CHAPTER 1

# 同変ホモロジー群

この章では、幾何学的表現論で用いられる(コ)ホモロジー群について、必要なこと、特に同変(コ)ホモロジー群についてまとめる。最初の節は、オイラー類、チャーン類に関する復習で、すでに別の教科書で学んでいるものと仮定して、簡潔に説明するにとどめる。§2で紹介するBottの留数公式は、幾何学的表現論に限らず、数え上げ幾何学等で用いられる基本的な道具でもある。この節では、主張と計算例を与える。§4では、同変(コ)ホモロジー群の定義を与え、Bottの留数公式の証明を与える。同変(コ)ホモロジー群は、群作用をもった位相空間に対する(コ)ホモロジー理論であるが、通常の(コ)ホモロジー理論の一般化ととらえるだけではなく、広い設定に拡張することによって通常の(コ)ホモロジーの計算をする手法が増えたり、結果が見通しよくなったりするので、(コ)ホモロジー理論の続論として勉強した方がよいと思う。実際、同変(コ)ホモロジー群は、ファイバー束の(コ)ホモロジーの例であり、底空間とファイバーの(コ)ホモロジーが、それぞれ一点の同変(コ)ホモロジー、通常の同変ではない(コ)ホモロジーになっており、これら三つがどのように関係しているかを理解することが、一つのポイントになる。

以下、(コ)ホモロジー群は複素係数で考えるものとして、係数は省くことにする。

## 1. オイラー類、チャーン類に関する復習

この節ではオイラー類、チャーン類に関する復習を行う。その性質がどのような議論から従うかを抑えておくことが、あとで使われるときも重要になってくるので、性質を列挙するだけではなく、いくつかについては証明についても簡単に述べることになる。

**1(i). トム類.** $X$を位相空間、$E \to X$ を階数$r$の向き付けられた実ベクトル束とする。$X$を0切断により、$E$の部分集合とみなし、その補集合 $E^0 = E \setminus X$ を考える。このときトム同型

$$H^{*+r}(E, E^0) \cong H^*(X)$$

が成立する。(左辺は、ファイバー方向にコンパクト台を持つコホモロジー群$H^*_{\mathrm{cv}}(E)$で置き換えてもよい。) この同型写像において$1 \in H^0(X)$の逆像を、ベクトル束$E$の**トム類**といい、$\vartheta(E)$で表わす。$X$が$C^\infty$級多様体で、ド・ラーム・コホモロジーで考えているときは、同型写像はファイバーに沿った積分で与えられる。さらに、$\vartheta(E)$は、各ファイバーで積分すると1になるような微分形式を代表元として持つ。代表元を選ぶときに、0切断のいくらでも小さな近傍に台をもつように選ぶことができる。近傍をどんどん小さくとった極限を考えれば、$\vartheta(E)$は$E^0$では0だが、ファイバーで積分すると1になるような、したがって$X$の上では$\infty$の値を取っているような、超関数の意味での微分形式で表されている、

と考えることができる。このように思うと、トム類が$X$のポアンカレ双対を与えることに、納得がいく。

また、$\vartheta(E)$を用いると、上の同型写像の逆写像は

$$H^*(X) \ni \alpha \mapsto \vartheta(E) \wedge \pi^*\alpha$$

で与えられる。

基本的な性質として、次の二つを上げておこう。

**自然性:** $f\colon X \to Y$を連続写像、$E \to Y$を向き付けられたベクトル束、$f^*E$を引き戻されたベクトル束とすると

$$\vartheta(f^*E) = f^*\vartheta(E)$$

が成り立つ。

**ホイットニー和公式:** $E,\ F \to X$を二つの向き付けられたベクトル束とするとき、

$$\vartheta(E \oplus F) = \vartheta(E) \times \vartheta(F)$$

が成り立つ。ここで、$\times$は準同型写像 $H^*(E, E^0) \otimes H^*(F, F^0) \to H^*(E \oplus F, (E \oplus F)^0)$であり、射影 $E \oplus F \to E, F$で引き戻して、カップ積を取ることにより与えられる。

**1(ii). オイラー類.** $E \to X$を上と同様として、$s\colon X \to E$を0切断とする。このとき、$s^*(\vartheta(E)) \in H^r(X)$を$E$の**オイラー類**といい、$e(E)$で表わす。トム類の自然性、和公式からオイラー類の自然性 $e(f^*E) = f^*e(E)$、和公式 $e(E \oplus F) = e(E) \wedge e(F)$が従う。

**1(iii). オイラー類と横断的な切断の零点のポアンカレ双対.** $X$は向き付けられた$C^\infty$級多様体で、ポアンカレ双対定理が成り立っているものとする。$E \to X$を向きづけられた実ベクトル束とし、$s\colon X \to E$をその切断で、$s(X)$と0切断は、$E$の中で横断的に交わっているものとする。すると、$s^{-1}(0) = \{x \in X \mid s(x) = 0\}$ は、$X$の中の向き付けられた部分多様体である。これを$S$で表わし、そのポアンカレ双対を $\mathrm{PD}[S]$で表わす。このとき

**定理 1.1.** ポアンカレ双対$\mathrm{PD}[S]$は、$E$のオイラー類 $e(E)$に等しい。すなわち、

$$\int_X \alpha \wedge e(E) = \int_S i^*\alpha$$

が、任意のコンパクト台のコホモロジー群の元 $\alpha \in H^*_c(X)$ について成り立つ。ここで、$i\colon S \to X$は包含写像である。

**証明.** 直感的なイメージで説明しよう。詳しくは、たとえば[**?**, Prop. 12.8]を参照せよ。

切断$s$と0切断は、ホモトピックであるから、$e(E)$はトム類 $\vartheta(E)$の$s$による引き戻しと思うことができる。特に、$e(E)$は、準同型写像 $H^r(X, X \setminus S) \to H^r(X)$の像に入っていることも分かる。したがって、$\alpha \wedge e(E) = \alpha \wedge s^*(\vartheta(E))$を積分するときは、$S$の近傍で積分すればよい。$E$の$S$への制限$E|_S$と$S$の$X$における法束$N_{S/X}$は同型であり、$N_{S/X}$における$S$の近傍と、$X$における近傍は微分同相である。したがって、$\alpha \wedge e(E)$の$S$の近傍における積分は、$E|_S$における$S$の近傍上での積分であり、$\int_{E|_S} \pi^* i^*(\alpha) \wedge \vartheta(E|_S)$に等しい。ここで、$\pi\colon E|_S \to S$は射影である。この積分を$E|_S$のファイバー上の積分と、$S$上の積分の二つに分けると、$\vartheta(E|_S)$のファイバー上での積分が1であることから、これは、$\int_S i^*(\alpha)$に等しい。 $\square$

**系 1.2.** $E$ がいたるところ0にならない切断を持つとすると、$E$のオイラー類 $e(E)$ は0である。

**注 1.3.** 定理 1.1の証明中に現れた $H^r(X, X \setminus S)$ の元は、チャウ群の場合に**局所化された最高次チャーン類**とよばれているもの [**?**, §14.1]の、コホモロジーにおける対応物である。

**1(iv). チャーン類.** $E \to X$を階数$r$の複素ベクトル束とする。$E$を実ベクトル束と思ったときに、複素構造から自然に向きが与えられていることに注意しよう。各点$x \in X$におけるファイバー $E_x$ の1次元部分ベクトル空間の全体のなす射影空間 $\mathbb{P}(E_x)$ は、$x$を動かすと $X$ 上のファイバー束 $\pi\colon \mathbb{P}(E) \to X$ を与える。これを、$E$に付随する**射影束**という。 $\mathbb{P}(E)$の各点 $\ell$ に対し、その点自身が定める複素1次元部分ベクトル空間 $\ell \subset E_x$ を考えることで、$\mathbb{P}(E)$上の複素直線束が与えられる。これを、トートロジカル直線束という。$S$で表そう。すなわち、$S$ の $\ell$ におけるファイバー $S_\ell$ は $\ell$ 自身である。これを階数2の実ベクトル束と思って、オイラー類を考え、$-1$倍したものを $h \in H^2(X)$で表す: $h = -e(S)$。 $\mathbb{P}(E_x)$のコホモロジーは、$h$の$\mathbb{P}(E_x)$への制限 $h_x$ を用いて、 $H^*(\mathbb{P}(E_x)) = \mathbb{C}[h_x]/(h_x^r)$ と表されることから、ファイバー束 $\pi\colon \mathbb{P}(E) \to X$ に対するルレイ・ヒルシュの定理 (例えば [**?**, Th. 5.11]参照) により、$H^*(\mathbb{P}(E))$ は $H^*(X)$-加群として、基底 $1, h, \ldots, h^{r-1}$ を持つ自由加群である。そこで、$h^r$ を

$$h^r = -\left(\pi^*(c_1(E))h^{r-1} + \pi^*(c_2(E))h^{r-2} + \cdots + \pi^*(c_r(E))\right) \qquad c_i(E) \in H^{2i}(X)$$

と表すことによって、$E$の**チャーン類** $c_i(E)$ を定義する。また、便宜上 $c_0(E) = 1 \in H^0(X)$と約束する。また、全チャーン類 $c(E)$ を $c_0(E)+c_1(E)+\cdots+c_r(E) \in H^*(X)$ と定める。また、$c_{r+1}(E), c_{r+2}(E), \ldots,$ は 0 と定める。

容易に分かるように、$f\colon X \to Y$を連続写像、$E \to Y$ を複素ベクトル束、$f^*E$を引き戻されたベクトル束とすると、

$$c_i(f^*E) = f^*c_i(E)$$

と、自然性が成立する。

$r = 1$のときは、$\pi\colon \mathbb{P}(E) \to X$は恒等写像であり、トートロジカル直線束は、$E$自身に他ならない。したがって、上の定義式から $c_1(E)$ は、$-h$ すなわち、$E$を実ベクトル束と思ったときのオイラー類に等しい。さらに、このとき $e(E)$が$E$の局所自明化の変換関数を用いてあらわされる。(例えば [**?**, p.70からの節]を参照) $L_1, L_2$を共に直線束とすると、$L_1 \otimes L_2$ の変換関数は $L_1$の変換関数と$L_2$の変換関数の積であることから、

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2) \tag{1.4}$$

が従う。直線束 $L_2$ を $L_1$ の双対束 $L_1^*$として取ると、$L_1 \otimes L_2$ は自明束であり、至るところ消えない切断を持つことから 系 1.2から $c_1(L_1 \otimes L_2) = 0$ であり、したがって

$$c_1(L_1^*) = -c_1(L_1)$$

が成り立つ。

**1(v). 旗束.** $V$を$r$次元複素ベクトル空間としたとき、$V$の部分ベクトル空間の列

$$0 = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_{r-1} \subset S_r = V$$

で、$\dim S_i = i$ となるものの全体のなす空間を**旗多様体**という。これを$\mathcal{F}(V)$ で表す。旗多様体は、コンパクトな複素多様体の構造を持つことがよく知られてい

る。旗多様体の各点ごとに $i$次元複素ベクトル空間 $S_i$ を考えることで、階数 $i$ の複素ベクトル束が定まる。これを、記号を乱用して $S_i$ で表す。

より一般に、$E \to X$を階数$r$の複素ベクトル束としたとき、各ファイバー $E_x$ ごとに$\mathcal{F}(E_x)$を考え、それをまとめてできる空間 $\mathcal{F}(E)$ は、射影$\pi\colon \mathcal{F}(E) \to X$ と合わせて $X$ 上のファイバー束をなす。これを $E$ に付随する**旗束**という。上と同様に、ベクトル束$S_i$ を定義する。

**1(vi). 分裂原理.** 引き続き、複素ベクトル束 $E$ と付随した旗束 $\mathcal{F}(E)$ を考える。

部分空間の列から、最初から二番目の1次元の部分空間 $S_1$ を取ることによって$\mathcal{F}(E) \to \mathbb{P}(E)$ が定まる。逆に、$S_1$ が与えられたときに、残りの部分空間の列 $S_2 \subset \cdots \subset S_{r-1} \subset S_r$ と、$V/S_1$の部分空間の列 $S_2/S_1 \subset \cdots \subset S_{r-1}/S_1 \subset S_r/S_1 = V/S_1$ は全単射に対応する。したがって、$\mathcal{F}(E) \to \mathbb{P}(E)$は、$\mathbb{P}(E)$上のベクトル束 $E/S_1$ に付随した旗束 $\mathcal{F}(E/S_1)$ である。ここで、$E$は、正確には$X$上のベクトル束を$\mathbb{P}(E)$に引き戻したものであるが、簡潔さのために同じ記号で表した。トートロジカル直線束 $S_1$ は、自然に $E$ の部分束となり、$E/S_1$は商束である。こうしてファイバー束 $\mathcal{F}(E) \to X$ は、$\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E/S_1) \to \mathbb{P}(E) \to X$ と二つのファイバー束の列に分解された。

同じ操作を $E/S_1$ について繰り返す。すなわち、$E/S_1$ のファイバーの部分空間の列の中で、1次元のものを取り出す。これは、もとの $E$ のファイバーの部分空間の列では、2次元のもの $S_2$ を取り出すことに他ならない。すると、$\mathcal{F}(E/S_1) \to \mathbb{P}(E/S_1)$ が定まり、これは$(E/S_1)/(S_2/S_1) = E/S_2$ に付随した旗束である。

同じ操作を $E/S_2, \ldots$ と $E/S_{r-2}$まで繰り返すと、$\mathcal{F}(E) \to X$ は、射影束の列

$$\mathcal{F}(E) = \mathbb{P}(E/S_{r-2}) \to \mathbb{P}(E/S_{r-3}) \to \cdots \to \mathbb{P}(E/S_1) \to \mathbb{P}(E) \to X$$

を得る。右から順番に、$\mathbb{P}(E/S_{i-1})$ のトートロジカル直線束として $S_i/S_{i-1}$ が現れ、$(E/S_{i-1})/(S_i/S_{i-1}) = E/S_i$ の射影束として、次の $\mathbb{P}(\mathbb{E}/S_i)$ が現れる、という構造をしている。

$1 \leq i \leq r-2$ に対し、 $\mathbb{P}(E/S_{i-1})$ のトートロジカル直線束の$c_1$を$-1$倍したものを $x_i$ で表し、それを $\mathcal{F}(E)$のコホモロジー類に引き戻したものも同じ記号で表す。先の節のチャーン類と射影束のコホモロジーの関係を繰り返し適用することにより、 引き戻し写像 $H^*(X) \to H^*(\mathcal{F}(E))$ は単射であることが従う。また、$E$(正確には、$E$の$\mathcal{F}(E)$への引き戻し)は、部分ベクトル束の列

$$0 = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_{r-1} \subset S_r = E$$

を持つ。$S_i$の階数は $i$ である。直線束 $L_i$ を商ベクトル束　$S_i/S_{i-1}$ で定義する。上の $x_i$ は、$-c_1(L_i)$ である。ベクトル束の単完全列$0 \to S_{i-1} \to S_i \to L_i \to 0$ は、 ($S_i$ にエルミート計量を入れて $L_i$ を $S_{i-1}$ の直交補空間と同一視することにより) 分解するので、$S_i = S_{i-1} \oplus L_i$ となる。したがって、 $E \cong L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_r$ である。

これを用いると、次の有用な原理が従う。

**分裂原理:** 複素ベクトル束 $E$ のチャーン類に関する性質を証明するためには、$E$が複素直線束の直和に分解していると仮定して一般性を失わない。

次の節で、分裂原理の応用の例として、

- (ホイットニーの和公式) $c(E \oplus F) = c(E)c(F)$ が成り立つ
- 最高次のチャーン類 $c_r(E)$ は、$E$を実ベクトル束と思ったときのオイラー類 $e(E)$に等しい

を証明しよう。

**1(vii). 分裂原理の応用.** まず、$E$は直線束の直和 $L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$であると仮定する。

**補題 1.5.** 上の仮定のもとで、

$$c(E) = c(L_1) \cdots c(L_r) = (1 + c_1(L_1)) \cdots (1 + c_1(L_r))$$

が成り立つ。したがって、$c_i(E)$ は $c_1(L_1)$, ..., $c_1(L_r)$ を変数と思ったときの、第$i$次基本対称多項式である。

$x_1$, ..., $x_r$ を変数としたときに $(1 + x_1) \cdots (1 + x_r)$ を展開して、変数について$i$次の項をまとめたものが $i$ 次基本対称多項式であった。

**証明.** 射影束 $\mathbb{P}(E)$ 上で、トートロジカル直線束を考え $S$ で表す。$s_\alpha \colon S \to L_\alpha$ を $S$ の $L_\alpha$ への射影とする。$s_\alpha$ の零点集合は、1次元部分空間が $L_1 \oplus \cdots \oplus L_{\alpha-1} \oplus L_{\alpha+1} \oplus \cdots \oplus L_r$の中に入っているときである。この集合を $D_\alpha$ で表す。一点 $x \in X$ を取り、ファイバーの射影空間 $\mathbb{P}(E_x)$ の同次座標 $[x_1 : \cdots : x_r]$ を取れば、$x_\alpha = 0$ に他ならない。$D_\alpha$ は1次元、次元の下がった射影束である。

$s_\alpha$ を $S^* \otimes L_\alpha$ の切断と考えると、$X$ が多様体と仮定すれば、定理 1.1により$c_1(S^* \otimes L_\alpha)$ は $D_\alpha$ のポアンカレ双対である。多様体と仮定しないでも、$c_1(S^* \otimes L_\alpha)$は、$H^2(X, X \setminus D_\alpha) \to H^2(X)$の像に含まれていることは、定理 1.1の証明内で注意したように成立する。(注 1.3も参照) したがって$\prod_{\alpha=1}^r c_1(S^* \otimes L_\alpha)$は$H^{2r}(X, \bigcup_{i=1}^r X \setminus D_\alpha) \to H^{2r}(X)$の像に含まれる。ところが、$\bigcap_{\alpha=1}^r D_\alpha = \emptyset$ であるから、これは 0 である。よって

$$0 = \prod_{\alpha=1}^r c_1(S^* \otimes L_\alpha) = \prod_{\alpha=1}^r (c_1(L_\alpha) - c_1(S))$$

が従う。$-c_1(S)$ は、チャーン類の定義において使った $\mathbb{P}(E)$ の上のコホモロジー類 $h$ に他ならないので、この式は、$c_i(E)$ が $c_1(L_\alpha)$の$i$次基本対称多項式であることを表している。 □

以上の準備のもとで、ホイットニーの和公式の証明は分裂原理を使えば、ほとんど自明である。実際、$E, F$をそれぞれ直線束の直和 $L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$, $L'_1 \oplus \cdots \oplus L'_s$と仮定してよいので、

$$\begin{aligned} c(E \oplus F) &= c(L_1 \oplus \cdots \oplus L_r \oplus L'_1 \oplus \cdots \oplus L'_s) \\ &= c(L_1) \cdots c(L_r) c(L'_1) \cdots c(L'_r) = c(E)c(F) \end{aligned}$$

となる。

また、最高次のチャーン類がオイラー類に等しいという主張についても、$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$と仮定して、$c_1(L_\alpha) = e(L_\alpha)$に注意して

$$c_r(E) = c_1(L_1) \cdots c_1(L_r) = e(L_1) \cdots e(L_\alpha) = e(E)$$

となる。最後の等号は、オイラー類に関する和公式である。

**1(viii). 旗束のコホモロジー.** §1(iv)においてチャーン類を導入したときに、射影束のコホモロジーの表示式

$$H^*(\mathbb{P}(E)) = H^*(X)[h]/(h^r + c_1(E)h^{r-1} + \cdots + c_r(E))$$

を与えた。ここで、$S$をトートロジカル直線束として $h = -c_1(S)$ であった。定義から $S$ は、$E$ (の$\mathbb{P}(E)$への引き戻しの)部分ベクトル束である。商ベクトル束を $Q$ で表そう。ホイットニーの和公式から $c(S)c(Q) = c(E)$ が成り立つ。

**補題 1.6.** 射影束のコホモロジーの表示式

$$H^*(\mathbb{P}(E)) = H^*(X)[c_1(S), c_1(Q), \ldots, c_{r-1}(Q)]/(c(S)c(Q) = c(E))$$

が成立する。

**証明.** 実際、$c(S)c(Q) = c(E)$から、$c(Q) = c(S)^{-1}c(E) = (1-c_1(S)+c_1(S)^2+\ldots)c(E)$であるから、$c_1(Q)$, …, $c_{r-1}(Q)$ を消去することができる。さらに、$c_r(Q) = 0$となるのは、$c_r(E) - c_1(S)c_{r-1}(E) + \cdots + (-c_1(S))^r = 0$ が必要十分であり、これは $c_1(S) = -h$ として、上の関係式 $h^r + c_1(E)h^{r-1} + \cdots + c_r(E) = 0$に他ならない。またこのとき $c_{r+1}(Q) = c_{r+2}(Q) = \cdots = 0$ も成り立っている。したがって、上の表示式は、もともとのものと同型である。 □

次に $\mathcal{F}(E)$ を$E$に付随する旗束として、$S_i$, $L_i$ を§1(vi)のように取る。

**定理 1.7.** 旗束のコホモロジーの表示式

$$H^*(\mathcal{F}(E)) = H^*(X)[c_1(L_1), \ldots, c_1(L_r)]/(\prod_{i=1}^{r} c(L_i) = c(E))$$

が成立する。

**証明.** §1(vi)で構成した射影束の列に補題 1.6を適用する。二番目の $\mathbb{P}(E/S_1)$ については

$$\begin{aligned}
H^*(\mathbb{P}(E/S_1)) &= H^*(\mathbb{P}(E))[c_1(L_2), c(E/S_2)]/(c(L_2)c(E/S_2) = c(E/S_1)) \\
&= H^*(X)[c_1(L_1), c(E/S_1), c_1(L_2), c(E/S_2)]/ \\
&\qquad (c_1(L_1)c(E/S_1) = c(E), c_1(L_2)c(E/S_2) = c(E/S_1)) \\
&= H^*(X)[c_1(L_1), c_1(L_2), c(E/S_2)]/(c(L_1)c(L_2)c(E/S_2) = c(E))
\end{aligned}$$

が成り立つ。以下、帰納的に同じ議論を繰り返すと

$$\begin{aligned}
H^*(\mathcal{F}(E)) = H^*(X)[c_1(L_1), c_1(L_2), \ldots, c_1(L_{r-1}), c(E/S_{r-1})]/ \\
(c(L_1)c(L_2)\cdots c(L_{r-1})c(E/S_{r-1}) = c(E))
\end{aligned}$$

を得る。$E/S_{r-1}$ は、$L_r$ に他ならないので、結論を得る。 □

**問題 1.8.** $E \to X$ を階数 $r$ の複素ベクトル束とし、$0 < k < r$ に対して各ファイバー $E_x$ の$k$次元部分空間の全体のなすグラスマン多様体を考え、それをまとめて構成される**グラスマン束** $\pi\colon G_k(E) \to X$ を定める。 $G_k(E)$の各点ごとに、その点自身が定める $E_x$ の部分空間を考えることで $G_k(E)$ 上の階数 $k$ のベクトル束が定義される。これをトートロジカル部分束といい、$S$で表す。これは、$E$の$G_k(E)$への引き戻し $\pi^*(E)$ の部分ベクトル束であり、対応する商束 $\pi^*(E)/S$ をトートロジカル商束といい、$Q$ であらわす。階数は $r-k$である。このとき、グラスマン束のコホモロジーは、

$$H^*(X)[c_1(S), \ldots, c_k(S), c_1(Q), \ldots, c_{r-k}(Q)]/(c(S)c(Q) = c(E))$$

と表示されることを証明せよ。

**注 1.9.** 射影束、旗束、グラスマン束のコホモロジーを計算したが、同変コホモロジーを導入すると、上の結果は射影空間、旗多様体、グラスマン多様体の同変コホモロジーを計算したものと解釈することができる。逆に、同変コホモロジーが分類空間を定義されることに注意すると、射影空間、旗多様体、グラスマン多様体の同変コホモロジーから、射影束、旗多様体、グラスマン束のコホモロジーが'誘導'されることも分かる。(この本では、分類空間には立ち入らないので、[**?**, p.297から]を参照せよ。)