2(iv). グラスマン多様体の場合. n次元複素ベクトル空間 $V=\mathbb{C}^n$ 内の k 次元部分空間の全体のなす複素グラスマン多様体$G_k(V)$を考える。上と同様にS^1作用を定めると、固定点集合は$I\subset\{1,\ldots,n\}$ で$|I|=k$となるものと一対一対応する。Iに対応する$G_k(V)$の点をS_Iであらわし、 Vのk次元部分空間と思うことにする。実際、$\mathbb{C}^n$ の標準基底を $e_1,\ldots,e_n$ としたときに、S_I は$\{e_i \mid i\in I\}$ を基底とするような部分空間に他ならない。

このとき$T_{S_I}G_k(V)$のウェイトは

$$m_j-m_i, \qquad j\in I^c, i\in I$$

となる。実際、これは $T_{S_I}G_k(V)$ が $\mathrm{Hom}(S_I,\mathbb{C}^n/S_I)$ と S^1同変に同型であることの帰結である。複素射影空間のときと同様に、トートロジカル部分束 S に S^1作用は持ち上がり、S_Iにおけるウェイトはm_i $(i\in I)$である。一方、トートロジカル商束 QのS_Iにおけるウェイトは、m_j $(j\in I^c)$ である。

上の便宜に合わせるために、$x_i=-m_i$ とおくことにする。

k変数 $x_1,\ldots,x_k$の対称多項式を考えよう。長さが高々 k の分割 $\lambda=(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_k)$ に対応したシューア多項式 s_λ は、§2(iii)で言及したように、対称多項式の空間の基底になっている。また、基本対称多項式 $e_1,\ldots,e_k$ の多項式として、$s_\lambda=P(e_1,\ldots,e_k)$と表すこともできた。そこで、トートロジカル部分束 Sの双対束 S^*に対して、$s_\lambda(S^*)$を $P(c_1(S^*),\ldots,c_k(S^*))$ で定義することにする。分割 λ を長さが k 以下で全て動かせば、S^* のチャーン類の積を、すべて考えることと、基底の取り替えの情報を除き同じである。

積分

$$\int_{G_k(V)} s_\lambda(S^*)$$

を、ボットの留数定理で計算してみよう。

右辺の固定点和は、

$$\sum_I \frac{s_\lambda(x_I)}{\prod_{i\in I, j\in I^c}(x_i-x_j)}$$

である。ただし、$s_\lambda(x_I)$ は、$I=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ としたときに、変数 $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ に関するシューア多項式を表すものとする。

命題 2.12. 上の和は、$s_{\overline{\lambda}}(x_1,\ldots,x_n)$に等しい。ただし、$\overline{\lambda}$ は、 $(\lambda_1+k-n,\lambda_2+k-n,\ldots,\lambda_k+k-n,0,\ldots,0)$で定まる分割であり、$\lambda_k+k-n<0$ のときは $s_{\overline{\lambda}}$ は 0 と解釈する。

ヤング図形でいうと、$\overline{\lambda}$はλの下部から$k\times(n-k)$の長方形の部分を取った残りである。(図2) 取ることができない場合は、$s_{\overline{\lambda}}$は0 である。

証明. 和を計算するために、行列

$$X=\left[\begin{array}{cccc|cccc} x_1^{\lambda_1+k-1} & x_1^{\lambda_2+k-2} & \cdots & x_1^{\lambda_k} & x_1^{n-k-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{\lambda_1+k-1} & x_2^{\lambda_2+k-2} & \cdots & x_2^{\lambda_k} & x_2^{n-k-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{\lambda_1+k-1} & x_n^{\lambda_2+k-2} & \cdots & x_n^{\lambda_k} & x_n^{n-k-1} & \cdots & x_n & 1 \end{array}\right]$$

を考える[1]。シューア多項式の定義により、

$$\det X = s_{\overline{\lambda}}(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i<j}(x_i-x_j)$$

[1] この計算の仕方は、岡田聡一氏に教わった。

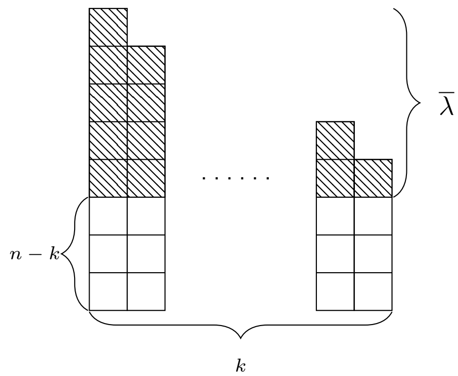

FIGURE 2. λと$\overline{\lambda}$

である。一方、行列式のラプラス展開により

$$\begin{aligned}\det X &= \sum_I (-1)^{\sum_{i\in I} i + \frac{k(k+1)}{2}} \det(x_j^{\lambda_i+r-i})_{\substack{i=1,\dots,k\\ j\in I}} \det(x_j^{n-k-i})_{\substack{i=1,\dots,n-k\\ j\in I^c}}\\ &= \sum_I (-1)^{\sum_{i\in I} i + \frac{k(k+1)}{2}} s_\lambda(x_I) \prod_{\substack{i<j\\ i,j\in I}} (x_i-x_j) \prod_{\substack{k<l\\ k,l\in I^c}} (x_k-x_l)\end{aligned}$$

である。したがって、各 I ごとに

$$\prod_{i<j}(x_i-x_j) = (-1)^{\sum_{i\in I} i + \frac{k(k+1)}{2}} \prod_{\substack{i<j\\ i,j\in I}} (x_i-x_j) \prod_{\substack{i'<j'\\ i',j'\in I^c}} (x_{i'}-x_{j'}) \prod_{\substack{i''\in I\\ j''\in I^c}} (x_{i''}-x_{j''})$$

が成り立つことを示せばよい。両辺が符号を除いて等しいことは明らかである。符号も含めて正しいことを示すには

$$\sum_{i\in I} i + \frac{k(k+1)}{2} \equiv \#\{(i,j)\in I\times I^c \mid i>j\} \bmod 2$$

を確かめればよい。Iの要素が小さい順に $i_1, i_2, \dots, i_k$であるとすると、右辺は $(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k)$ であるから、これは正しい。 □

複素グラスマン多様体 $G_k(\mathbb{C}^n)$ の固定点集合を調べたついでに、シューベルト胞体について説明しておこう。その定義は、線形代数で習った行列の基本変形の応用である。

S を$\mathbb{C}^n$ のk次元部分空間とする。Sの基底を取り、それらを縦ベクトルで表してk個を横に並べることにより、n行k列行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k}\\ a_{21} & \dots & a_{2k}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nk}\end{pmatrix}$$

を得る。Aの階数は k である。また、S の基底を取り替えると、A は右から $k\times k$ 可逆行列を掛けたもの、つまり、A を列に関して基本変形したものに代わる。逆

に、階数 k のn行k列行列 A が与えられると、列が定める k 個のベクトルが張るk次元部分空間が定まり、その部分空間は基本変形しても代わらない。つまり、

$$G_k(\mathbb{C}^n) = \{A \mid A\text{は階数 } k \text{ の}n\text{行}k\text{列行列}\} \Big/ \begin{array}{l}\text{列に関する基本変形が}\\ \text{定める同値関係}\end{array}$$

という全単射が存在する。同値関係による商は、Aに右から$k \times k$正規行列をかけて定まるGL(k)作用で割ることに他ならないので、§3(ii)でみる商空間の例である。あとで見るように、$G_k(\mathbb{C}^n)$ の多様体としての構造は、この記述を使って入れることができる。

行列 A は、上の $k \times k$ 成分の小行列式が 0 でなければ、列に関する基本変形で

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

という形に変形することができ、しかもそれはただ一通りである。(つまりは、上の $k \times k$ のブロック行列の逆行列を右から掛ける、ということである。) この小行列式が0でないという条件は、$G_k(\mathbb{C}^n)$の開集合を定め、この考察はその開集合が成分 $a_{k+1,1}, \dots, a_{k+1,k}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nk}$ を取ることによって、$\mathbb{C}^{k(n-k)}$と全単射を持つことを意味する。これは、$G_k(\mathbb{C}^n)$ のまわりの局所座標系となる。先の記号を用いると、$a_{k+1,1}, \dots, a_{k+1,k}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nk}$が全て0になっているのは、$S_I$ $(I = \{1, 2, \dots, k\})$ であり、その点のまわりの局所座標になっている。

複素グラスマン多様体に他にどのような点があるかを決めるには、上の$k \times k$小行列式が0になるかもしれない、任意の行列 A を列に関する基本変形でどのような標準形に変形することができるか、線形代数で学んだことを思い出せばよい。掃き出し法により、Aの階数がkのとき、列に関する基本変形により、Aは次の階段型の行列に変換され、しかもその標準形はただ一通りである。

$$\begin{array}{r} \\ \\ i_1\text{行目} \rightarrow \\ \\ \\ \\ i_2\text{行目} \rightarrow \\ \\ \vdots \\ \\ i_k\text{行目} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a_{i_1+1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{i_2-1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{i_2+1,1} & a_{i_2+1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_{i_k+1,1} & a_{i_k+1,2} & \dots & \dots & a_{i_k+1,k-1} & a_{i_k+1,k} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

ただし、$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$は固定せず、任意に動かす。 $i_1, \ldots, i_k$ を、k個の元からなる$\{1, \ldots, n\}$ の部分集合Iと同一視し、これを固定して上の標準形の行列の全体を U_I とおくと、U_IはS_I を原点として含む $\sum_{\alpha=1}^{k}(n - a_\alpha - k + \alpha)$ 次元のベクトル空間で、グラスマン多様体は、その非交和である。

$$G_k(\mathbb{C}^n) = \bigsqcup_{I \subset \{1,\ldots,n\}} U_I.$$

また、$a_{i_1+1,1}, \ldots$が入っているところが、ヤング図形をしていることに注意しよう。この対応により、部分集合 $I \subset \{1, \ldots, n\}$ で $\#I = k$ となるものと、分割 λ で対応するヤング図形が $k \times (n-k)$ の長方形の中に入るものの間に一対一対応があることが従う。

1 が表れている i_1行目、…, i_k行目はそのままにしておいて、残りは任意の数が入ってよい部分集合を考えると、U_Iを含むような $\mathbb{C}^{k(n-k)}$ と全単射になっているものが定まる。それは $G_k(\mathbb{C}^n)$ の S_Iの回りの局所座標を与えることも注意しておこう。座標変換がC^∞級 (あるいはより強く双正則)であることを確かめて、$G_k(\mathbb{C}^n)$にC^∞級多様体(あるいは複素多様体)の構造を入れてもよい。

U_Iは、**シューベルト胞体**とよばれている。その閉包 $\overline{U_I}$ は、**シューベルト多様体**とよばれており、一般には特異点を持つ。数え上げ幾何の基本的な対象である。興味を持った読者は、[**Ful97, Ful98**] などを読むとよいであろう。

問題 2.13. 古典型の旗多様体、グラスマン多様体について、トーラス作用の固定点、接空間のウェイトの決定、コホモロジーの計算、等を、今までと同様の考察を行え。

3. リー群の多様体への作用

Gをリー群とし、Xは Gの右作用をもつ C^∞級多様体とする。以下、作用についてよく知られていることをまとめておく。(＊＊＊を参照。)

3(i). スライス定理.

作用を与えるC^∞級写像

$$X \times G \ni (x, g) \mapsto (x, xg) \in X \times X \tag{3.1}$$

を考える。この節では、固有な作用、すなわち上の写像が固有である作用を考える。(写像が固有であるとは、コンパクト集合の逆像がコンパクトであるという定義であったことを思い出そう。)

このとき、xを止めて $G \ni g \mapsto xg \in X$ を考えても固有写像であるから、その像、すなわちx を通る軌道は閉である。また、商空間 X/G がハウスドルフであることも容易に示すことができる。

G がコンパクト・リー群のときには、作用は自動的に固有になる。この仮定は、あとで使うときに強すぎるので、Gは非コンパクトな場合も考える。$G = \mathbb{C}^\times$, $X = \mathbb{C}$ として、掛け算の定める自然な作用を考えると、固有にはならず、以下に述べる様々な結果が成立しないことを注意するとよいだろう。

$x \in X$ に対して、**固定部分群** $G_x = \{g \in G \mid xg = x\}$ と、xを通る G-軌道 $O(x)$ を考える。作用の固定性の仮定から G_x はコンパクトである。このとき $O(x)$ は埋め込まれた部分多様体であり、$G_x \backslash G \ni G_x g \mapsto xg \in O(x)$ は、微分同相写像である。$O(x)$ の x における接空間 $T_x O(x)$ は、G、G_x のリー環 $\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}_x$ を用いて、$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x$ と書けるが、これは x において $\mathfrak{g}$ の元 ξ の生成する接ベクトル $\xi_x^* \in T_x X$ の全体でもある。商空間 $T_x X / T_x O(x)$ を N_x とする。Gの作用から、N_x は G_x の表現空間の構造を持つ。U を $0 \in N_x$ の G_x 不変な十分小さな近傍とする。

定理 3.2 (スライス定理)**.** U を十分に小さく取れば、$U \times_{G_x} G$ と、軌道 $O(x)$ の近傍の間に G-同変な C^∞級微分同相写像が存在する。

略証. G_x はコンパクトなので、T_xX にG_x 不変な内積を入れて、商空間 N_x を $T_xO(x)$ の直交補空間と同一視することができる。さらに、T_xXの0の近傍と、Xのxの近傍の間に G_x 同変な微分同相写像 Φ を取り、それと N_x との交わりとして U を取り、作用を使って写像 $U \times_{G_x} G \to X$ を定義すれば、$[0,e]$ 上では微分が同型になるので、局所微分同相写像である。ここで、$U \times G$ の元 (u,g) に対応する、$U \times_{G_x} G$の元を $[u,g]$ で表した。

あとは、この写像が単射であることをチェックすれば良い。そうでないとすると、Uにおいて 0 に収束する列 u_n, u'_n と G の列 g_n, g'_n で、$[u_n,g_n] \neq [u'_n,g'_n]$ かつ $\Phi(u_n)g_n = \Phi(u'_n)g'_n$ となるものがある。このとき、$\Phi(u_n)g_n(g'_n)^{-1} = \Phi(u'_n)$ となり、作用の固有性から $g_n(g'_n)^{-1}$ は、収束していると仮定してよく、その収束先は G_x の元である。g_nにG_x の元を掛けてもよいので、$g_n(g'_n)^{-1}$ は G の単位元に収束するとしてもよい。ところが、そうすると Φ が局所微分同相であったことから、$u_n = u'_n$, $g_n = g'_n$ となり、初めの仮定に反する。 □

3(ii). 商多様体. スライス定理の応用を与えよう。

定理 3.3. リー群 G の C^∞級多様体 X の作用について、次の二つの条件が成立していると仮定する。

(1) 作用は固有である。
(2) 作用は自由である。すなわち、固定部分群 G_x はすべての $x \in X$ について単位元のみからなる。

このとき $M = X/G$ は、自然な射影 $\pi\colon X \to M$ が C^∞級沈み込み写像であるような C^∞級多様体の構造を持つ。M のmにおける接空間 T_mM は、$x \in \pi^{-1}(m)$ を取ると、$T_xX/T_xO(x)$ に同型である。ここで、$O(x)$はxを通るG軌道である。また、このときXは M 上の C^∞級 G-主束の構造を持つ。

証明. $M = X/G$ がハウスドルフ空間になることはすでに注意した。

$G \times U$ と軌道 $O(x)$ の近傍の間に G同変微分同相写像があるので、U が $M = X/G$の座標となるように、C^∞級多様体の構造を入れることができる。X が M の上の G-主束とみなせることも容易に示される。 □

Gがコンパクトなリー群であるときは、(1) は自動的に成り立つので、作用が自由であることを仮定すれば十分である。

また、

$$\Gamma = \{(x, xg) \in X \times X \mid x \in X, g \in G\}$$

とおくと、(3.1)の像に他ならないが、(2) からそれは $X \times G$ と全単射になり、(1)から同相でもある。さらに写像(3.1)の微分を考えれば、Γ は $X \times X$ の埋め込まれた部分多様体である。

例としてグラスマン多様体を考えよう。$S = \mathbb{C}^k$, $V = \mathbb{C}^n$ として、次のように定める。

- $X = \{x\colon S \to V \mid x\text{は単射である}\}$
- $G = \mathrm{GL}(S)$
- G の X への作用を $(x,g) \mapsto xg$ で定める。

このとき (3.1)の像は、$\{(x_1,x_2) \in X \times X \mid x_1$ と x_2 の像は等しい$\}$ となる。(2) 作用は自由であることは、x が単射であることから直ちに従う。(1) の固有性についても容易である：§2(iv)で考えた、上の $k \times k$ ブロックが可逆な開集合上か

ら、x_1, x_2 を取ると、gはx_1の$k \times k$ブロックの逆行列と、x_2の$k \times k$ブロックの積で与えられるので、この開集合上では逆写像は連続である。他の$k \times k$ブロックが可逆な開集合でも、議論は同じである。

旗多様体の場合も、グラスマン多様体とほぼ同様である。$S_1 = \mathbb{C}$, $S_2 = \mathbb{C}^2$, $\ldots$, $S_{n-1} = \mathbb{C}^{n-1}$, $S_n = \mathbb{C}^n$として、

- $X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \mid x_i \colon S_i \to S_{i+1}$ は単射な線形写像である$\}$
- $G = \prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{GL}(S_i)$
- G の Xへの作用は $(x_1, \ldots, x_{n-1}, g_1, \ldots, g_{n-1}) \mapsto (x_1 g_1, \ldots, x_{n-1} g_{n-1})$ で定める。

とすればよい。

Gの表現 $\chi \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ が与えられたとき、**χに付随したX上のベクトル束** $E = X \times_{G,\chi} V$ を $X \times V$ を、

$$(x, v) \sim (xg^{-1}, \chi(g)v) \quad (x, v) \in X \times V, g \in G$$

が定める同値関係で割った商空間として定める。 χ が文脈から明らかな場合は、単に $X \times_G V$ で表す。各ファイバーのベクトル空間としての構造は、Vのベクトル空間としての構造から誘導されるものとして定めると、自然な射影 $\pi \colon E \to X$ $((x, v)G \mapsto xG)$ のもとで、ベクトル束になることを確かめることができる。

例として、グラスマン多様体を上のように商空間として実現したとき、χ: $\mathrm{GL}(S) \to \mathrm{GL}(S)$ を恒等写像として定めると、付随したベクトル束は、トートロジカル部分束の双対束になる。実際、写像

$$X \times_{G,\chi} S \ni (x, s)G \mapsto xs \in V$$

は、well-definedな写像になり、x を止めると、像は x 自身の定めるVの部分ベクトル束である。

一方、グラスマン多様体を

- $X = \{x \in \mathrm{Hom}(V, Q) \mid x$は全射である$\}$
- $G = \mathrm{GL}(Q)$
- G の X への作用は、$(x, g) \mapsto g^{-1}x$ で与える

とすると、χ: $\mathrm{GL}(Q) \to \mathrm{GL}(Q)$ を恒等写像として、 $X \times_{G,\chi} Q$ は、トートロジカル商束となる。

3(iii). 軌道型. $x \in X$ のG軌道 $O(x)$ は $G_x \backslash G$ であった。G_x の共役類を x の**軌道型**という。

**** 詳細はあとで書く予定 ****

4. 同変（コ）ホモロジー

4(i). 定義. S^1-主束の分類空間を天下りで、$S^{2N-1} \to \mathbb{C}P^{N-1}$の直極限として定義する。$N$を止めたものを、$E_N \to B_N$として、分類空間の有限次元近似という。($N$ の具体的な値は重要でないので、Nでなくても、無限に発散する列ならば、なんでもよい。）前の節の条件を満たす作用の例になっており、$S^{2N-1} \to \mathbb{C}P^{N-1}$ は S^1主束であることも注意しておこう。

(a) B_NはC^∞多様体で、 E_Nはその上のS^1-主束である。
(b) $0 \neq n$に比べてNが十分に大きいとき、 $H^n(E_N) = 0$ となる。

という性質がある。(b)は、E_N は、$2N-1$次元球面だからである。

トーラス $T = (S^1)^r$の場合には、この $E_N \to B_N$ の r個の直積を $ET_N \to BT_N$ と定める。

XをTの(左)作用を持つ位相空間とする。幾何学的表現論では、ワイルドな位相空間は扱わないので、X は T の有限次元表現の空間に閉集合として、T同変に埋め込めると仮定する。たとえば、T作用をもつコンパクトなC^∞級微分可能多様体は、そのような埋め込みを持つ。(＊＊＊) 各 n に対して Nを十分に大きく取り、

$$H_T^n(X) = H^n(ET_N \times_T X)$$
$$H_n^T(X) = H_{n+\dim BT_N}(ET_N \times_T X)$$

とおく。**同変コホモロジー**と**同変ホモロジー**という。右辺は、異なる Nに対して同型写像があり、well-definedな定義になっていることをあとで示す。同変コホモロジーについては、$n < 0$ のときは 0 であるが、ホモロジーについてはそうとは限らない。

また、T作用を持つ空間対 (X, Y) に対しても、相対同変コホモロジーを同様にして

$$H_T^n(X, Y) = H^n(ET_N \times_T X, ET_N \times_T Y)$$

として定義する。相対同変ホモロジーも同様に定義できるが、この本では使わない。(＊＊＊予定である。)

$ET_N \to ET_N/T = BT_N$ は、T-主束であるから、ファイバー束

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & ET_N \times_T X \\ & & \big\downarrow \\ & & BT_N \end{array} \tag{4.1}$$

があり、同変(コ)ホモロジーは、このファイバー束の全空間の(コ)ホモロジー群であることに注意しよう。その解析には、ファイバー束に付随したスペクトル系列 ([**BT82**, Th. 14.18])が重要な役割を果たす。

もう片一方の成分への射影は

$$\begin{array}{c} ET_N \times_T X \\ \big\downarrow \\ X/T \end{array} \tag{4.2}$$

である。像の商空間 X/T は、T軌道の全体のなす空間である。点 $x \in X$ の固定部分群 $T_x = \{t \in T \mid tx = x\}$ を考えると、x を通る軌道 $O(x)$ はT/T_x と同相である。したがって上の写像の $O(x)$ の逆像は$ET_N \times_T (T/T_x) = ET_N/T_x$ となる。特に、これは x に応じて変わるので、こちらの射影は一般にはファイバー束ではない。しかし、これは T-作用に関する情報が、こちらの射影に含まれていることを意味している、と捉えることもできる。

また、この本では、ホモロジー群はもっぱらボレル・ムーア・ホモロジーを使うことになるので、上もそうであるが、ボレル・ムーア・ホモロジー群の説明は、＊＊まで待つ必要がある。とりあえず、現時点では、Xは向きのついたC^∞多様体としておき、$ET_N \times_T X$も向きのついた多様体なので、ポアンカレ双対定理を適用して、$H_n^T(X)$ を $H_T^{\dim X - n}(X)$と定義する、と考えておく。積分によって $H_c^n(ET \times_T X)$ の双対空間であるので、その意味でホモロジー群である、と理解していれば、十分である。ここで、添字の c は、コンパクト台のコホモロジーを表す。Xがコンパクトなときには、特異ホモロジー群であるとしてもよいが、コンパクトとは限らないときは、局所有限なチェインから作られるホモロジー群になる。(*** 参照)