ヒント. $G_k(E)$ のトートロジカル部分束 S に付随した旗束 $\mathcal{F}(S)$、さらにトートロジカル商束 Q の $\mathcal{F}(S)$ への引き戻し (再び Q で表す) に付随した旗束 $\mathcal{F}(Q)$ を考えれば、$\mathcal{F}(Q)$ は E に付随した旗束 $\mathcal{F}(E)$ に他ならない:

$$\mathcal{F}(E) \cong \mathcal{F}(Q) \to \mathcal{F}(S) \to G_k(E).$$

この構成に定理 1.8を適用せよ。

注 1.10. 射影束、旗束、グラスマン束のコホモロジーを計算したが、同変コホモロジーを導入すると、上の結果は射影空間、旗多様体、グラスマン多様体の同変コホモロジーを計算したものと解釈することができる。逆に、同変コホモロジーが分類空間を定義されることに注意すると、射影空間、旗多様体、グラスマン多様体の同変コホモロジーから、射影束、旗多様体、グラスマン束のコホモロジーが'誘導'されることも分かる。(この本では、分類空間には立ち入らないので、[**BT82**, p.297から]を参照せよ。)

2. ボットの留数公式

この節では、ボットの留数公式の主張を述べ、その使用例をいくつか見る。留数公式の証明は、同変コホモロジーの準備をおこなったあとで、定理 4.3で与えることにする。

2(i). 主張. Xを偶数次元 $2d$ の向きづけられたコンパクトな多様体で、S^1の作用を持つものとして、その固定点集合 X^{S^1}は有限集合であるとする。このとき、各固定点 $x \in X^{S^1}$に対してT_xXはS^1の線形表現になる。そのウェイトを $m_1, \cdots, m_d$ とする。ここで、ウェイト m_i は整数であり、T_xX のウェイトが $m_1, \ldots, m_d$ であるとは、$t = \exp(i\theta) \in S^1$ は T_xX の線形変換として、基底を適当に取って

$$\begin{pmatrix} \cos m_1\theta & -\sin m_1\theta & & & \\ \sin m_1\theta & \cos m_1\theta & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos m_d\theta & -\sin m_d\theta \\ & & & \sin m_d\theta & \cos m_d\theta \end{pmatrix}$$

と作用しているとする。一般に、$(T_xX)^{S^1}$ は固定点集合 X^{S^1} の接空間を与えるが、仮定から $T_x(X^{S^1}) = 0$ であり、したがって m_i は 0 にならないことに注意しよう。

このとき、同変オイラー類を天下り的に

$$e^{S^1}(T_xX) = m_1 \cdots m_d$$

とおく。

次にEをX上の階数 r の複素ベクトル束として、XへのS^1の作用はEへの作用に持ち上がっていて、ファイバー間の写像 $E_x \to E_{xg}$ は線形であると仮定する。(このようなとき E は**同変ベクトル束**であるという。) 固定点 x のファイバー E_x のS^1の表現としてのウェイトを$n_1, \cdots, n_r$とする。すなわち、$t \in S^1$ の E_x への作用の固有値は、$t^{n_1}, \ldots, t^{n_r}$ であるとする。

このとき、E_xの同変チャーン類をやはり天下り的に

$$c_k^{S^1}(E_x) = e_k(n_1, \cdots, n_r)$$

とおく。ただし e_k は k 次基本対称多項式である。

二つのものを一見異なる形で定義したが、X が複素多様体として、S^1 作用が複素構造を保っているときには、上のような行列で書けるということは、固有値

が$t^{m_1},\ldots,t^{m_d}$ であることに他ならず、オイラー類を最高次チャーン類とみなして、同じ定義である。

また、対称多項式とチャーン類の間に関係があることは、すでに補題 1.6において見ていたので、この天下り的な定義も読者にはそれほど不自然には見えないと思うが、あとで同変コホモロジーを導入すると、この関係式は同変チャーン類に関する和公式から従うことが分かる。

定理 2.1. 以上の設定のもとで $P=P(c_1,\ldots,c_r)$ を r 変数多項式としたときに

$$\int_X P(c_1(E),\cdots,c_r(E))=\sum_{x\in X^{S^1}}\frac{P(c_1^{S_1}(E_x),\cdots,c_r^{S^1}(E_x))}{e^{S^1}(T_xX)}$$

が、 $\deg P\le d$のときに成立する。ただし、ここで P の次数は c_i の次数が i であるとして定義する。

ここで、仮定 $\deg P\le d$ は、左辺のコホモロジーの次数が多様体の次元 $2d$ 以下である、ということを意味する。多様体上でコホモロジー類を積分するとき、その次数が多様体の次元と一致していなければ 0 であるので、もしも、$\deg P<d$ であれば、左辺は 0 でなければならない。一方、右辺が 0 になる理由はなく、実際、右辺は和をとる前の各項は一般に 0 にならない。そういう意味で、$\deg P<d$ のときもこの式は自明でない主張を与えている。

また、$\deg P>d$ の場合には、この式はそのままでは成立しない。実際、次の例で計算するとおり、左辺は常に 0 になるのに対して、右辺は必ずしも 0 にはならない。この問題点は、同変コホモロジーを導入して、左辺は同変コホモロジーの意味での積分であると解釈し直すことにより解決される。

$\deg P=d$ のときは、左辺は E への S^1作用の持ち上げのとり方によらずに決まっているものである。一方、たとえば E に自明な直線束$\underline{\mathbb{C}}=X\times\mathbb{C}$に0でないウェイトの作用を与えたものをテンソル積した $E\otimes\underline{\mathbb{C}}$ も持ち上げになっていることから分かるように、右辺は持ち上げの取り方に依存する可能性がある。実際、$\deg P>d$ の場合は依存している例が簡単に作れる。

式の簡潔さのために、一つの同変ベクトル束 E のチャーン類の場合を考えたが、複数の同変ベクトル束 $E_1,E_2,$ があって、それらのチャーン類の多項式の場合でも同様に成立する。また、向き付けられた同変実ベクトル束のオイラー類を考えてもよい。

特に、$E=T_X$ と取り、オイラー類 $e(T_X)$ の積分を考えると、右辺は分母分子がキャンセルして 1 になる。したがって、

$$\int_X e(T_X)=\#X^{S^1}$$

となる。左辺は、Xのオイラー数であり、オイラー数は固定点の個数に等しいという、レフシェッツの固定点公式([**BT82**, p.122〜]参照)になる。

2(ii). 射影空間の場合. 定理 2.1の留数公式の適用例として、射影空間の場合を考えてみよう。

複素射影空間$\mathbb{C}P^{n-1}$へのS^1作用を$S^1\ni t\mapsto \operatorname{diag}(t^{m_1},\cdots,t^{m_n})\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ が誘導する作用とする。m_iは互いに相異なるものとする。すると固定点は同次座標で$[1:0:\cdots:0]$, $[0:1:0:\cdots:0]$, $\ldots$, $[0:\cdots:0:1]$ のn個である。 i番目（$1\le i\le n-1$）の座標が1で、他の座標が0である点をp_iとする。接空間のEuler類 $e(T_{p_i}\mathbb{C}P^{n-1})$ は、

$$\prod_{j:j\ne i}(m_j-m_i)$$

である。実際、$\mathbb{C}P^{n-1}$の同次座標を$[z_1 : \cdots : z_n]$としたとき、p_iにおける非同次座標が$(z_1/z_i, \ldots, \widehat{z_i/z_i}, \ldots, z_{n-1}/z_i)$ で表されることから、ただちに従う。$\mathbb{C}P^{n-1}$は複素多様体なので、前節の説明したように複素多様体としての接空間を取り固有値を考えたことに注意しよう。

複素射影空間上のトートロジカル直線束 S は、複素射影空間の点を $\mathbb{C}^n$ の一次元部分空間 ℓ とみなしたときに、ℓ におけるファイバー S_ℓ が L 自身で与えられる複素直線束であったことを思い出そう。トートロジカル直線束 SにS^1作用は持ち上がり、p_iにおけるファイバーのウェイトはm_iである。

S の双対束 S^* は、同次座標の線形結合が切断を与え、そのポアンカレ双対は、その線形結合が消える点のなす一次元次元の下がった複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n-1}$である。$c_1(S^*) = -c_1(S)$ であること、上の切断をn個、一般に取って交叉を考えると一点になることを注意すると、

$$\int_{\mathbb{C}P^{n-1}} (-c_1(S))^{n-1} = 1$$

が分かる。これを、ボットの公式で書くと、

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(-m_i)^{n-1}}{\prod_{j\neq i}(m_j - m_i)} = 1$$

である。この式が成り立つことは、ボットの留数定理を使わなくてもいろいろな初等的な方法でチェックすることができる。

一つのチェックの仕方として、複素関数論における留数定理を使うものを紹介しよう。上の式を一般化した

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(-m_i)^{N}}{\prod_{j\neq i}(m_j - m_i)} = (-1)^{N-n+1} h_{N-n+1}(m_1, \ldots, m_n) \tag{2.2}$$

が成立することがチェックできる。ただし、$h_{N-n+1}(m_1, \ldots, m_n)$は、$(m_1, \ldots, m_n)$に関する完全対称多項式であり、$N < n-1$のときは右辺は0と約束する。

$x_1, \ldots, x_n$ を変数としたときに、$(1-x_1)^{-1} \ldots (1-x_n)^{-1}$ を$(1-x_\alpha)^{-1} = 1 + x_\alpha + x_\alpha^2 + \cdots$ を使って展開して、変数について i 次の項をまとめたものが i 次完全対称多項式であった。特に、基本対称多項式 $e_1, e_2, \ldots$との間に$h_i - e_1 h_{i-1} + e_2 h_{i-2} + \cdots + (-1)^i e_i = 0$ という関係が成り立つ。これは、完全対称多項式の母関数 $1 + h_1 + h_2 + \ldots$ と符号を順に入れ替えた基本対称多項式の母関数 $1 - e_1 + e_2 + \ldots$ の積が、 $(1 + h_1 + h_2 + \ldots)(1 - e_1 + e_2 + \ldots) = (1-x_1)^{-1} \ldots (1-x_n)^{-1}(1-x_1)\ldots(1-x_n) = 1$ となることの帰結である。

(2.2)の証明. 射影直線上で定義された有理型微分形式$\frac{z^N}{\prod_{j=1}^n (z+m_j)} dz$ を考える。$z = -m_i$ における留数は、左辺の各項 $\frac{(-m_i)^N}{\prod_{j\neq i}(m_j - m_i)}$ に等しい。一方、$z = \infty$における留数は、$w = 1/z$ とおいて $\frac{1}{\prod_{j=1}^n (1+m_j w)} = 1 + h_1(-m)w + h_2(-m)w^2 + \ldots$ に注意すると、$-h_{N-n+1}(-\vec{m})$ となる。 留数定理から、留数の総和は 0 だから結論を得る。 □

左辺の意味は、同変ホモロジーの導入まで待つ必要があるが、上の結果を記録しておこう。

命題 2.3. P を $c_1(S)$ に関する多項式とすると

$$\int_{\mathbb{C}P^{n-1}} P(-c_1(S)) = \oint \frac{P(z)}{\prod_{j=1}^n (z+m_j)} dz$$

が成り立つ。ただし、右辺の積分路は $-m_j$ をすべて内部に含む円板の周を取る。

次に、射影束においてファイバーに沿った積分を考えると、右辺の線積分が自然に現れることを見ておこう。

X は向き付けられたC^∞級多様体で、ポアンカレ双対定理が成り立っているものとし、$E \to X$ を階数nのC^∞級複素ベクトル束、$\pi\colon \mathbb{P}(E) \to X$を$E$に付随した射影束とする。$\mathbb{P}(E)$も向きのついた多様体で、ポアンカレ双対定理が成り立っている。このとき、ホモロジー群の押し出し写像 $\pi_*\colon H_*(\mathbb{P}(E)) \to H_*(X)$ を、ポアンカレ双対性でコンパクト台のコホモロジーの間の準同型

$$\pi_*\colon H_c^*(\mathbb{P}(E)) \to H_c^{*-2(n-1)}(X)$$

と考える。これは、ファイバーに沿った積分と解釈できる。

命題 2.4. P を h に関する多項式とすると

$$\pi_*(P(h)) = \oint \frac{P(z)dz}{z^n + c_1(E)z^{n-1} + \cdots + c_n(E)}$$

が成り立つ。

命題2.3と比べてみると、$c_i(E)$ を $\vec{m}$ のi次基本対称多項式と同定すれば、同じ式であることが分かる。

厳密には、右辺の線積分の中にチャーン類 $c_1(E), \ldots, c_n(E)$ が含まれているので、積分の意味を考える必要がある。一つには、$c_i(E)$ を変数と見て積分を実行し、最後に得られた計算結果は $c_i(E)$ に関しては多項式になるので、再びコホモロジーの元とみなす。下の証明では、そう解釈している。あるいは、$c_i(E)$ は $H^*(X)$上のべき零作用素であることに注意して、$(z^n+c_1(E)z^{n-1}+\cdots+c_n(E))^{-1}$ を $z^{-n}+\cdots$ と展開し、$c_i(E)$ を分子に持っていってから、$H^*(X)$に値をもつ被積分関数を積分していると考えてもよい。いずれにせよ、式の簡潔さに比べて解釈はきれいでないので、あまりこだわらないほうがよい。

同変コホモロジーが導入して 命題 2.3 を同変コホモロジーの意味での積分として解釈すると、定義から射影束のファイバーに沿った積分になる。すると、命題 2.4が適用できる状況になり、同じ式が現れるのは当然のことになる。その立場では、射影空間の場合のボットの留数定理は、

$$\text{固定点} \longleftrightarrow \text{積分路を境界とする領域の中にある極}$$

という対応があり、極における留数を固定点における同変コホモロジー類で与えている、と解釈することができる。このような積分の線積分による表示がどのような空間に対して可能なのか、一般的な条件は知られていないが、多くの空間でそのようなことが可能であることが知られている。(*** 特に、ミラー対称性のcontextの中で現れたりする。その立場では、線積分が射影空間のミラーになる。あとで振り返る ***)

命題 2.4の証明. 射影束のコホモロジーの表示式 $H^*(\mathbb{P}(E)) = H^*(X)[h]/(h^n + c_1(E)h^{n-1} + \cdots + c_n(E))$ において、π_*は h^{n-1} の係数を取り出すもので与えられる。そこで、$P(h)$の行き先を考えると、答えは $P(h)$を$h^n+c_1(E)h^{n-1}+\cdots+c_n(E)$で割った余りの h^{n-1}の係数である。そうなると幾何を忘れて整式の問題と思ってよいので、h を変数 zに置き換えて $c_1(E), \ldots, c_n(E)$ をパラメータと考えると、右辺を得る。 □

2(iii). 旗多様体の場合. 次に旗多様体の場合を考えてみる。$V = \mathbb{C}^n$ へは、前節と同様に $\mathrm{diag}(t^{m_1}, \dots, t^{m_n})$ で作用するとし、$\mathcal{F}(V)$ に誘導される作用を考える。 Vの標準基底を $e_1, \dots, e_n$ とする。それぞれ S^1 作用の固有ベクトルであり、固有値は $t^{m_1}, \dots, t^{m_n}$ である。$m_1, \dots, m_n$ は互いに相異なると仮定する。

次は明らかである。

補題 2.5. S^1作用の固定点集合 $\mathcal{F}(V)^{S^1}$ は、n次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元 w と一対一に対応し、標準基底で張られる部分空間の列

$$0 \subset S_1 = \langle e_{w(1)} \rangle \subset S_2 = \langle e_{w(1)}, e_{w(2)} \rangle \subset \cdots \subset S_{n-1} = \langle e_{w(1)}, \dots, e_{w(n-1)} \rangle \subset V$$

で与えられる。

以下、$w \in \mathfrak{S}_n$ を $\mathcal{F}(V)$ の点とみなすことにする。

次にすべきことは、接空間 $T_w\mathcal{F}(V)$ を求めることである。射影空間の場合は非同次座標を取って計算したが、トートロジカル直線束を S、商束をQとすると、接束は $\mathrm{Hom}(S, Q)$ と同型になることを注意しよう。 (例えば、§3のように商空間として射影空間を実現すれば、これは明らかである。) 旗多様体は、§1(vi)で見たように射影束の列で書けるので、その接束は

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}(L_1, V/L_1) \oplus \mathrm{Hom}(L_2, V/S_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}(L_{n-1}, V/S_{n-1}) \\ &\quad \cong \bigoplus_{i<j} \mathrm{Hom}(L_i, L_j)\end{aligned}$$

となる。固定点 w 上で、L_i のウェイトは $m_{w(i)}$ である。したがって、接空間の同変オイラー類は

$$\prod_{i<j}(m_{w(j)} - m_{w(i)}) = \operatorname{sgn} w \prod_{i<j}(m_j - m_i)$$

である。ここで $\operatorname{sgn} w$ は w の符号である。

$d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ として、ボットの留数定理で

$$\int_{\mathcal{F}(V)} (-c_1(L_1))^{d_1} (-c_1(L_2))^{d_2} \cdots (-c_1(L_n))^{d_n} \tag{2.6}$$

を計算してみよう。$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ として一般性を失わない。

ボットの留数定理の右辺は、

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \frac{(-m_{w(1)})^{d_1} (-m_{w(2)})^{d_2} \cdots (-m_{w(n)})^{d_n}}{\operatorname{sgn} w \prod_{i<j}(m_j - m_i)} = \frac{\det\left((-m_j)^{d_i}\right)}{\det\left((-m_j)^{n-i}\right)} \tag{2.7}$$

となる。ただし、分母の行列式の計算は、ヴァンデルモンドの行列式で差積に等しいことを用いた。以下、$-m_j$ は変数であるとみなして計算を続ける。分子は、m_j についての交代式であるから、差積で割り切ることができ、商は対称多項式である。また、d_i の中に等しいものがある場合は、分子は0になってしまうので、そうならないためには $d_1 > d_2 > \cdots > d_n$ でなければならない。そこで、$\lambda_i = d_i - (n-i)$ と置き直す。 ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ となる。) また、$\mathcal{F}(V)$ の複素次元は $n(n-1)/2$ であり、積分したあとの次数は $2(d_1 + \cdots + d_n)$ から $n(n-1)$ を引かなければならないので、 $2(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ になっていることにも注意しよう。

非負整数 N に対して、非負整数の単調非減少列 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ で $\sum \lambda_i = N$ となるものを N の**分割**という。$\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = \cdots = 0$ を付け加えて、

列の長さを長くしたものは同一視される。$\lambda_k > 0$ となる最大の k のことを、分割 λ の**長さ**とよぶ。

$(-m_j)$ を変数とすれば、この対称多項式は、分割λに対応する**シューア多項式**とよばれているもので、通常 s_λ と書かれる。まとめると、

定理 2.8. (2.6)の積分は、$(-m_j)$を変数とするシューア多項式の s_λ で与えられる。ここで、$\lambda_i = d_i - (n-i)$ である。

シューア多項式に関してよく知られている性質として、次がある。(たとえば、[**Mac95**, Chap. 1]を参照。)

- $\{s_\lambda \mid \lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$ は、長さが高々 n の分割$\}$ は、n変数対称多項式環の線形空間としての基底である。

また、n変数対称多項式環は、基本対称多項式 $e_1, \ldots, e_n$ を変数と思った多項式環と同型であること

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{C}[e_1, \ldots, e_n]$$

もよく知られている。したがって、$e_1, \ldots, e_n$ の単項式もn変数対称多項式環の線形空間としての基底を与える。

注 2.9. シューア多項式は、表現論のいろいろなところに現れる重要な対称多項式である。特に、(2.7)の左辺は、ワイルの指標公式の形をしており、シューア多項式がGL(n)の既約有限次元表現の指標を与えていることの反映である。また、旗多様体上の積分でシューア多項式が与えられることは、既約表現を幾何学的に実現するボレル・ヴェイユ理論に対応している。ただし、ボレル・ヴェイユ理論では直線束 $L_1, \ldots, L_n$ に自然に入る複素構造を用いて、テンソル積の正則切断の空間を考える必要があり、ボットの留数定理の代わりに、同変K群におけるアティヤ-ボットによるレフシェッツの公式を使ったほうが、より正確である。

後で使う分割に対応するヤング図形を導入しておこう。分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$ に対して、正方形の箱を第一列にλ_1個、第二列にλ_2個、$\ldots$, と図1のように第n列まで並べてできる図形を**ヤング図形**という。ただし、この描き方は、標準的な[**Mac95**]のものから、時計と反対周りに90度回転しているので、他の文献と比べるときは注意すること。

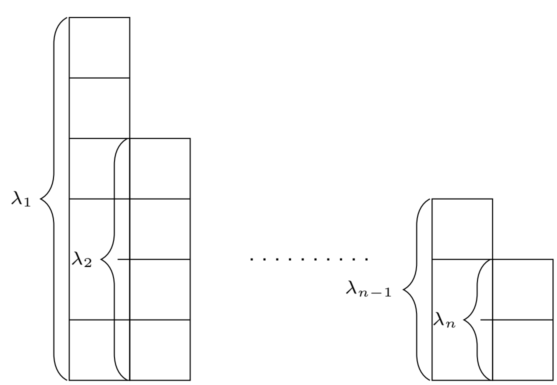

FIGURE 1. ヤング図形

射影空間の場合と同様に、向き付けられた多様体 X 上のベクトル束 $E \to X$ に付随した旗束 $\pi\colon \mathcal{F}(E) \to X$ を考え、ファイバーに沿った積分

$$\pi_*\colon H_c^*(\mathcal{F}(E)) \to H_c^{*-n(n-1)}(X)$$

を計算しよう。

定理 2.10. $z_i = -c_1(L_i)$ として、

$$\pi_*(z_1^{\lambda_1+n-1} z_2^{\lambda_2+n-2} \dots z_n^{\lambda_n}) = \oint \oint \cdots \oint dz_1 dz_2 \cdots dz_n \frac{z_1^{\lambda_1+n-1} z_2^{\lambda_2+n-2} \cdots z_n^{\lambda_n} \prod_{j<i}(z_i - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z_i^n + c_1(E) z_i^{n-1} + \cdots + c_n(E))}$$

が成り立つ。

証明. §1(vi)で構成した射影束の列を用いればよい。命題 2.4を左から順番に適用することによって、次の積分表示を得る。

$$\pi_*(z_1^{\lambda_1+n-1} z_2^{\lambda_2+n-2} \dots z_n^{\lambda_n}) = \oint dz_1 \frac{z_1^{\lambda_1+n-1}}{z_1^n + c_1(E) z^{n-1} + \cdots + c_n(E)}$$
$$\oint dz_2 \frac{z_2^{\lambda_2+n-2}}{z_2^{n-1} + c_1(E/S_1) z_2^{n-2} + \cdots + c_{n-1}(E/S_1)} \cdots \oint dz_n \frac{z_n^{\lambda_n}}{z_n + c_1(E/S_{n-1})}$$

さらに、ホイットニー和公式と $c(S_{i-1}) = \prod_{j=1}^{i-1}(1 - z_j)$ から

$$z_i^{n-i+1} + c_1(E/S_{i-1}) z_i^{n-i} + \cdots + c_{n-i+1}(E/S_{i-1}) = \frac{z_i^n + c_1(E) z_i^{n-1} + \cdots + c_n(E)}{z_i^{i-1} + c_1(S_{i-1}) z_i^{i-2} + \cdots + c_{i-1}(S_{i-1})} = \frac{z_i^n + c_1(E) z_i^{n-1} + \cdots + c_n(E)}{\prod_{j=1}^{i-1}(z_i - z_j)}$$

が成り立つことに注意すれば、定理の主張の右辺の式を得る。 □

射影空間のときと同様に(2.7)を、同変コホモロジーにおける積分と解釈すると、旗束の計算が適用できる状況になる。すると、$c_1(E), \dots, c_n(E)$ を変数 $x_j = -m_j$に関する基本対称多項式と見直し、分母を

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (z_i - x_j)$$

と置き換えると、次のシューア多項式の積分表示が得られる。

$$s_\lambda(x) = \oint \oint \cdots \oint dz_1 dz_2 \cdots dz_n \frac{z_1^{\lambda_1+n-1} z_2^{\lambda_2+n-2} \cdots z_n^{\lambda_n} \prod_{j<i}(z_i - z_j)}{\prod_{i,j=1}^n (z_i - x_j)}.$$

この式は、初等的にシューア多項式に関するコーシー恒等式

$$\sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(z) = \prod_{i,j=1}^n (1 - z_i x_j)^{-1}$$

[Mac95, Chap. 1]から導ける。ここで、和は長さが n 以下の分割に渡る。