4(iii). 定理 2.1の証明. 同変コホモロジーを用いて、ボットの留数公式を Atiyah-Bott [**AB84**]、 Berline-Vergne [**BV82, BV83**]に従い、定式化しなおす。

定理 4.9. Xは向きの付けられたコンパクトなT-多様体で、固定点 X^Tが有限集合であるものとする。$\alpha \in H_T^*(X)$に対して、

$$\int_X \alpha = \sum_{x \in X^T} \frac{\alpha|_x}{e(T_x X)}$$

が成り立つ。

両辺の意味をはっきりさせておこう。左辺の積分は、ポアンカレ双対定理を用いて $p_*\colon H^T_{\dim X - *}(X) \to H^T_{\dim X - *}(\mathrm{pt})$ を同変コホモロジーの間の写像$H_T^*(X) \to H_T^{*-\dim X}(\mathrm{pt})$と思ったものである。したがって、左辺は $H_T^{*-\dim X}(\mathrm{pt})$ に属する。一方、右辺で、まず $T_x X$ は x における Xの接空間を T の表現空間と思ったもので、$e(T_x X)$ はその同変オイラー類 $\in H_T^{\dim X}(\mathrm{pt})$ である。さらに、和を取る前の各項 $\frac{\alpha|_x}{e(T_x X)}$ は、$H_T^*(\{x\}) \otimes_{H_T^*(\mathrm{pt})} \operatorname{Frac} H_T^*(\mathrm{pt})$ の元と思っている。これを自明な射影 $\{x\} \to \mathrm{pt}$ の押し出し写像によって送って、$\operatorname{Frac} H_T^*(\mathrm{pt})$ の元と思って足し上げたものが、右辺である。ここで、$\operatorname{Frac} H_T^*(\mathrm{pt})$ は、可換環 $H_T^*(\mathrm{pt})$ の商体であり、0だけからなるイデアル (0) における局所化と考えている。したがって、この等式は厳密には、左辺を $H_T^{*-\dim X}(\mathrm{pt}) \to \operatorname{Frac} H_T^{*-\dim X}(\mathrm{pt})$ によって送った像と右辺が等しいということを意味している。

これが今まで予告してきた、同変コホモロジーによる定理 2.1の定式化であり、$H_T^*(\mathrm{pt})$ は単に $\mathbb{C}$ でなく、高い次数でも自明でないので、$\deg P \le d$ の仮定が外せるようになったものである。

この定理を[**AB84**]に従い、位相幾何的に証明する。証明のキーとなるのは、次の命題である。この命題自身も後で使われる大切なものである。

命題 4.10. Xは、コンパクトなT-多様体とする。包含写像 $i\colon X^T \to X$が誘導する引き戻し写像 $i^*\colon H_T^*(X) \to H_T^*(X^T)$ を考える。 $\operatorname{Ker} i^*$、 $\operatorname{Cok} i^*$を $H_T^*(\mathrm{pt})$ 加群と思ったとき、その台は固定点以外の点の固定部分群のリー環の和

$$\bigcup_{y \in X \setminus X^T} \operatorname{Lie} T_y$$

の中に含まれている。

より一般的に、Xが多様体でなくても、有限次元の表現空間 V にT同変に埋め込められると仮定して、チェックコホモロジーを使えば、同じ結論が成り立つ。

ここで、$\operatorname{Lie} T_y \subset \operatorname{Lie} T$ は、既約代数的集合として、先に約束したように $\operatorname{Spec} R$の閉集合と考えている。

定理 4.9において、生成点 (0) における局所化まで行く必要はなく、上の命題に現れる $\bigcup_{y \in X \setminus X^T} \operatorname{Lie} T_y$に入らない点で局所化すれば十分である。

Xが多様体のとき、固定点 $x \in X^T$の近傍で定理 3.2を用いれば分かるように、xの近傍 V においては、$\bigcup_{y \in U \setminus U^T} \operatorname{Lie} T_y$ は、 $T_x X$ に現れるウェイトが0になるような超平面の和である。より一般に、固定点とは限らない $x \in X$ において、$O(x)$の近傍 $U \times_{T_x} T$ における固定部分群のリー環は、N_xのT_xに関するウェイトが0になる$\operatorname{Lie} T_x$内の超平面の和を$\operatorname{Lie} T$の部分空間と思ったものである。このことから、Xがコンパクトであれば、命題 4.10に現れる固定部分群のリー環は有限通りであることが従う。有限次元表現空間 V に埋め込まれるときには、Vの球

面にこの議論を用いることにより、同じように、$\operatorname{Ker} i^*$, $\operatorname{Coker} i^*$ の台は、有限個の超平面の和に含まれる。

系 4.11. 命題 4.10の状況のもとで、Pを命題 4.10の台に含まれていない素イデアル(例えば、(0))とすると、Pにおける局所化の間に誘導される引き戻し写像

$$i^*\colon H_T^*(X)_P \to H_T^*(X^T)_P$$

は同型写像である。

命題 4.10の証明. 相対コホモロジーの完全系列により、$H_T^*(X, X^T)$ の台が固定部分群のリー環の和に含まれていることを示せばよい。

$y \in X \setminus X^T$ とすると、定理 3.2により、yの軌道 $O(y)$ の近傍 V であって $U \times_{T_y} T$ とT同変微分同相なものが存在する。特に、写像 $V \to \mathrm{pt}$ は、$V \to T_x\backslash T$ を経由する。これは、T同変なので、$H_T^*(V)$ への $H_T^*(\mathrm{pt})$-の作用は、$H_T^*(T_x\backslash T) \cong H_{T_x}^*(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[\operatorname{Lie} T_y]$ を経る。特に、台は $\operatorname{Lie} T_y$ に含まれる。Vの中にT不変な部分集合 V' があるとき、V'の同変コホモロジー $H_T^*(V')$や、相対同変コホモロジー $H_T^*(V, V')$ についても、同様に台は $\operatorname{Lie} T_y$ に含まれる。 X^Tが空集合の場合には、Xを有限個のこのような近傍で覆い、マイヤー・ヴィートリス完全系列を用いることで、$H_T^*(X)$ の台が固定部分群のリー環の和の中にあることが従う。

X^Tが空集合ではないときは、 X^Tは部分多様体であり、そのT同変な近傍 W で X^T を変位レトラクトとして含むものが存在する。このとき $H_T^*(X, X^T)$ は $H_T^*(X, W)$ と同型である。このとき、$y \in X \setminus W$ に対して上で考えた U を取ると $H_T^*(U, U \cap W)$ の台は $\operatorname{Lie} T_y$ に含まれる。このような U の有限個 U_1, $\ldots$, U_N で $X \setminus W \subset U_1 \cup \cdots \cup U_N$ と被覆する。切除定理から、$H_T^*(X, W) \cong H_T^*(U_1 \cup \cdots \cup U_N, (U_1 \cup \cdots \cup U_N) \cap W)$ であり、またマイヤー・ヴィートリス完全系列と補題 4.8により、右辺の台は固定部分群のリー環の和の中に含まれている。

Xが多様体の場合には、これで証明は完了した。一般のXの場合には、チェック・コホモロジーの連続性により、X^Tを含むT不変な近傍 W についての極限が

$$\varinjlim H_T^*(X, W) = H^*(X, X^T)$$

となることに注意して（＊＊＊参照)、上の議論を行えばよい。 $\square$

次に、Xは再び多様体と仮定し、固定点 $x \in X^T$ に対して、包含写像 $i_x\colon \{x\} \to X$ を考える。引き戻し写像、押し出し写像

$$i_x^*\colon H_T^*(X) \to H_T^*(\{x\}), \qquad i_{x*}\colon H_T^*(\{x\}) \to H_T^{*+\dim X}(X)$$

が定義される。i_{x*} は、ポアンカレ双対定理を用いて定義されるものである。これは、次のように計算できる。接空間 T_xX を一点 x上のベクトル束と考え、射影を $\pi\colon T_xX \to \{x\}$、トム類を $\vartheta(T_xX)$で表す。このとき、定理 1.1の証明により $H_T^*(\{x\}) \to H_T^{*+\dim X}(T_xX, (T_xX)^0)$ が $\alpha \mapsto \pi^*\alpha \wedge \vartheta(T_xX)$ で与えられ、T_xX の原点のT不変な近傍を x の X におけるT不変な近傍 U と、T同変な微分同相で同一視したとき、i_{x*} は、

$$\begin{aligned} H_T^*(\{x\}) \to H_T^{*+\dim X}(T_xX, (T_xX)^0) &\cong H_T^{*+\dim X}(U, U \setminus \{x\}) \\ &\cong H_T^{*+\dim X}(X, X \setminus \{x\}) \to H_T^{*+\dim X}(X) \end{aligned}$$

の合成である。ただし、真ん中二つの同型は切除定理である。したがって、次の補題が従う。

補題 4.12. $i_x^* i_{x*}\colon H_T^*(\{x\}) \to H_T^{*+\dim X}(\{x\})$ は、T_xX の同変オイラー類 $e(T_xX)$ を掛ける写像である。

定理 4.9の証明. X^T は有限集合であると仮定しているので、T_xX のウェイトには 0 になるものはなく、$e(T_xX)$ は $H_T^*(\mathrm{pt})$ の0でない元であり、特に $i_x^* i_{x*}$ は局所化 $\otimes \mathrm{Frac}(H_T^*(\mathrm{pt}))$ すれば、同型写像になる。

$i^* = \bigoplus i_x^*\colon H_T^*(X) \to H_T^*(X^T) = \bigoplus_{x\in X^T} H_T^*(\{x\})$ と、$x \neq y$ のときに $i_y^* i_{x*} = 0$ であることに注意すれば、

$$i_* = \sum i_{x*}\colon H_*^T(X^T) = \bigoplus_{x\in X^T} H_T^*(\{x\}) \to H_T^{*+\dim X}(X)$$

も局所化 $\otimes \mathrm{Frac}(H_T^*(\mathrm{pt}))$ すれば、同型写像になり、逆写像は $\sum_{x\in X^T} \frac{1}{e(T_xX)} i_x^*$ である。

$p\colon X \to \mathrm{pt}$ の X^T への制限を p^T とおくと、関手性より $p_* i_* = p_*^T$ であり、p_*^T は、有限個の点から一点への押し出し写像なので、$\sum_{x\in X^T}$ に他ならない。したがって、

$$\int_X \alpha = p_*(\alpha) = p_* i_* i_*^{-1}(\alpha) = \sum_{x\in X^T} \frac{1}{e(T_xX)} i_x^*(\alpha)$$

となる。これは定理の主張に他ならない。 □

以上の証明は、X^Tが有限集合ではないときにも一般化できる。このときは、X^T は有限個の部分多様体 X_a の和である。X_a の X における法束を N_a とおくと、その同変オイラー類 $e(N_a)$ を掛ける作用素 $H_T^*(X_a) \to H_T^{*+\operatorname{codim} X_a}(X_a)$ は、局所化$\otimes \mathrm{Frac}(H_T^*(\mathrm{pt}))$ すれば、同型写像になる。これは、次のようにしてチェックできる。TはX_aに自明に作用するので、$H_T^*(X_a) = H^*(X_a) \otimes H_T^*(\mathrm{pt})$とあらわされる。$x \in X_a$ として、$N_{a,x}$ をxにおける N_a のファイバーをTの表現と見たものとして、その同変オイラー類を $e(N_{a,x}) \in H^{\operatorname{codim} X_a}(\mathrm{pt})$ とおくと、$e(N_a)$ は $1 \otimes e(N_{a,x}) + \cdots$ と表され、$\cdots$ の部分は、$H^*(X_a)$ の次数が0でないところに入るので、べき零元である。したがって、$N_{a,x}$ は 0をウェイトとして含まないので、$e(N_{a,x})$ は局所化においては可逆元である。 $e(N_a)$のかけ算の逆写像を $1/e(N_a)$ で表すと、

$$\int_X \alpha = \sum_a \int_{X_a} \frac{1}{e(N_a)} i_a^*(\alpha)$$

が成立する。ここで、i_a は X_a の包含写像である。

また、幾何学的表現論への応用においては、X が必ずしもコンパクトではないが、X^T がコンパクトな場合にも考えることがある。例えば、$X = \mathbb{C}$ に S^1 が掛け算で作用することを考えよう。固定点は原点のみであり、X^{S^1} はコンパクトである。定理 2.1を形式的に考えると、$H_{S^1}^*(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[x]$ として、

$$\int_{\mathbb{C}} 1 = \frac{1}{x}$$

を得る。これは今までとは異なり、積分の結果は $H_{S^1}^*(\mathrm{pt})$ には属さず、その商体の元となっている。これは言うまでもなく、積分 $\int_{\mathbb{C}}\colon H_T^*(\mathbb{C}) \to H_T^*(\mathrm{pt})$ が well-defined でないことの反映である。

∗∗∗で扱う(?) Nekrasovの分配関数は、このように非コンパクトだが、固定点がコンパクトな空間の上の積分で定義される有理関数である。次の例は、[**NY05**] に現れたもので、Nekrasov分配関数の性質を調べるときに用いたアイデアを簡単な場合に述べたものである。

例 4.13. $f\colon \widehat{\mathbb{C}^2} \to \mathbb{C}^2$ を原点でのブローアップとし、二次元のトーラス T が標準的に作用しているとする。すなわち、

$$\widehat{\mathbb{C}^2} = \left\{((x,y),[z:w]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \mid xw = yz\right\}$$

で、$f((x,y),[z:w]) = (x,y)$であり、Tの作用は $((x,y),[z:w]) \mapsto ((t_1x,t_2y)),[t_1z:t_2w])$ である。 T 固定点は、$\mathbb{C}^2$ では原点のみで、その同変オイラー類はx_1x_2である。一方、$\widehat{\mathbb{C}^2}$ では二点 $((0,0),[1:0])$, $((0,0),[0:1])$ からなり、同変オイラー類はそれぞれ $\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$, $\varepsilon_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$ である。ここで、Nekrasov分配関数の記号に合わせて $H_T^*(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ と、同変コホモロジーの生成元を ε_1, ε_2 と書いた。このとき

$$\int_{\widehat{\mathbb{C}^2}} 1 = \int_{\mathbb{C}^2} 1$$

が成り立つ。両辺を具体的に計算すれば、

$$\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2} = \frac{1}{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)} + \frac{1}{\varepsilon_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}$$

と確かめることができるが、計算をしなくても次のように証明することができる。まず、積分の関手性から

$$\int_{\widehat{\mathbb{C}^2}} 1 = \int_{\mathbb{C}^2} f_*(1)$$

である。(なぜ、関手性が成り立つのか、上の証明に立ち返って確かめよ。) f は固有であるから、$f_*\colon H_T^*(\widehat{\mathbb{C}^2}) \to H_T^*(\mathbb{C}^2)$ が定義される。さらに、fは、原点の逆像を除けば微分同相であり、$f_*(1)$ は 1 である。(ホモロジーで言えば $f_*[\widehat{\mathbb{C}^2}] = [\mathbb{C}^2]$) したがって、上の式を得る。

4(iv). 非可換群に関する同変コホモロジー. 同変コホモロジーを非可換群の場合に拡張しておこう。ただし、その構造の解析は、ユニタリー群のみを扱うことにする。

$n < N$ とし、 全射線形写像 $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^n$ の全体を**シュティーフェル多様体**とよぶ。複素数上で考えていることを明らかにしたいときは、複素シュティーフェル多様体とよぶ。$S(n,N)$ には、ユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$ が$\mathbb{C}^n$ への自然な作用を通じて作用する。このとき、$\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^n$は全射であるから、$\mathrm{U}(n)$の $S(n,N)$ への作用は自由である。 $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^n$の転置行列 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^N$ は、$\mathbb{C}^n$の$\mathbb{C}^N$への単射である。これは、n-枠、$(e_1,\dots,e_n) \in (\mathbb{C}^N)^n$で一次独立なもの、の全体のなす空間である。こちらをシュティーフェル多様体の定義とすることも多い。$\mathrm{GL}(N)$の作用を考えると、等質空間

$$\mathrm{GL}(N) \Big/ \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ * & \mathrm{GL}(N-n) \end{bmatrix}$$

と書くことができる。

以下で、$S^1 \curvearrowright S^{2N-1}$ の代わりに $\mathrm{U}(n) \curvearrowright S(n,N)$ を用いて、$\mathrm{U}(n)$-同変コホモロジーを定義する。$n=1$ のときに、$S(n,N) = \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ であるから S^{2N-1} とは一見異なるが、$\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ は S^{2N-1} を変位レトラクトとして含み、かつそれは S^1 の作用について同変に作ることができるから、同変コホモロジーを定義する上では、$\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ でも S^{2N-1} でも違いはない。また、同変ホモロジー群を定義するときには、ポアンカレ双対定理を適用するときに、コンパクトな台を持つコホモロジーの双対空間である、という注意が、Xがコンパクトなときでも、必要である。

命題 4.14. $* = 1 \sim 2(N-n)$に対して、$H^*(S(n,N)) = 0$ である。

証明は、演習問題とする。

トーラスの同変コホモロジー群の定義のときと同様に、この性質と$S(n,N)$への$\mathrm{U}(n)$の作用が自由であることと合わせて、$\mathrm{U}(n)$の作用をもつ位相空間 X に対して $H^*(S(n,N)\times_{\mathrm{U}(n)} X)$ によって、$H^*_{\mathrm{U}(n)}(X)$ を定義することができる。正確には、まずコホモロジーの次数を止めて、N を十分に大きく取って、このコホモロジーを考え、それが N によらないことを示す、というトーラスのときと同じやり方である。

より一般のコンパクト・リー群Gに対しては、Gは十分大きな $\mathrm{U}(n)$ に閉部分群として埋め込むことができることが知られているので (＊＊＊)、$S(n,N)$ への$\mathrm{U}(n)$作用をGに制限して、$H^*(S(n,N)\times_G X)$として $H^*_G(X)$ を定義すればよい。

また、$S(n,N)$ には $\mathrm{GL}(n)$ が作用していて、§3(ii)でみたように、それは自由かつ固有で、商空間はグラスマン多様体 $G_{N-n}(\mathbb{C}^n)$ であった。$S(n,N)\to G_{N-n}(\mathbb{C}^n)$ は $\mathrm{GL}(n)$-主束なので、$\mathrm{GL}(n)$ が作用する位相空間 X の $\mathrm{GL}(n)$-同変コホモロジーを $H^*(S(n,N)\times_{\mathrm{GL}(n)} X)$ として定義できる。したがって、G が $\mathrm{GL}(n)$ の閉部分群の場合にも同じ手法で定義をすることができる。あとで説明するように、$\mathrm{GL}(n)/\mathrm{U}(n)$ は可縮なので、$S(n,N)\times_{\mathrm{U}(n)} X \to S(n,N)\times_{\mathrm{GL}(n)} X$ を考えると、自然に$H^*_{\mathrm{U}(n)}(X)\cong H^*_{\mathrm{GL}(n)}(X)$ と同型になる。幾何学的表現論では、後者の同変コホモロジーを使うことのほうが多い。

$H^*_G(X)$は、$X\to \mathrm{pt}$に関する引き戻し写像により$H^*_G(\mathrm{pt})$ 上の次数付き可換な環であることなど、トーラスの場合と同様の基本的な性質が成立する。

たとえば X への G の作用が自由であり、$X\to X/G$が G主束であると、命題4.7と同様に

$$H^*_G(X)\cong H^*(X/G)$$

となる。

また、G'がGの閉部分群で、XがG'の作用を持つ位相空間であるとすると、$G\times_{G'} X$ は Gの作用を持つ位相空間である。このとき $EG\times_G (G\times_{G'} X) = EG\times_{G'} X$ であるから

$$H^*_G(G\times_{G'} X)\cong H^*_{G'}(X) \tag{4.15}$$

が成り立つ。同変コホモロジーの**誘導**とよぶ。特に $X=\mathrm{pt}$ と取って

$$H^*_G(G/G')\cong H^*_{G'}(\mathrm{pt})$$

を得る。

また、トーラスのときと同様に**制限準同型** $H^*_G(X)\to H^*_{G'}(X)$ が、$S(n,N)\times_{G'} X\to S(n,N)\times_G X$による引き戻し写像として定義される。

この章の終わりに、$G=\mathrm{U}(n)$ の場合に、$H^*_{\mathrm{U}(n)}(X)$ と $H^*_T(X)$ の関係を調べてみよう。

まずは、予告した $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{U}(n)$ が可縮であることの証明を与えておこう。n次エルミート行列の全体を $\mathrm{Herm}(n)$、その中で正値なものの全体を $\mathrm{Herm}_+(n)$ とおく。よく知られているように、指数写像 $\exp$ は $\mathrm{Herm}(n)$ から$\mathrm{Herm}_+(n)$へのC^∞級微分同相写像を与える。これを用いて、

$$\mathrm{U}(n)\times\mathrm{Herm}(n)\to\mathrm{GL}(n)$$

を、$(u,X)\mapsto u\exp(X)$ で定義すると、C^∞級微分同相写像写像になる。実際、逆写像は $g\mapsto (u,X) = (g\exp(-X), \frac{1}{2}\exp^{-1}(g^*g))$ で与えられる。 $\mathrm{Herm}(n)$ はベク

トル空間であるから可縮であり、 これで $\mathrm{GL}(n)/\mathrm{U}(n)$が可縮であることが示された。また、同時に$\mathrm{GL}(n)$ が $\mathrm{U}(n)$ を変位レトラクトに持つことも分かった。