}(V^1,V^2) & & t_1t_2\mathbb{C} \\ & & \oplus & & \\ & & \mathrm{Hom}(W,V^2) & & \\ & & \oplus & & \\ & & t_1t_2\,\mathrm{Hom}(V^1,W) & & \end{array}$$

$$\sigma(\xi) = \begin{bmatrix} \xi B_1^1 - B_1^2\xi \\ \xi B_2^1 - B_2^2\xi \\ \xi a^1 \\ -b^2\xi \end{bmatrix}, \tag{11.5}$$

$$\tau\begin{bmatrix}\mathscr{B}_1 \\ \mathscr{B}_2 \\ \alpha \\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^2\mathscr{B}_2 - B_2^2\mathscr{B}_1 + \mathscr{B}_1B_2^1 - \mathscr{B}_2B_1^1 + \alpha b^1 + a^2\beta \\ \mathrm{tr}(\beta a^1) + \mathrm{tr}(b^2\alpha)\end{bmatrix}.$$

ただし、t_1, t_2 は、(10.25)と同様に $\mathbb{T}$-同変なベクトル束の複体とするために指標として導入したものである。ヘッケ対応が同変コホモロジーに定める作用素を計算するときには重要であるが、この節の間はヘッケ対応の幾何学的な性質を調べるのにこの複体を用いるだけなので、しばらくは t_1, t_2 は無視しても構わない。

補題 11.6. (1) これは、複体である。すなわち、$\tau\sigma=0$が成り立つ。
(2) (B^1,a^1,b^1), (B^2,a^2,b^2) を固定したとき、σは線形写像として単射である。
(3) (B^1,a^1,b^1), (B^2,a^2,b^2) を固定したとき、τは線形写像として全射である。

証明. (1) 箙多様体の定義方程式 $\mu(B^1,a^1,b^1)=0=\mu(B^2,a^2,b^2)$ の帰結である。

(2) 補題 10.7 の証明と同じである。実際 $\xi\in\bigoplus\mathrm{Hom}(V^1,V^2)$ が $\mathrm{Ker}\,\sigma$ に属すると仮定すると、$\xi B^1 = B^2\xi$, $\xi a^1 = 0$, $b^2\xi = 0$ が成り立つ。このとき$\mathrm{Ker}\,\xi$ は (B^1,a^1,b^1) の安定性から V^1 全体になる。すなわち、$\xi=0$ である。

(3) $\xi\oplus\lambda$ が $\mathrm{Im}\,\tau$ と直交しているものとする。するとち、$B^1\xi=\xi B^2$, $\lambda a^1=\xi a^2$, $b^1\xi=\lambda b^2$ が成り立つ。もしも、$\lambda\neq 0$ とすると、$a^1=\lambda^{-1}\xi a^2$ として、$\mathrm{Im}\,\xi$ に (B^1,a^1,b^1) に関する安定性の条件が適用できる状況になる。したがって、$\mathrm{Im}\,\xi = V^1$ となる。しかし、$\dim V^2 < \dim V^1$ より、これは不可能である。よって、$\lambda=0$ である。すると、$\mathrm{Ker}\,\xi$ は (B^2,a^2,b^2) の安定性から V^2 全体となり、すなわち、$\xi=0$ である。 □

注 10.27 により (11.5) を $\mathfrak{M}(n,r)\times\mathfrak{M}(n-1,r)$ 上のベクトル束の複体と考え、また上の補題により、$\mathrm{Ker}\,\tau/\mathrm{Im}\,\sigma$ もベクトル束と考える。その階数は

$$(2n-1)r-1 = \frac{1}{2}\left(\dim\mathfrak{M}(n,\mathbf{w})+\dim\mathfrak{M}(n-1,r)\right)-1 \tag{11.7}$$

となる。

また、このベクトル束を $\mathfrak{M}(n,r)\times\mathfrak{M}(n-1,r)\times\mathbb{C}^2$ に引き戻し、さらに $t_1\mathbb{C}\oplus t_2\mathbb{C}$ を直和する。

そして、$\operatorname{Ker}\tau/\operatorname{Im}\sigma\oplus t_1\mathbb{C}\oplus t_2\mathbb{C}$の切断 s を

$$s=\begin{bmatrix}(0\oplus a^2\oplus -b^1)\pmod{\operatorname{Im}\sigma}\\ \operatorname{tr}B_1^1-\operatorname{tr}B_1^2-z_1\\ \operatorname{tr}B_2^1-\operatorname{tr}B_2^2-z_2\end{bmatrix}$$

で定める。定義から、s の最初の成分が消えるのは、$\xi\in\operatorname{Hom}(V^1,V^2)$ が存在して$\sigma(\xi)=(0\oplus a^2\oplus -b^1)$ となるときだから、注 11.2 により $\mathfrak{P}(n,r)$ の点であることに他ならない。さらに、このとき $\operatorname{tr}B_\alpha^1-\operatorname{tr}B_\alpha^2$ は、前に定義した Π である。したがって、第二、第三成分が消えるのは、$\Pi=(z_1,z_2)$ となるときである。すなわち $\operatorname{Zero}(s)=\mathfrak{P}(n,r)$ であり、このとき $\mathbb{C}^2$ 成分は Πで与えられる。

$\operatorname{Ker}\tau/\operatorname{Im}\sigma\oplus t_1\mathbb{C}\oplus t_2\mathbb{C}$ に接続 ∇ を導入し、s の微分 ∇s を考える。 $\operatorname{Zero}(s)$ に制限すれば、∇s は接続の取り方には依存しない。

補題 11.8. sの微分 ∇s は、$\operatorname{Zero}(s)$ 上で全射である。

したがって、$\mathfrak{P}(n,r)$は、$\mathfrak{M}(n,r)\times\mathfrak{M}(n-1,r)\times\mathbb{C}^2$に埋め込まれた閉部分多様体であり、その法束は $\operatorname{Ker}\tau/\operatorname{Im}\sigma\oplus t_1\mathbb{C}\oplus t_2\mathbb{C}$に他ならない。

証明. 証明内では同変構造は関係ないので、以下指標の t_1, t_2 は省略する。

$([\mathring{B}^1,\mathring{a}^1,\mathring{b}^1],[\mathring{B}^2,\mathring{a}^2,\mathring{b}^2])$ を $\mathfrak{P}(n,r)$ から取り、それぞれの代表元 $(\mathring{B}^1,\mathring{a}^1,\mathring{b}^1)$, $(\mathring{B}^2,\mathring{a}^2,\mathring{b}^2)$ を固定する。$\mathfrak{P}(n,r)$ に属しているので、$\mathring{\xi}\colon V^1\to V^2$ であって

$$\mathring{B}^2\mathring{\xi}=\mathring{\xi}\mathring{B}^1,\quad \mathring{a}^2=\mathring{\xi}\mathring{a}^1,\quad \mathring{b}^2\mathring{\xi}=\mathring{b}^1 \tag{11.9}$$

を満たすものが存在する。$\mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}}\times\mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}}$ 上の $\mathbb{C}^2\otimes\operatorname{Hom}(V^1,V^2)\oplus\operatorname{Hom}(W,V^2)\oplus\operatorname{Hom}(V^1,W)\oplus\mathbb{C}^2$ の切断 $\tilde{s}$ を

$$\tilde{s}(B^1,a^1,b^1,B^2,a^2,b^2,z_1,z_2)=\begin{bmatrix}(B^2\mathring{\xi}-\mathring{\xi}B^1)\oplus(a^2-\mathring{\xi}a^1)\oplus(-b^1+b^2\mathring{\xi})\\ \operatorname{tr}B_1^1-\operatorname{tr}B_1^2-z_1\\ \operatorname{tr}B_2^1-\operatorname{tr}B_2^2-z_2\end{bmatrix}$$

により定義する。一行目の成分は、$\operatorname{Ker}\tau$ に属し、$\operatorname{Im}\sigma$ で落とすと、もともとの切断 s の前半部分を $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}}\times\mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}}$ に引き戻したものに一致する。

$\tilde{s}$ を $(\dot{B}^1,\dot{a}^1,\dot{b}^1)$, $(\dot{B}^2,\dot{a}^2,\dot{b}^2)$, $\dot{z}_1$, $\dot{z}_2$ 方向に微分すると、

$$\begin{bmatrix}(\dot{B}^2\mathring{\xi}-\mathring{\xi}\dot{B}^1)\oplus(\dot{a}^2-\mathring{\xi}\dot{a}^1)\oplus(-\dot{b}^1+\dot{b}^2\mathring{\xi})\\ \operatorname{tr}(\dot{B}_1^1)-\operatorname{tr}(\dot{B}_1^2)-\dot{z}_1\\ \operatorname{tr}(\dot{B}_2^1)-\operatorname{tr}(\dot{B}_2^2)-\dot{z}_2\end{bmatrix}$$

である。$\tilde{s}$ を用いて、微分 ∇s の転置写像

$${}^t\nabla s\colon \operatorname{Ker}{}^t\sigma/\operatorname{Im}{}^t\tau\oplus\mathbb{C}^2\to T_{[\mathring{B}^1,\mathring{a}^1,\mathring{b}^1]}\mathfrak{M}(n,r)\times T_{[\mathring{B}^2,\mathring{a}^2,\mathring{b}^2]}\mathfrak{M}(n-1,r)\oplus\mathbb{C}^2$$

を計算し、それが単射であることを証明すればよい。ただし、右辺の接空間は、§10(vii)のように (10.23)の複体の中間のコホモロジーと同一視し、さらに(10.17)のシンプレクティック形式により、双対空間をそれ自身と同一視している。

$(\mathscr{B}_1^*,\mathscr{B}_2^*,\alpha^*,\beta^*,z_1^*,z_2^*)$ を $\operatorname{Ker}{}^t\sigma\oplus\mathbb{C}^2\subset\mathbb{C}^2\otimes\operatorname{Hom}(V^2,V^1)\oplus\operatorname{Hom}(V^2,W)\oplus\operatorname{Hom}(W,V^1)\oplus\mathbb{C}^2$ から取り、${}^t\nabla s$ で送ると消えていると仮定する。$z_1^*=z_2^*=0$

が成り立ち、さらに $\xi^1 \in \mathrm{End}(V^1)$, $\xi^2 \in \mathrm{End}(V^2)$ が存在して、

$$\begin{cases} \mathscr{B}_2^* \mathring{\xi} = \xi^1 \mathring{B}_1^1 - \mathring{B}_1^1 \xi^1, \\ -\mathscr{B}_1^* \mathring{\xi} = \xi^1 \mathring{B}_2^1 - \mathring{B}_2^1 \xi^1, \\ \beta^* = \xi^1 \mathring{a}^1, \\ -\alpha^* \mathring{\xi} = -\mathring{b}^1 \xi^1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathring{\xi} \mathscr{B}_2^* = \xi^2 \mathring{B}_1^2 - \mathring{B}_1^2 \xi^2, \\ -\mathring{\xi} \mathscr{B}_1^* = \xi^2 \mathring{B}_2^2 - \mathring{B}_2^2 \xi^2, \\ \mathring{\xi} \beta^* = \xi^2 \mathring{a}^2, \\ -\alpha^* = -\mathring{b}^2 \xi^2, \end{cases}$$

が成り立つ。

この式と(11.9)から、$\mathrm{Ker}(\mathring{\xi}\xi^1 - \xi^2\mathring{\xi})$ は $\mathrm{Im}\,\mathring{a}^1$ を含み、$(\mathring{\xi}\xi^1 - \xi^2\mathring{\xi})\mathring{B}^1 == \mathring{B}^2(\mathring{\xi}\xi^1 - \xi^2\mathring{\xi})$ により、$\mathring{B}^1$ で不変である。したがって、安定性により $\mathring{\xi}\xi^1 = \xi^2\mathring{\xi}$ が成り立つ。特に、ξ^1 は一次元の部分空間 $\mathrm{Ker}\,\mathring{\xi} \subset V^1$ を保つ。そこで、式 $\xi^1|_{\mathrm{Ker}\,\mathring{\xi}} = \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{Ker}\,\mathring{\xi}}$ によりスカラー λ を定める。すると、$\zeta\mathring{\xi} = \xi^1 - \lambda\,\mathrm{id}_{V^1}$ となる、V^2 から V^1 への線形写像 ζ が誘導される。このとき、上の式から

$$\begin{cases} \mathscr{B}_2^* = \zeta \mathring{B}_1^2 - \mathring{B}_1^1 \zeta, \\ -\mathscr{B}_1^* = \zeta \mathring{B}_2^2 - \mathring{B}_2^1 \zeta, \\ \beta^* = \zeta \mathring{a}^2 + \lambda \mathring{a}^1, \\ \alpha^* = \mathring{b}^1 \zeta + \lambda \mathring{b}^2 \end{cases}$$

が従う。例えば、最後の式は $\alpha\mathring{\xi} = \mathring{b}^1\xi^1 = \mathring{b}^1(\zeta\mathring{\xi} + \lambda) = \mathring{b}^1\zeta\mathring{\xi} + \lambda\mathring{b}^2\mathring{\xi}$ で、$\mathring{\xi}$ は全射なので従う。これは、$\mathscr{B}_1^*$, $\mathscr{B}_2^*$, α^*, β^* が${}^t\tau(\zeta \oplus \lambda)$ に一致していることを意味する。したがって、${}^t\nabla\tilde{s}$ は単射である。 □

注 11.10. §§5(iii), 5(v)で $\mathfrak{sl}(2)$ およびそのヤンギアンを構成する際に用いた対応 $\tilde{P}(k,n)$ はラグランジアン部分多様体であった。同様に、ヘッケ対応 $\mathfrak{P}(n,r)$は、階数が $\dim \mathfrak{M}(n,r) \times \mathfrak{M}(n-1,r) \times \mathbb{C}^2$ の半分のベクトル束の、横断的な切断の零点で、丁度半分次元である。さらに、ラグランジアン部分多様体であることも確かめることができる。******

11(ii). 生成元の定義と主張. ヘッケ対応 $\mathfrak{P}(n,r)$ の定義により、$\mathrm{Ker}\,\xi$ は V^1 の1次元部分空間である。これは、$\mathfrak{P}(n,r)$ 上の直線束を定める。(11.1)で言えば、ファイバーを I_2/I_1 とするような直線束である。

そこで、(5.11)と(5.12)と同様に、$\bigoplus H^*_{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}(n,r))$ に働く作用素を

$$F_k = \sum_n p_{1*}(c_1(\mathrm{Ker}\,\xi)^k \cup p_2^*(\cdot)) \tag{11.11}$$
$$E_k = (-1)^{r-1} \sum_n p_{2*}(c_1(\mathrm{Ker}\,\xi)^k \cup p_1^*(\cdot) \cup \Pi^*([0]))$$

と定める。ここで、E_k について $\Pi^*([0])$ は $p_2\colon \mathfrak{P}(n,r) \to \mathfrak{M}(n-1,r)$ が固有でないので、事実 11.4 をもとに、代わりに $\Pi^{-1}(0) \subset \mathfrak{P}(n,r)$ を使うことを意味する。

ただし、まだボレル・ムーア・ホモロジーの説明をしていないので、若干の問題がある。とりあえず、向き付けられた多様体の間の固有写像についてコホモロジーの押し出し写像が定義されて、局所化定理も同様に成り立つことを仮定して先に進む。****

次に、H_k を定義するために、§5(v) のときと同様に、(5.13) の同変ベクトル束に対するコホモロジー類 $c^z(\ )$ を用いて、(5.14)の類似の

$$\frac{c^z(t_1^{-1}t_2^{-1}\mathcal{E})}{c^z(\mathcal{E})} = \frac{c^z(t_1^{-1}t_2^{-1}W^*)c^z(t_1^{-1}V^*)c^z(t_2^{-1}V^*)c^z(t_1t_2V^*)}{c^z(W^*)c^z(t_1V^*)c^z(t_2V^*)c^z(t_1^{-1}t_2^{-1}V^*)} \tag{11.12}$$
$$\mathcal{E} \overset{\text{def.}}{=} W^* \oplus t_1V^* \oplus t_2V^* \ominus V^* \ominus t_1t_2V^*$$

を考える。カップ積でコホモロジーに作用する作用素とみなす。さらに (5.14)と同様に、上の式を $z=\infty$で展開して

$$\left(\frac{c^z(t_1^{-1}t_2^{-1}\mathcal{E})}{c^z(\mathcal{E})}\right)^+ \overset{\text{def.}}{=} H(z) \equiv 1 - (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sum_{k=0}^{\infty} H_k z^{-k-1} \tag{11.13}$$

により定義する。また、今の場合は展開した係数は $\varepsilon_1+\varepsilon_2$で割れることに注意する。(5.15) と同様に低次の項を展開すると

$$\left(\frac{c^z(t_1^{-1}t_2^{-1}\mathcal{E})}{c^z(\mathcal{E})}\right)^+ = 1 - \frac{r(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{z} + \left(\binom{r}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + c_1(\mathcal{E})\right)\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{z^2}$$
$$-\left(\binom{r}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 + (r-1)c_1(\mathcal{E})(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + c_1(\mathcal{E})^2 - 2c_2(\mathcal{E})\right)\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{z^3} + \cdots$$

となる。さらに、$\mathcal{E}$ を W^*, V^* で書き換えると、

$$c_1(\mathcal{E}) = c_1(W^*), \quad c_2(\mathcal{E}) = c_2(W^*) + \varepsilon_1\varepsilon_2 \operatorname{rank} V^*$$

となることも注意しておこう。ここまでは、写像 $\mathfrak{M}(n,r)\to \mathrm{pt}$ で引き戻したコホモロジー類であるが、H_3 には $c_1(V^*)$ が現れる。

定理 11.14 (Schiffmann-Vasserot [**SV13**], cf. Feigin-Tsymbaliuk [**FT11**], Tsymbaliuk [**Tsy17**])**.** 上で定義した

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{\mathbb{T}}^*(\mathfrak{M}(n,r))$$

に働く作用素 $E_k,\ F_k,\ H_k\ (k=0,1,2,\dots)$ は、$\widehat{\mathfrak{gl}}(1)$ に付随したヤンギアン $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}(1))$ の定義関係式

$$[H_k,H_l]=0, \tag{11.15a}$$

$$\begin{aligned}&[H_{k+3},E_l]-3[H_{k+2},E_{l+1}]+3[H_{k+1},E_{l+2}]-[H_k,E_{l+3}]\\&\quad-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2)([H_{k+1},E_l]-[H_k,E_{l+1}])\\&\qquad=-\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(H_kE_l+E_lH_k),\\&[H_0,E_l]=0=[H_1,E_l],\quad [H_2,E_l]=2\varepsilon_1\varepsilon_2E_l,\end{aligned} \tag{11.15b}$$

$$\begin{aligned}&[H_{k+3},F_l]-3[H_{k+2},F_{l+1}]+3[H_{k+1},F_{l+2}]-[H_k,F_{l+3}]\\&\quad-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2)([H_{k+1},F_l]-[H_k,F_{l+1}])\\&\qquad=\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(H_kF_l+F_lH_k),\\&[H_0,F_l]=0=[H_1,F_l],\quad [H_2,F_l]=-2\varepsilon_1\varepsilon_2F_l,\end{aligned} \tag{11.15c}$$

$$[E_3,E_0]-3[E_2,E_1]-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2)[E_1,E_0]=-\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E_0^2, \tag{11.15d}$$

$$[F_3,F_0]-3[F_2,F_1]-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2)[F_1,F_0]=\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)F_0^2, \tag{11.15e}$$

$$[E_0,[E_0,E_1]]=0=[F_0,[F_0,F_1]], \tag{11.15f}$$

$$[E_k,F_l]=H_{k+l} \tag{11.15g}$$

を満たす。

この節の終わりまでで、この結果の証明を与える。[**SV13**] においては、$Y(\widehat{\mathfrak{gl}}(1))$ の上の定義関係式が与えられておらず、それは、あとで書かれた [**AS13**] で与えられた。したがって、二つの論文を組み合わせて、この結果が従うことになる。ここでの証明は、前節の準備に基づけば §5(v) の $\mathfrak{sl}(2)$ のヤンギアンの場合の証明と基本的には同じである。概ね [**Tsy17**] に従っているが、ヤング図形の組み合わせ論の部分については [**BFM$^+$16**] の定式化を用いた。なお、[**Tsy17**] の計算は、$r=1$ のヒルベルト概型の場合で、同変K理論で計算を行った [**FT11**] に基づいている。

関係式 (11.15a) は定義から明らかである。

次に、(11.15b) を検証する。変数 $\varepsilon_3 \overset{\text{def.}}{=} -(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ を形式的に導入し、(11.15b) に現れている係数を $-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1$, $-\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ と書き直すと対称性が上がることに注意する。(11.13) の母関数 $H(z)$ の他に、

$$E(y) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} E_k y^{-k-1}$$

を導入すると、(11.15b) は

$$\text{(11.15b')}\qquad \begin{aligned}&[(z-y-\varepsilon_1)(z-y-\varepsilon_2)(z-y-\varepsilon_3)H(z)E(y)]_{<0}\\ &\quad = [(z-y+\varepsilon_1)(z-y+\varepsilon_2)(z-y+\varepsilon_3)E(y)H(z)]_{<0}\end{aligned}$$

と同値であることに注意しよう。ここで $[\ ]_{<0}$ は y について展開して、負べきのところを取ることを意味する。実際、

$$\begin{aligned}&(z-y\pm\varepsilon_1)(z-y\pm\varepsilon_2)(z-y\pm\varepsilon_3)\\ &\qquad = z^3-3z^2y+3zy^2-y^3+(\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1)(z-y)\pm\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\end{aligned}$$

を使って展開して、z についてのべきが非負なところを比べると、(11.15b) の $[H_k, E_r]$ $(k=0,1,2)$ に関する式を得て、べきが負なところを比べると最初の式を得る。

(11.15b') を確かめるために、$\mathfrak{P}(n,r)$ 上に、$\mathfrak{M}(n,r)$ と $\mathfrak{M}(n-1,r)$ のトートロジカル束を引き戻したものを、それぞれ V^1, V^2 で表そう。対応する $\mathcal{E}$ も、それぞれ $\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2$ であらわす。このとき、ヘッケ対応の定義から $V^1/\operatorname{Ker}\xi = V^2$ である。したがって

$$\begin{aligned}&\frac{c^z(t_1^{-1}t_2^{-1}\mathcal{E}^1)}{c^z(\mathcal{E}^1)}\Big/\frac{c^z(t_1^{-1}t_2^{-1}\mathcal{E}^2)}{c^z(\mathcal{E}^2)}\\ &\qquad = \frac{(z-\varepsilon_1-c_1(\operatorname{Ker}\xi))(z-\varepsilon_2-c_1(\operatorname{Ker}\xi))(z-\varepsilon_3-c_1(\operatorname{Ker}\xi))}{(z+\varepsilon_1-c_1(\operatorname{Ker}\xi))(z+\varepsilon_2-c_1(\operatorname{Ker}\xi))(z+\varepsilon_3-c_1(\operatorname{Ker}\xi))}\end{aligned}$$

が成り立つ。$H(z)E_k$, $E_kH(z)$ がそれぞれ

$$\frac{c^z(t_1^{-1}t_2^{-1}\mathcal{E}^2)}{c^z(\mathcal{E}^2)}c_1(\operatorname{Ker}\xi)^k\cap[\mathfrak{P}(n,r)],\qquad \frac{c^z(t_1^{-1}t_2^{-1}\mathcal{E}^1)}{c^z(\mathcal{E}^1)}c_1(\operatorname{Ker}\xi)^k\cap[\mathfrak{P}(n,r)]$$

で表されることに注意して、(11.15b') を得ることができる。(11.15c) についても同様である。

11(iii). ヘッケ対応の固定点公式による表示 命題 10.20 による固定点 $\vec{Y} \in \mathfrak{M}(n,r)$ の与える同変コホモロジーの局所化における基底は、H_r の同時固有ベクトルであり、固有値は $\mathcal{E}$ の $\vec{Y}$ におけるファイバーのウェイトから計算することができる。

次に、E_r, F_r を固定点で計算するために、組み合わせ論的な準備を行う。

定義 11.16. (1) ヤング図形 Y の**足せる箱 (addable box)**[1]とは、箱のない空き $s = (i,j)$ であって、そこに箱を足したものが、ヤング図形になるものをいう。足してできるヤング図形を $Y \sqcup \{s\}$ で表す。

(2) **除ける箱 (removable box)**とは、Y の箱 $s = (i,j)$ であって、それを除いたものが、ヤング図形になるものをいう。除いてできるヤング図形を $Y \setminus \{s\}$ で表す。(図 6 参照)

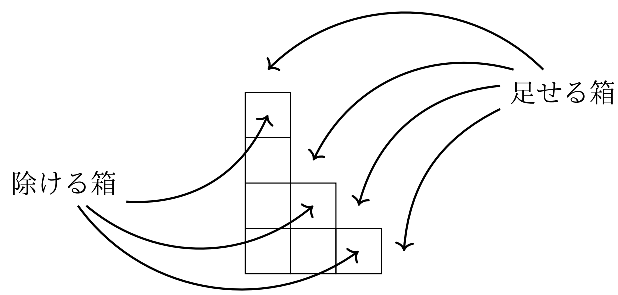

図 6. 足せる箱と除ける箱

命題 10.20 による $\mathfrak{M}(n,r)$ の固定点の記述から、$\mathfrak{P}(n,r)$ における $\mathbb{T}$-作用に関する固定点は、r個のヤング図形 $\vec{Y} = (Y^1, \dots, Y^r)$ で $|\vec{Y}| = n$ となるものと、ある Y^α $(\alpha = 1, \dots, r)$ の除ける箱 s^α の組 $(\vec{Y}, s^\alpha)$ でパラメトライズされる。このとき、$\mathfrak{M}(n-1,r)$ の固定点は、$\vec{Y}$ のうち Y^α だけを s^α を取り除いた $Y^\alpha \setminus \{s^\alpha\}$ で置き換えたものである。箱をどのヤング図形から除いたかを覚えておくために、箱の肩に α を書いておく。$(Y^1, \dots, Y^\alpha \setminus \{s^\alpha\}, \dots, Y^r)$ を $\vec{Y} \setminus \{s^\alpha\}$ と書くことにする。逆に、$\vec{Y}' = (Y'^1, \dots, Y'^r)$ で$|\vec{Y}'| = n-1$ となるものから出発すると、$\vec{Y}'$ に Y'^α $(\alpha = 1, \dots, r)$ の足せる箱 s^α を付け足したもので、パラメトライズされる。上の場合と同様に、付け加えてできるヤング図形の組を $\vec{Y}' \sqcup \{s^\alpha\}$ で表す。

以下、作用素 E_k, F_k を局所化定理で計算する。局所化定理で計算をチェックすればよいことは、次の結果が保証する。

事実 11.17. $H^*_{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}(n,r))$ は、$H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$ 加群として自由である。

§4と同様に、商体 $\mathrm{Frac}\, H^*_{\mathbb{T}}(\mathrm{pt})$ をテンソル積した同変コホモロジーを $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}(?)$ で表す。固定点 $\vec{Y}$ の $\mathfrak{M}(n,r)$への包含写像を $i_{\vec{Y}}$ で表したとき、定理 4.9 の証明の最初の部分と、そこで使われた 命題 4.10 とから、同型写像

$$\sum_{\vec{Y}} i_{\vec{Y}*} \colon \bigoplus_{\vec{Y}} \mathcal{H}_{\mathbb{T}}(\vec{Y}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}(n,r))$$

[1]箱はヤング図形にはないので、「足せる空き」といった方が感じがでるが、英語の文献・論文で addable box とよばれているので踏襲することにした。

があり、逆写像は、$\sum \frac{i_{\vec{Y}}^*}{e(T_{\vec{Y}}\mathfrak{M}(n,r))}$ であった。$\mathfrak{P}(n,r)$ についても同様に、

$$\sum_{(\vec{Y},s)} i_{(\vec{Y},s)*}\colon \bigoplus_{(\vec{Y},s)} \mathcal{H}_{\mathbb{T}}((\vec{Y},s)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_{\mathbb{T}}(\mathfrak{P}(n,r))$$

は同型写像で、逆写像は $\sum \frac{i_{(\vec{Y},s)}^*}{e(T_{(\vec{Y},s)}\mathfrak{P}(n,r))}$ である。合わせて (4.14) で見たように

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_{\mathbb{T}}(\mathfrak{P}(n,r)) & \xrightarrow{p_{1*}} & \mathcal{H}_{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}(n,r)) \\
\sum \dfrac{i_{(\vec{Y},s)}^*}{e(T_{(\vec{Y},s)}\mathfrak{P}(n,r))}\Big\downarrow & & \Big\downarrow\sum \dfrac{i_{\vec{Y}}^*}{e(T_{\vec{Y}}\mathfrak{M}(n,r))} \\
\bigoplus_{(\vec{Y},s)} \mathcal{H}_{\mathbb{T}}((\vec{Y},s)) & \xrightarrow[p_{1*}^T]{} & \bigoplus_{\vec{Y}} \mathcal{H}_{\mathbb{T}}(\vec{Y})
\end{array}$$

は可換図式である。引き戻し p_2^* については、$\mathfrak{M}(n-1,r)$ の固定点を $\vec{Y}'$ で表して

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}(n-1,r)) & \xrightarrow{p_2^*} & \mathcal{H}_{\mathbb{T}}(\mathfrak{P}(n,r)) \\
\sum i_{\vec{Y}'}^*\Big\downarrow & & \Big\downarrow\sum i_{(\vec{Y},s)}^* \\
\bigoplus_{\vec{Y}'} \mathcal{H}_{\mathbb{T}}(\vec{Y}') & \xrightarrow[p_2^{T*}]{} & \bigoplus_{(\vec{Y},s)} \mathcal{H}_{\mathbb{T}}((\vec{Y},s))
\end{array}$$

は可換図式である。

そこで、$\mathcal{H}_{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}(n-1,r))$ の基底 $\{i_{\vec{Y}'*}[\vec{Y}']\}$ について、F_r での行き先を、$\mathcal{H}_{\mathbb{T}}(\mathfrak{M}(n,r))$ の基底 $\{i_{\vec{Y}*}[\vec{Y}]\}$ に関する線形和で表すと、その行列要素が 0 にならないのは、$\vec{Y}'$ の中のある Y^α $(\alpha = 1,\dots,r)$ に足せる箱 s を付け足して $\vec{Y}$ ができている場合である。そして、そのような $\vec{Y}$ に対して行列要素は、

$$c_1(\operatorname{Ker}\xi)|^k_{(\vec{Y},s)} \frac{e(T_{\vec{Y}'}\mathfrak{M}(n-1,r))}{e(T_{(\vec{Y},s)}\mathfrak{P}(n,r))} = c_1(\operatorname{Ker}\xi)|^k_{(\vec{Y},s)} \frac{e(\mathscr{C}^\bullet_{(\vec{Y},s)})}{e(T_{\vec{Y}}\mathfrak{M}(n,r))} \tag{11.18}$$

で与えられる。等号は、$\mathfrak{P}(n,r)$ の $\mathfrak{M}(n,r)\times\mathfrak{M}(n-1,r)$ における法束が (11.5) の複体 $\mathscr{C}^\bullet$ で与えられていることからの帰結である。

同様に、E_k については

$$(-1)^{r-1}\varepsilon_1\varepsilon_2 c_1(\operatorname{Ker}\xi)^k|_{(\vec{Y},s)} \frac{e(\mathscr{C}^\bullet_{(\vec{Y},s)})}{e(T_{\vec{Y}'}\mathfrak{M}(n-1,r)} \tag{11.19}$$

となる。

固定点公式による計算を実行するために、次の補助的な関数を用意しよう。

$$\varphi(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{(x+\varepsilon_1)(x+\varepsilon_2)}{x(x+\varepsilon_1+\varepsilon_2)},$$
$$C_{\vec{Y}}(z) \overset{\text{def.}}{=} \prod_{\alpha=1}^r (z-a_\alpha) \prod_{s\in Y_\alpha} \varphi(z-a_\alpha+l'(s)\varepsilon_1+a'(s)\varepsilon_2)$$

とおく。幾何学的な意味は、

$$C_{\vec{Y}}(z) = c^z(\mathcal{E})|_{\vec{Y}}, \qquad C_{\vec{Y}}(z-\varepsilon_1-\varepsilon_2) = c^z(t_1^{-1}t_2^{-1}\mathcal{E})|_{\vec{Y}} \tag{11.20}$$

である。(11.12) と比較すると、

$$\left.\frac{c^z(t_1^{-1}t_2^{-1}\mathcal{E})}{c^z(\mathcal{E})}\right|_{\vec{Y}} = \frac{C_{\vec{Y}}(z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{C_{\vec{Y}}(z)} \tag{11.21}$$

となる。

また、箱 s^α に対して、

$$\chi(s^\alpha) = a_\alpha - l'(s^\alpha)\varepsilon_1 - a'(s^\alpha)\varepsilon_2$$

とおく。言うまでもないが、(10.28) において、箱 s^α が $\mathrm{ch}(V)$ に寄与するウェイトの log に他ならない。

あとの準備のために、次の補題を用意する。

補題 11.22. Y_α に足せる箱の全体を $\mathcal{A}_{Y_\alpha}$, Y_α から除ける箱の全体を $\mathcal{R}_{Y_\alpha}$ とするとき、

$$C_{\vec{Y}}(z) = \prod_{\alpha=1}^{r} \frac{\displaystyle\prod_{s^\alpha\in\mathcal{A}_{Y_\alpha}} (z-\chi(s^\alpha))}{\displaystyle\prod_{s^\alpha\in\mathcal{R}_{Y_\alpha}} (z+\varepsilon_1+\varepsilon_2-\chi(s^\alpha))}$$

が成り立つ。特に、$C_{\vec{Y}}(z)^{-1}$ の極は高々一位で、その位置は、s^α が Y_α に足せる箱の $z=\chi(s^\alpha)$ のところにある。その点における留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=\chi(s^\alpha)} \frac{1}{C_{\vec{Y}}(z)} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{C_{\vec{Y}\sqcup\{s^\alpha\}}(\chi(s^\alpha))}$$

で与えられる。

また、$C_{\vec{Y}}(z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)$ の極は高々一位で、その位置は、s^α が Y_α から除ける箱の $z=\chi(s^\alpha)$ のところにある。その点における留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=\chi(s^\alpha)} C_{\vec{Y}}(z-\varepsilon_1-\varepsilon_2) = -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} C_{\vec{Y}\setminus\{s^\alpha\}}(\chi(s^\alpha)-\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$

で与えられる。

証明. 説明のために補助的に

$$\begin{aligned}
A_{\vec{Y}}(z) &\overset{\text{def.}}{=} \prod_{\alpha=1}^{r}(z-a_\alpha)\prod_{s\in Y_\alpha} (z-a_\alpha+(l'(s)+1)\varepsilon_1+a'(s)\varepsilon_2) \\
&\qquad\qquad \times (z-a_\alpha+l'(s)\varepsilon_1+(a'(s)+1)\varepsilon_2)\,, \\
B_{\vec{Y}}(z) &\overset{\text{def.}}{=} \prod_{\alpha=1}^{r}\prod_{s\in Y_\alpha} (z-a_\alpha+l'(s)\varepsilon_1+a'(s)\varepsilon_2) \\
&\qquad\qquad \times (z-a_\alpha+(l'(s)+1)\varepsilon_1+(a'(s)+1)\varepsilon_2)
\end{aligned}$$

という関数を定めておく。そこで、$C_{\vec{Y}}(z)=A_{\vec{Y}}(z)/B_{\vec{Y}}(z)$ が $z=a_\alpha-i\varepsilon_1-j\varepsilon_2$ $(i,j\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ に零点か極を持つかどうかを考える。最初に $(i,j)=(0,0)$ のときは、$A_{\vec{Y}}(z)$ の最初の項 $z-a_\alpha$ が零点を生む可能性があるが、もしも $(0,0)$ に箱 s があれば、$B_{\vec{Y}}(z)$ の因子 $z-a_\alpha+l'(s)\varepsilon_1+a'(s)\varepsilon_2$ により、キャンセルしてしまう。これは、$(0,0)$ が足せる箱ならば零点、そうでないならば零点でない、ということなので、$C_{\vec{Y}}(z)$ への $z-a_\alpha$ の現れ方について主張は正しい。

次に $(i,j) \neq (0,0)$ のとき、箱 s に対応する $A(z)$, $B(z)$ の中の 4 つの因子が、$z = a_\alpha - i\varepsilon_1 - j\varepsilon_2$ に極もしくは零点を与えるかどうか考えてみる。その寄与は

$$\begin{cases} \text{極} & (l'(s), a'(s)) = (i,j) \text{ もしくは } = (i-1, j-1) \text{のとき} \\ \text{零点} & (l'(s), a'(s)) = (i-1, j) \text{ もしくは } = (i, j-1) \text{のとき} \end{cases}$$

である。したがって、零点になるのは、$i, j \geq 1$ ならば、$(i-1, j)$, $(i, j-1)$ に共に箱があり、必然的に $(i-1, j-1)$に箱があるが、(i,j) には箱がない場合である。これは、すなわち (i,j) が足せる箱ということである。

i もしくは j が 0 のときには、$i-1$ もしくは $j-1$ が負になってしまうので、上の説明は文字通りには正しくないが、$A(z)$, $B(z)$ の中の 2 つの因子が寄与する可能性があり、同じ考察で主張が正しいことが分かる。

極になるのは、$(i-1, j-1)$ に箱があり、$(i-1, j)$, $(i, j-1)$ に箱がない場合で、すなわち $(i-1, j-1)$ が除ける箱であるということである。

留数については、

$$\frac{C_{\vec{Y} \sqcup \{s^\alpha\}}(z)}{C_{\vec{Y}}(z)} = \varphi(z - \chi(s^\alpha)) \tag{11.23}$$

から従う。項 $\varepsilon_1\varepsilon_2/(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ は$\operatorname{Res}_{z=\chi(s^\alpha)} \varphi(z - \chi(s^\alpha))$ からの寄与である。 □

以下、簡潔さのために $i_{\vec{Y}*}[\vec{Y}]$ を単に $\vec{Y}$ で表すことにする。(11.18)と (11.19) より次を得る。

補題 11.24. $\vec{Y} = \vec{Y}' \sqcup \{s^\alpha\}$ とする。

(1) F_k の $(\vec{Y}', \vec{Y})$ における行列要素は

$$\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \left. \frac{z^k}{C_{\vec{Y}}(z)} \right|_{z=\chi(s^\alpha)}$$

である。

(2) E_k の $(\vec{Y}, \vec{Y}')$ における行列要素は

$$-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \left. z^k C_{\vec{Y}'}(z - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right|_{z=\chi(s^\alpha)}$$

である。

補題 11.22 により、$C_{\vec{Y}}(z)^{-1}$, $C_{\vec{Y}'}(z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)$ に $z = \chi(s^\alpha)$ を代入することができることに注意しよう。

証明. 複体 $\mathscr{C}^\bullet$ の定義 (11.5) と、接空間を与える複体の定義 (10.25) を見比べて、$V^1/\operatorname{Ker}\xi \cong V^2$ に注意すると、

$$\frac{c^z(\mathscr{C}^\bullet_{(\vec{Y}, s^\alpha)})}{c^z(T_{\vec{Y}}\mathfrak{M}(n,r))} = \frac{c^z(\operatorname{Hom}(V^1, \operatorname{Ker}\xi)) c^z(t_1t_2 \operatorname{Hom}(V^1, \operatorname{Ker}\xi))}{c^z(t_1 \operatorname{Hom}(V^1, \operatorname{Ker}\xi)) c^z(t_2 \operatorname{Hom}(V^1, \operatorname{Ker}\xi)) c^z(\operatorname{Hom}(W, \operatorname{Ker}\xi)) c^z(t_1t_2\mathbb{C})}$$

を得る。$\operatorname{Ker}\xi$ のウェイトが $\chi(s^\alpha)$ であることに注意して、他の項が (11.12) の $\mathcal{E}$ にまとめられるので、(11.20) から、上の式は

$$\frac{1}{z+\varepsilon_1+\varepsilon_2} C_{\vec{Y}}(z + \chi(s^\alpha))^{-1}$$

に等しい。$z=0$ は極でないので、$z=0$ とおいて、(1) が従う。(2) についても同様である。 □

11(iv). 二次の関係式の証明. 以上の準備のもと、作用素の積を計算することができる。

主張. $[E_k, F_l]$ の、対角線でないところの行列要素 $(\vec{Y}, \vec{Y}')$ $(\vec{Y} \neq \vec{Y}')$ は 0 である。

証明. $\vec{Y}' = \vec{Y} \sqcup \{s^\alpha\} \setminus \{s^\beta\}$ としよう。$\vec{Y} \neq \vec{Y}'$ と仮定しているので、s^α, s^β は決まっていることに注意する。また、$\vec{Y}' = \vec{Y} \setminus \{s^\beta\} \sqcup \{s^\alpha\}$ ともなっている。

補題 11.24より $E_k F_l$ の $(\vec{Y}, \vec{Y}')$ における行列要素は

$$-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}\, w^k z^l \frac{C_{\vec{Y}'}(w-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{C_{\vec{Y}\sqcup\{s^\alpha\}}(z)}\Bigg|_{\substack{z=\chi(s^\alpha)\\ w=\chi(s^\beta)}}$$

で与えられる。一方、$F_l E_k$ の行列要素は

$$-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}\, w^k z^l \frac{C_{\vec{Y}\setminus\{s^\beta\}}(w-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{C_{\vec{Y}'}(z)}\Bigg|_{\substack{z=\chi(s^\alpha)\\ w=\chi(s^\beta)}}$$

である。(11.23) を使って、両者を $C_{\vec{Y}'}(w-\varepsilon_1-\varepsilon_2)/C_{\vec{Y}'}(z)$ で書き直すと、前者の場合は

$$\varphi(z-\chi(s^\beta))^{-1}$$

後者の場合は

$$\varphi(w-\chi(s^\alpha)-\varepsilon_1-\varepsilon_2)^{-1}$$

が生じる。$z=\chi(s^\alpha)$, $w=\chi(s^\beta)$ を代入すると、二つは等しいので、主張が従う。 □

対角線成分については、 $E_k F_l$ の $(\vec{Y}, \vec{Y})$ における行列要素は、

$$\begin{aligned}
&-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{s^\alpha\in\mathcal{A}_{Y^\alpha}} z^{k+l}\frac{C_{\vec{Y}}(z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{C_{\vec{Y}\sqcup\{s^\alpha\}}(z)}\Bigg|_{z=\chi(s^\alpha)}\\
&=-\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{s^\alpha\in\mathcal{A}_{Y^\alpha}}\operatorname*{Res}_{z=\chi(s^\alpha)}\frac{z^{k+l}C_{\vec{Y}}(z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{C_{\vec{Y}}(z)}dz
\end{aligned}$$

である。ただし二行目で 補題 11.22 を用いた。

同様に、$F_l E_k$ の $(\vec{Y}, \vec{Y})$ における行列要素は、

$$\begin{aligned}
&-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{s^\alpha\in\mathcal{R}_{Y^\alpha}} z^{k+l}\frac{C_{\vec{Y}\setminus\{s^\alpha\}}(z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{C_{\vec{Y}}(z)}\Bigg|_{z=\chi(s^\alpha)}\\
&=\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{s^\alpha\in\mathcal{R}_{Y^\alpha}}\operatorname*{Res}_{z=\chi(s^\alpha)}\frac{z^{k+l}C_{\vec{Y}}(z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{C_{\vec{Y}}(z)}dz
\end{aligned}$$

である。

交換子を計算すると、補題 11.22 よりすべての極が現れていることに注意して、留数定理を適用することができ、

$$\begin{aligned}[E_k, F_l]\vec{Y} &= -\frac{\vec{Y}}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{s^\alpha\in\mathcal{A}_{Y^\alpha}\cup\mathcal{R}_{Y^\alpha}}\operatorname*{Res}_{z=\chi(s^\alpha)}\frac{z^{k+l}C_{\vec{Y}}(z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{C_{\vec{Y}}(z)}dz \\ &= \frac{\vec{Y}}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\operatorname*{Res}_{z=\infty}\frac{z^{k+l}C_{\vec{Y}}(z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{C_{\vec{Y}}(z)}dz = H_{k+l}\vec{Y}\end{aligned}$$

が成り立つ。これは、(11.15g)に他ならない。

次に、関係式 (11.15e) を $(\vec{Y}, \vec{Y}')$ における行列要素についてチェックする。$\vec{Y}'$ は $\vec{Y}$ に箱 s^α と t^β を付け加えて得られているとする。

まず、$\alpha=\beta$ で、s^α, t^β が同じ行に $\boxed{s^\alpha}\boxed{t^\beta}$ と並んでいるときを考える。補題 11.24 と (11.23) により、$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2F_kF_l$ の $(\vec{Y},\vec{Y}')$ における行列要素は

$$\frac{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\, z^k\frac{1}{C_{\vec{Y}'}(z)}\bigg|_{z=a_\alpha-l'(t^\beta)\varepsilon_1-a'(t^\beta)\varepsilon_2}\ w^l\frac{1}{C_{\vec{Y}'}(w)}\bigg|_{w=a_\alpha-l'(s^\alpha)\varepsilon_1-a'(w^\alpha)\varepsilon_2}$$

あとの計算には、a_α に $l'(s^\alpha)\varepsilon_1+a'(s^\alpha)\varepsilon_2$ を吸収することにより、$l'(s^\alpha)=a'(s^\alpha)=0$ として一般性を失わない。このとき $l'(t^\beta)=1,\ a'(t^\beta)=0$である。$z^kw^l|_{\substack{z=a_\alpha-\varepsilon_1\\ w=a_\alpha}}$ 以外の部分は、共通なので、この部分だけを計算すればよい。$[F_3,F_0]-3[F_2,F_1]$ の場合は

$$(a_\alpha-\varepsilon_1)^3-a_\alpha^3-3(a_\alpha-\varepsilon_1)^2a_\alpha+3(a_\alpha-\varepsilon_1)a_\alpha^2=-\varepsilon_1^3$$

である。$-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2)[F_1,F_0]$ の場合は、

$$-(\varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2)\left((a_\alpha-\varepsilon_1)-a_\alpha\right)=\varepsilon_1^3+\varepsilon_1^2\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_2^2$$

これを足すと、$\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ であり、これは $\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)F_0^2$ からの寄与に等しいので、(11.15e) が成り立つ。

$\alpha=\beta$ で、s^α, t^β が同じ列に $\begin{array}{|c|}\hline t^\beta\\\hline s^\alpha\\\hline\end{array}$ と並んでいるときも、同じ議論で正しい。

それ以外の場合には、二つの箱をどちらの順番で足すことも可能な場合である。すると、$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2F_kF_l$ の $(\vec{Y},\vec{Y}')$ における行列要素は

$$\begin{aligned}&\frac{z^k}{C_{\vec{Y}'}(z)}\bigg|_{z=a_\beta-l'(t^\beta)\varepsilon_1-a'(t^\beta)\varepsilon_2}\ \frac{w^l}{C_{\vec{Y}\sqcup\{s^\alpha\}}(w)}\bigg|_{w=a_\alpha-l'(s^\alpha)\varepsilon_1-a'(s^\alpha)\varepsilon_2} \\ &\quad+\frac{w^k}{C_{\vec{Y}'}(w)}\bigg|_{w=a_\alpha-l'(s^\alpha)\varepsilon_1-a'(s^\alpha)\varepsilon_2}\ \frac{z^l}{C_{\vec{Y}\sqcup\{t^\alpha\}}(z)}\bigg|_{z=a_\beta-l'(t^\beta)\varepsilon_1-a'(t^\beta)\varepsilon_2} \\ &=\left(\frac{z^kw^l}{\varphi(w-z)}+\frac{z^lw^k}{\varphi(w-z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\right)\frac{1}{C_{\vec{Y}'}(z)C_{\vec{Y}'}(w)}\bigg|_{\substack{z=a_\beta-l'(t^\beta)\varepsilon_1-a'(t^\beta)\varepsilon_2\\ w=a_\alpha-l'(s^\alpha)\varepsilon_1-a'(s^\alpha)\varepsilon_2}}\end{aligned}$$

である。最後の項 $1/C_{\vec{Y}'}(z)C_{\vec{Y}'}(w)$ は、共通なので最初の部分を計算すればよい。 $[F_3,F_0]$ からは

$$(z^3-w^3)\left(\frac{(w-z+\varepsilon_1)(w-z+\varepsilon_2)}{(w-z)(w-z+\varepsilon_1+\varepsilon_2)}-\frac{(w-z-\varepsilon_1)(w-z-\varepsilon_2)}{(w-z)(w-z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\right)$$

$-3[F_2, F_1]$ からは

$$-3(z^2w - zw^2)\left(\frac{(w-z+\varepsilon_1)(w-z+\varepsilon_2)}{(w-z)(w-z+\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{(w-z-\varepsilon_1)(w-z-\varepsilon_2)}{(w-z)(w-z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\right)$$

を得る。$-(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2)[F_1, F_0]$ は

$$-(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2)(z-w)\left(\frac{(w-z+\varepsilon_1)(w-z+\varepsilon_2)}{(w-z)(w-z+\varepsilon_1+\varepsilon_2)} - \frac{(w-z-\varepsilon_1)(w-z-\varepsilon_2)}{(w-z)(w-z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\right)$$

を得る。これらをすべて足し合わせると

$$\frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\left((w-z)^2 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2\right)}{(w-z+\varepsilon_1+\varepsilon_2)(w-z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}$$

となるが、これは $\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)F_0^2$ からの項である

$$\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\left(\frac{(w-z+\varepsilon_1)(w-z+\varepsilon_2)}{(w-z)(w-z+\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + \frac{(w-z-\varepsilon_1)(w-z-\varepsilon_2)}{(w-z)(w-z-\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\right)$$

に等しいので、(11.15e) が成り立つ。(11.15d)の証明も同様である。

11(v). 三次の関係式の証明. 三次の関係式 (11.15f) は、本来ハイゼンベルグ代数の定義関係式であって、それは $r = 1$ のヒルベルト概型のときには Lehn によるビラソロ代数の表現の構成 [**Leh99**] から従う。この結果は、Maulik-Okounkov [**MO19**] やSchiffmann-Vasserot [**SV13**] より以前から知られていたが、ここでは (11.15f) を直接チェックして、そのあとにハイゼンベルグ代数、ビラソロ代数との関係を説明する。

*** 以下加筆予定 ***

Bibliography

[AB84] M. F. Atiyah and R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, Topology **23** (1984), no. 1, 1–28.

[AS13] N. Arbesfeld and O. Schiffmann, *A presentation of the deformed $W_{1+\infty}$ algebra*, Symmetries, integrable systems and representations, Springer Proc. Math. Stat., vol. 40, Springer, Heidelberg, 2013, pp. 1–13.

[BFM+16] J.-E. Bourgine, M. Fukuda, Y. Matsuo, H. Zhang, and R.-D. Zhu, *Coherent states in quantum $\mathcal{W}_{1+\infty}$ algebra and qq-character for 5d super Yang-Mills*, PTEP. Prog. Theor. Exp. Phys. (2016), no. 12, 123B05, 41.

[BGfGf73] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel′ fand, and S. I. Gel′ fand, *Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P*, Uspehi Mat. Nauk **28** (1973), no. 3(171), 3–26.

[BT82] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[BV82] N. Berline and M. Vergne, *Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **295** (1982), no. 9, 539–541.

[BV83] ———, *Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 2, 539–549.

[Dem74] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 53–88.

[ESm87] G. Ellingsrud and S. A. Strø mme, *On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane*, Invent. Math. **87** (1987), no. 2, 343–352.

[FH91] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991, A first course, Readings in Mathematics.

[FT11] B. L. Feigin and A. I. Tsymbaliuk, *Equivariant K-theory of Hilbert schemes via shuffle algebra*, Kyoto J. Math. **51** (2011), no. 4, 831–854.

[Ful97] W. Fulton, *Young tableaux*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, With applications to representation theory and geometry.

[Ful98] ———, *Intersection theory*, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Gin91] V. Ginzburg, *Lagrangian construction of the enveloping algebra $U(\mathrm{sl}_n)$*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** (1991), no. 12, 907–912.

[GV93] V. Ginzburg and É. Vasserot, *Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n*, Internat. Math. Res. Notices (1993), no. 3, 67–85.

[KK86] B. Kostant and S. Kumar, *The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **83** (1986), no. 6, 1543–1545.

[Leh99] M. Lehn, *Chern classes of tautological sheaves on Hilbert schemes of points on surfaces*, Invent. Math. **136** (1999), no. 1, 157–207.

[Lus88] G. Lusztig, *Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1988), no. 67, 145–202.

[Mac95] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[MO19] D. Maulik and A. Okounkov, *Quantum groups and quantum cohomology*, Astérisque (2019), no. 408, ix+209, arXiv:1211.1287 [math.AG].

[Nak94] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 2, 365–416.

[Nak98] ———, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **91** (1998), no. 3, 515–560.

[Nak99] ———, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, University Lecture Series, vol. 18, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Nak01] ———, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 1, 145–238 (electronic).

[Nek03] N. A. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2003), no. 5, 831–864.

[NY05] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, Invent. Math. **162** (2005), no. 2, 313–355.

[SV13] O. Schiffmann and E. Vasserot, *Cherednik algebras, W-algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on* $\mathbf{A}^2$, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **118** (2013), 213–342.

[Tsy17] A. Tsymbaliuk, *The affine Yangian of* $\mathfrak{gl}_1$ *revisited*, Adv. Math. **304** (2017), 583–645.

[Var00] M. Varagnolo, *Quiver varieties and Yangians*, Lett. Math. Phys. **53** (2000), no. 4, 273–283.

[VV99] M. Varagnolo and E. Vasserot, *On the* K*-theory of the cyclic quiver variety*, Internat. Math. Res. Notices (1999), no. 18, 1005–1028.