$H^0_T(X)$ の1 を $H^T_{\dim X}(X)$の元と思ったものを、T**-同変基本類**といい、$[X]$ で表す。$ET_N \times_T X$ の基本類として定義されるものであるが、T同変ではない普通の基本類とは、紛れのおそれがないと考え、同じ記号で表す。このとき、ポアンカレ双対定理は、

$$H^n_T(X) \cong H^T_{\dim X - n}(X); \qquad \alpha \mapsto \alpha \cap [X]$$

という同型で与えられる、ということになる。

カップ積により $H^*_T(X)$ は、次数付き可換な環であり、$H^T_*(X)$はその加群である。T同変写像 $f\colon X \to Y$ があったとき、引き戻し写像 $H^*_T(Y) \to H^*_T(X)$ が定義される。ホモロジーの場合は、X, Yは共にコンパクトであると仮定して、$f_*\colon H^T_*(X) \to H^T_*(Y)$ が定義される。（あとで説明するようにボレル・ムーア・ホモロジーにおいては、一般の連続写像については、押し出し準同型が定義されないことに注意する必要がある。ただし、fが固有なときには $f_*\colon H^T_*(X) \to H^T_*(Y)$ が定義される。）特に、$Y = \mathrm{pt}$ として取ると、$H^*_T(\mathrm{pt}) \to H^*_T(X)$ という環準同型が与えられる。また$H^T_*(X)$は、$H^*_T(\mathrm{pt})$-加群である。さらに、Xがコンパクトであれば、$X \to \mathrm{pt}$が固有になるので、$H^T_*(X) \to H^T_*(\mathrm{pt})$が定義される。

ここで、pt は一点だけからなる集合で、Tは自明に作用するものである。どんなT作用を持つ位相空間 X に対しても、T同変写像 $X \to \mathrm{pt}$ が全ての X の点を一点に送る写像として定義される。あとですぐに見るように、一点も自明でない同変コホモロジーを持ち、$H^*_T(X)$ の $H^*_T(\mathrm{pt})$-加群の構造を理解することが大切になるので、一点だけからなる空間も大切な空間である。そのためにこの記号を用意した。

補題 4.3. $H^n_T(X), H^T_n(X)$ の定義の右辺の(コ)ホモロジーは、異なる N の間に標準的な同型写像がある。より一般に、T主束 $E \to B$ で、$H^k(E)$ が $0 < k \leq n+1$, $\dim X - n + 1$ で消えているものについて、標準的な同型写像がある。

証明. $E \to B$、$E' \to B'$ を、上の性質を持つ二つの T 主束とする。このとき

$$E \times_T X \leftarrow (E \times E') \times_T X$$

を考える。ただし、$E \times E'$ に T は対角的に作用するものとし、写像は $E \times E'$ から第一成分への射影の誘導するものとする。このとき、両方の写像はともにファイバー束で、ファイバーは E' である。ファイバー束に付随したスペクトル系列を考えるとき、$H^k(E') = 0$ $(0 < k \leq n+1)$を満たせば、$H^n((E \times E') \times_T X)$を計算する部分については、底空間のコホモロジーである $H^n(E \times_T X)$ しか寄与しないことが従う。したがって、上の写像がコホモロジーに導く引き戻し写像は、次数 n で同型である。$H^n(E' \times_T X)$ についても同じ議論を行えば、二つの記述の間の標準的な同型写像を得る。

同変ホモロジーの場合は、ポアンカレ双対性によりコホモロジーに移せばよい。$H^T_n(X) \cong H^{\dim X - n}_T(X)$ だから、次数についての評価は $\dim X - n + 1$に置き換える。 □

最初の例として、$X = \mathrm{pt}$のときを考えてみよう。

$$H^*_T(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_r], \qquad H^T_*(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_r] \cap [\mathrm{pt}]$$

$(r = \dim T)$となる。ただし、$\deg x_i = 2$ であり, $[\mathrm{pt}]$はptのT-同変基本類である。これは$T = \mathbb{C}^\times$ のときに $ET_N = S^{2N-1}$、$BT_N = \mathbb{C}P^{N-1}$ であるので $H^*(\mathbb{C}P^{N-1}) = \mathbb{C}[x]/(x^N)$ において、補題 4.3において N に対する x と N' に対する x が移り合っていることをチェックすればよい。これは、x を第一チャ

ーン類とする直線束がどのようにファイバー束で引き戻されるかを考えれば明らかである。

以後、この例は基本的な役割を果たすので、変数 $x_1, \ldots, x_r$の意味をはっきりさせておこう。上の構成から x_i は$(\mathbb{C}P^{N-1})^r$の第i成分の射影空間のトートロジカル直線束の双対の第一チャーン類である。双対を考えるのは不自然なので、射影空間は $V = \mathbb{C}^N$の1次元の商ベクトル空間の全体とし、x_i はトートロジカル商束の第一チャーン類と定めることにする。代数幾何の習慣に従い、この直線束を**超平面直線束**とよぶ。

より一般に、次のように定義をする。

定義 4.4. E が X 上のT同変複素ベクトル束であるとき、$ET \times_T E$ は $ET_N \times_T X$上のベクトル束である。そこで、**同変チャーン類**を $c_k(ET \times_T E)$として定義する。

特に $X = \mathrm{pt}$ のとき、T同変直線束として、Tの指標 χ から定まる BT_N上の直線束 L_χ を取り、$c_1(L_\chi) \in H^2_T(\mathrm{pt})$が定まる。さらに、$\chi_1, \chi_2 \colon T \to \mathbb{C}^\times$ を共に指標として、$\chi_1\chi_2$ をその積の指標とすると $c_1(L_{\chi_1\chi_2}) = c_1(L_{\chi_1}) + c_1(L_{\chi_2})$ が成り立つ。これは、(1.5)の帰結である。したがって、Tの指標の全体のなす可換群(これは$\mathbb{Z}^r$である) から $H^2_T(\mathrm{pt})$ への準同型が得られ、前者を複素数をテンソル積したもので取り替えれば同型になる。指標 χ の微分 $d\chi$ をTのリー環 $\mathrm{Lie}\,T$ 上の一次関数と考えることにより、

$$(\mathrm{Lie}\,T)^* \xrightarrow{\cong} H^2_T(\mathrm{pt}); d\chi \mapsto c_1(L_\chi)$$

と同型が得られる。(右辺は複素ベクトル空間であるから、$\mathrm{Lie}\,T$は通常のリー環の複素化を考えている。これは、Tの複素化 $(\mathbb{C}^\times)^r$のリー環である。あと***で、複素化に関する同変コホモロジーも導入する。) 高次のコホモロジーについては、$H^2_T(\mathrm{pt})$ のカップ積で得られるから、結局、環の同型

$$\mathbb{C}[\mathrm{Lie}\,T] \cong H^*_T(\mathrm{pt}) \tag{4.5}$$

が従う。ここで、$\mathbb{C}[\mathrm{Lie}\,T]$ は、$\mathrm{Lie}\,T$上の多項式関数の全体のなす可換環である。

ボットの定理の証明の際には、$H^*_T(X)$、 $H^T_*(X)$ を $H^*_T(\mathrm{pt})$-加群とみたときに、上の対応によってに $\mathrm{Lie}\,T$ 上の準連接層と考えることが、重要になる。この点が、普通のコホモロジーには現れなかった、同変コホモロジー群の新しい特徴である。

$T' \subset T$ が部分トーラスの場合、$H^*_T(X) \to H^*_{T'}(X)$, $H^T_*(X) \to H^{T'}_*(X)$ という制限写像が定義される。これは、T について $ET_N \to BT_N$ を取ったときに、補題 4.3における条件が E についてであることに注意して、T'-主束として $ET_N \to ET_N/T'$ を取ることができるで、自然な射影 $ET_N \times_{T'} X \to ET_N \times_T X$ に関する引き戻し写像を考えればよい。

特に、$H^*_T(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{C}[\mathrm{Lie}\,T]$ の元では、この制限写像は、関数の制限 $\mathbb{C}[\mathrm{Lie}\,T] \to \mathbb{C}[\mathrm{Lie}\,T']$ に他ならない。

例 4.6. $(n-1)$次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n-1}$ を考える。同次座標 $[z_1 : \cdots : z_n]$ において $[t_1 z_1 : \cdots : t_n z_n]$ $(t_i \in S^1)$ により、$T = (S^1)^n$ が作用する。同変コホモロジー $H^*_T(\mathbb{C}P^{n-1})$ を考えよう。$BT_N = (\mathbb{C}P^{N-1})^n$ の上に第i成分の超平面束 H_i の BT_N への引き戻し (同じ記号 H_i で表す) を取り、その直和 $E = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ を取ると、Eの射影束$\mathbb{P}(E)$ は $ET_N \times_T \mathbb{C}P^{n-1}$ に他ならない。したがって §1(iv)に

より

$$H^*(ET_N \times_T \mathbb{C}P^{n-1}) = H^*(BT_N)[h]/(h^n + c_1(E)h^{n-1} + \cdots + c_n(E))$$
$$= H^*(BT_N)[h]/(\prod_{i=1}^{n}(h + c_1(H_i)))$$

となる。h は、$\mathbb{P}(E)$ の超平面束の c_1 である。$N \to \infty$の極限を取ることにより、

$$H_T^*(\mathbb{C}P^{n-1}) = \mathbb{C}[h, x_1, \dots, x_n]/(\prod_{i=1}^{n}(h + x_i))$$

を得る。

同様にEに付随した旗束、グラスマン束を考えることにより、$H_T^*(\mathcal{F}(\mathbb{C}^n))$、$H_T^*(G_k(\mathbb{C}^n))$を§1(viii)のコホモロジーの表示式から導くことができる。これが、注 1.10で予告したことである。

4(ii). 固定部分群と同変コホモロジーの台. (4.2)において $ET_N \times_T X$ から X/T への射影を考え、$O(x)$の逆像が $ET_N \times_T (T/T_x) = ET_N/T_x$ となることを見た。この節では、この射影を用いて、固定部分群と同変コホモロジーの間にある関係を考察しよう。

まず、一番極端に、固定部分群がT全体、つまりTの作用が自明なときを考えよう。このとき、$X/T = X$, $ET_N \times_T X = BT_N \times X$ となり、上の写像は第二成分への射影である。そして $H_T^*(X) = H_T^*(\mathrm{pt}) \otimes H^*(X)$となる。特に、$H_T^*(X)$ は、$H_T^*(\mathrm{pt})$の自由加群である。

次に、もう一方の極端な場合、固定部分群が自明なとき、すなわち T の作用が自由なときを考えよう。

命題 4.7. Tの作用が自由で、$X \to X/T$はT主束であるとする。このとき、第二成分への射影が誘導する写像 $\pi\colon ET_N \times_T X \to X/T$ は、同型

$$\pi^*\colon H^*(X/T) \xrightarrow{\cong} H_T^*(X)$$

を誘導する。同変ホモロジーについては、$H_{*-\dim T}(X/T) \cong H_*^T(X)$ となる。

証明. π は、ET_N をファイバーとするファイバー束である。付随するスペクトル系列を考えると、高次のコホモロジーが消えていることから結論を得る。

ホモロジーの場合には、π^* で次数が $\dim ET_N$ ずれるが、もともと定義で $\dim BT_N$ 足していたので、差の $\dim T$ が現れることに注意する。 □

例えば、$X = S^{2N-1}$ で標準的な S^1 の作用を考えると、X/S^1 は $\mathbb{C}P^{N-1}$ であり、$H_{S^1}^*(S^{2N-1}) = H^*(\mathbb{C}P^{N-1}) = \mathbb{C}[x]/(x^N)$ となる。

X が向きのついた C^∞級多様体のときには、定理 3.3により X/Tもそうであったが、このとき $H_{*-\dim T}(X/T) \cong H_*^T(X)$ において、$[X/T]$ は $[X]$ に移される。

次に、この状況で $H_T^*(\mathrm{pt})$-加群がどのようなものかを考えてみよう。

Tの指標 χ に付随した X/T 上の直線束 $X \times_{T,\chi} \mathbb{C}$ の π による引き戻しは、χ に付随した $(ET \times X) \times_{T,\chi} \mathbb{C}$ に他ならない。これは、$L_\chi = ET \times_{T,\chi} \mathbb{C}$ の引き戻しでもあるので、同型 $H^*(X/T) \cong H_T^*(X)$において、$H_T^*(\mathrm{pt}) \ni c_1(L_\chi)$ は、$c_1(X \times_{T,\chi} \mathbb{C})$ に写される。

また、例えば X/T が多様体であるときのように、$H^*(X/T)$ が十分に高い次数で 0 になっているとすると、$H_T^{>0}(\mathrm{pt})$ の任意の元は十分に高いべきをとれば $H_T^*(X)$ に 0 で作用することが従う。したがって $H_T^*(X)$ はねじれ加群である。

次に人工的な仮定であるが、すべての $x \in X$ について、固定部分群が T' であったと仮定してみよう。それは、つまり、X に T/T' が自由に作用していて、それを $T \to T/T'$ によって T の作用と思い直したものである。このとき、

$$H_T^*(X) \cong H^*(X/(T/T')) \otimes H_{T'}^*(\mathrm{pt}) \cong H^*(X/(T/T')) \otimes \mathbb{C}[\operatorname{Lie} T']$$

となる。これは、$T' = T$ のとき（作用が自明なとき）と $T' = \{1\}$ （作用が自由なとき）の中間の場合になっている。特に、$\operatorname{Lie} T'$ に制限して 0 になるような $H_T^*(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[\operatorname{Lie} T]$ の元は、十分に高いべきをとれば 0 で作用することが従う。

この状況は、直感的には、$H_T^*(X)$が $\operatorname{Lie} T'$ の上に乗っていて、その外側では0になっていることを意味している。 より一般的な状況を正確に理解するためには、代数幾何学的な意味を念頭におきつつ可換環論における加群の**台**の概念を使うとよい。使う代数多様体はベクトル空間なので、代数幾何学を持ち出すまでもないが、それでも準連接層と加群の間の対応を念頭においた方が、台の意味がよく分かると思う。

台の概念を簡潔に説明しよう。読者は適宜、可換環の教科書(たとえば＊＊＊)や代数幾何学の入門書(たとえば＊＊＊)で補うとよい。$R = H_T^*(\mathrm{pt})$、$X = \operatorname{Lie} T$ とおく。Rは、Xの上で定義された多項式関数の全体のなす可換環である。複素数体は代数閉であるので、可換環論で学んだように ***、多項式環 $R = \mathbb{C}[X]$の極大イデアルの全体は、X の点と一対一に対応する。このとき、Xの点 x に対応するのは、xで消えるような多項式全体のなす極大イデアル $\mathfrak{m}_x$ である。より一般的に、Rのすべての素イデアルのなす集合 $\operatorname{Spec} R$ を考えた方がよい、というのがグロタンディーク以来の現代的な代数幾何学の定式化である。 $\operatorname{Spec} R$上のザリスキー位相は、I を R のイデアルとしたときに、$V(I) = \{P \in \operatorname{Spec} R \mid I \subset P\}$ を閉集合として定める位相である。 $\operatorname{Spec} R$は、極大イデアルの全体である X に'一般化された意味での'点を付け加えてできる空間である。例えば0だけからなる素イデアル (0) を考えると、これを含む閉集合$V(I)$としては、$V((0)) = \operatorname{Spec} R$ しかない。つまり、一点(0)からなる部分集合の閉包は、$\operatorname{Spec} R$ 全体である。点 (0) は、$\operatorname{Spec} R$ の生成点とよばれる。より一般に、極大イデアルではない素イデアルは、X の既約な代数的集合(irreducible algebraic set)に対応するが、$\operatorname{Spec} R$ の点として、その代数的集合の生成点とよばれる。以下では、Xの代数的集合は、対応する素イデアル I に対する $V(I)$ として、$\operatorname{Spec} R$の閉部分集合であるとも思うことにする。

M を R加群とする。素イデアル P が与えられたとき、$S := R \setminus P$ は積閉集合であり、MのSにおける**局所化** $S^{-1}M$ を$M \times S$ を同値関係

$$(m, s) \sim (m', s') \iff t(s'm - sm') = 0 \text{ を満たす } t \in U \text{ が存在する}$$

として定める。これは、直感的には'分数' $m/s = m'/s'$ を表しているが、同値関係にするためには、単に $s'm = sm'$ としてはうまくいかないことに注意しよう。これは、あとでも効いてくる。 Pによって定まるので、これを M_P と書く。特に、R自身をR加群と考えて、$M = R$と取ると、R_P は自然に環になり、M_P はその加群である。幾何学的には、P が点 x に対応する極大イデアルのとき、R_Pの元は、$f \in R$と、x で消えない多項式 $u \in R$を用いて f/u と書けるようなものであり、x の'周りで定義された多項式関数の芽'である。また、$P = (0)$と取ると、R_P は0以外の任意の多項式を分母に許した f/g の全体であり、これは Rの商体に他ならない。

R加群 M の台を、

$$\operatorname{Supp} M \stackrel{\text{def.}}{=} \{P \in \operatorname{Spec} R \mid M_P \neq 0\}$$

と定義する。 Mが有限生成のとき、台は、Xのザリスキー閉集合である。
局所化が完全列を保つことに注意して、

補題 4.8. $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ がR加群の完全列であれば、

$$\operatorname{Supp} M = \operatorname{Supp} M' \cup \operatorname{Supp} M''$$

である。

上の同変コホモロジーの例に戻ると、すべての $x \in X$ について、固定部分群が $T' \subset T$ である状況では、$\operatorname{Supp} H_T^*(X) = \operatorname{Lie} T'$ となっていることが分かる。($H^*(X/(T/T'))$ は 0 ではないことに注意。) 実際、$\operatorname{Lie}(T')$ 上で消えている多項式 f は、何乗かすれば $H_T^*(X)$ に0 で働くので、fを含まない素イデアル P における局所化 $H_T^*(X)_P$ (あるいは、f を含む積閉集合における局所化)は0になる。