$\mathrm{U}(n)$の中の対角行列の全体はn次元のトーラス T になる。(これ以上大きなトーラスには含まれないので、**極大トーラス**とよばれる。一般のコンパクト・リー群の構造を調べる際に、極大トーラスが重要な役割を果たす。＊＊＊などを参照。) このとき、制限準同型 $H^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{pt}) \to H^*_T(\mathrm{pt})$ があり、右辺は $\mathbb{C}[\mathrm{Lie}\, T]$ であった。

次に、$N(T)$ を T の G 内における正規化群とする。これは、各行、各列にひとつだけ0でない成分があるようなユニタリ行列である。$N(T)/T$が$\mathfrak{S}_n$ となり、$N(T)/T = \mathfrak{S}_n$のTへの作用は、対角成分の入れ替えである。この作用は、$\mathrm{Lie}\, T$への作用も誘導する。

定理 4.16. $H^*_G(X) \cong H^*_T(X)^{\mathfrak{S}_n}$ が成り立つ。ただし、$\mathfrak{S}_n$の作用は、$N(T)$のXへの作用を通じて定まる。

特に、$H^*_G(\mathrm{pt}) = H^*_T(\mathrm{pt})^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{C}[\mathrm{Lie}\, T]^{\mathfrak{S}_n}$ である。

証明. $G/N(T) = (G/T)/\mathfrak{S}_n$であることに注意し、有限群による商のコホモロジーについての結果([**BT82**]のExercise 6.46参照)から

$$H^*(G/N(T)) = H^*(G/T)^{\mathfrak{S}_n}$$

が成り立つことに注意しよう。

一方で、G/Tは旗多様体であって、定理 1.10より

$$H^*(G/T) \cong \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]/\mathbb{C}_+[z_1, \dots, z_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

が成り立つ。ここで、$\mathbb{C}_+[z_1, \dots, z_n]^{\mathfrak{S}_n}$ は定数でない、対称多項式の全体が生成するイデアルである。ただし、§2(iii)における便宜に従い、z_iは、$-c_1(L_i) = -c_1(S_i/S_{i-1})$ である。さらに $N(T)$の G/T の作用は、L_iを入れ替えるので、$H^*(G/T)$の上の記述では、z_iの入れ替えである。したがって、$H^*(G/T)^{\mathfrak{S}_n}$ は $* = 0$でのみ $\mathbb{C}$で、あとは0となる。つまり、$G/N(T)$のコホモロジーは、一点のコホモロジーと同じである。

次に G作用を持つ位相空間を取り、$X \times_{N(T)} S(n,N) \to X \times_G S(n,N)$を考える。これはファイバー束で、ファイバーは$G/N(T)$であることから、ファイバー束に付随したスペクトル系列について、上の注意を用いると、$H^*_G(X) \cong H^*(X \times_{N(T)} S(n,N))$が従う。

さらに、$(X \times_T S(n,N))/\mathfrak{S}_n = X \times_{N(T)} S(n,N)$であることから、有限群による商であることに注意して上と同様に

$$H^*(X \times_{N(T)} S(n,N)) \cong H^*(X \times_T S(n,N))^{\mathfrak{S}_n}$$

と主張が従う。 □

問題 4.17. $H^*(G(N-n, \mathbb{C}^N))$ の $N \to \infty$ の極限を考えて、上の最後の主張

$$H^*_G(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

をチェックせよ。

4(v). 同変K理論について. この本では、コホモロジーはすでに学習していることを前提にして、その上に同変コホモロジーを導入した。幾何学的表現論においては、同変コホモロジーだけでなく、同変K理論が使われることも多い。同変K理論は準備が必要になるので、詳細を説明するのは諦め、ボットの留数定理の、K理論における類似である、レフシェッツの不動点定理を紹介して、コホモロジーとK理論の類似を説明しよう。

X はコンパクトな複素多様体(射影多様体と仮定してもよい)で、複素トーラス T が正則変換として作用しているものとする。さらに、固定点 X^Tは有限個の点であるとする。$E \to X$ を X 上の正則ベクトル束で、Tの作用は E に正則変換として持ち上がっているとする。つまり、EはT同変正則ベクトル束である。

このとき、ボットの留数定理の右辺にあたるものは

$$\sum_{x \in X^T} \frac{\operatorname{ch} E_x}{\operatorname{ch} \bigwedge_{-1} T_x^* X} \tag{4.18}$$

である。ここで、E_x は Eのxにおけるファイバーで、Tの表現とみなしている。ch はその Tに関する指標である。この分子は、ボットの留数公式の同変チャーン類の類似である。分母の $T_x^* X$ は x における X の(正則)余接束であり、$\bigwedge_{-1}$は その外積の交代和 $\mathbb{C} - T_x^*X + \bigwedge^2 T_x^* X + \cdots + (-1)^n \bigwedge^n T_x^* X$ $(n = \dim X)$ を表わし、ch はその Tに関する指標である。

一方、分母において T_x^*X を 1次元表現の直和 $L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ に分解すると、

$$\bigwedge_{-1} T_x^* X = (\bigwedge_{-1} L_1) \otimes \cdots \otimes (\bigwedge_{-1} L_n) = (1 - L_1) \otimes \cdots \otimes (1 - L_n)$$

とテンソル積に分解する。これは、オイラー類のホイットニー和公式の類似であり、その意味で、分母は K 理論における接空間の同変オイラー類の類似である。

さらに、オイラー類との類似を見るために、Eが0切断と横断的な切断 s を持っているときに、$S = s^{-1}(0)$ のポアンカレ双対が、Eのオイラー類で与えられていたこと (定理 1.1) を思い出そう。このとき、S のポアンカレ双対の、K理論における類似は、Sの構造層$\mathcal{O}_S$ である。これがなぜ、$\bigwedge_{-1} T_x^* X$ と関係しているのかを見るためには、コシュール複体を考えればよい。しかし、一般次元で言葉を準備する代わりに、上のホイットニー和公式との類似を使って、次元が1のときを理解すればよいとして、Xは1次元と仮定しよう。直線束 L が切断 s を持ち、有限個の点で、横断的に消えているとしよう。このとき、双対束 E^* の切断の層 $\mathcal{O}(L^*)$ に s^* を掛ける、構造層 $\mathcal{O}$ への準同型

$$\mathcal{O}(L^*) \xrightarrow{s^*} \mathcal{O}$$

を考える。これは s の零点以外では完全であり、また、零点の周りで座標を取れば

$$\mathbb{C}[z] \xrightarrow{z\text{を掛ける}} \mathbb{C}[z]$$

と同じである。この場合、準同型は単射で、余核は $\mathbb{C}[z] \ni f(z) \mapsto f(0) \in \mathbb{C}$ により、$\mathbb{C}$ である。したがって、$\mathcal{O}(L^*) \xrightarrow{s^*} \mathcal{O}$ を長さ2の複体と考えて、ホモロジーを取れば、次数 1 では消えていて、次数 0 では、s の零点の構造層と同型になる。 K群は、このようなときに、複体の交代和と、構造層を同じとして定められるものであり、したがって

$$\mathcal{O}_S = \mathcal{O} - \mathcal{O}(L^*)$$

となる。また、接束ではなく余接束 T^*X を取る理由は、この構成で上のように L の双対束 L^* が出てくるからである。

次に、留数公式の左辺の、積分に対応するものは、Eに係数を持つドルボー・コホモロジーの交代和の指標

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{ch} H^i(X, \mathcal{O}(E)) \tag{4.19}$$

である。あるいは、ドルボーの定理により、チェック・コホモロジーでも同じである。EへのTの作用は、ドルボー・コホモロジーへの作用を誘導し、したがって、各 $H^i(X, \mathcal{O}(E))$ はTの表現空間である。より一般に、固有な写像 $f\colon X \to Y$ に対して、押し出し準同型写像の類似は、高次順像の交代和 $\sum(-1)^i R^i f_*$ と定義される。

ドルボー、チェック・コホモロジーや、高次順像に親しみがない読者には、なぜこれが積分や、押し出し準同型写像の類似なのか、つかみにくいと思うが、よい状況では0以外の次数のコホモロジーが消える、という消滅定理が成立し、$H^0(X, \mathcal{O}(E))$ や $R^0 f_*$ のみが生き残るということがよく起こる。このときは、$H^0(X, \mathcal{O}(E))$ は E の正則切断の全体のなす空間であるし、$R^0 f_* \mathcal{O}(E) = f_* \mathcal{O}(E)$ は、U における切断の空間が $f^{-1}(U)$における $\mathcal{O}(E)$ の切断のなす空間として定義される層である。

例として、X は旗多様体 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ で、E として直線束

$$(L_1^*)^{\otimes \lambda_1} \otimes (L_2^*)^{\otimes \lambda_2} \otimes \cdots \otimes (L_n^*)^{\otimes \lambda_n}$$

を取る。$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n)$ は、前のように分割である。このとき、消滅定理が成立することが知られている。したがって、(4.19)は、正則切断の空間である。これは、ボレル・ヴェイユ理論(***)により、$\mathrm{GL}(n)$ の既約表現を与える。一方、(4.18)は、L_i^* の固定点 $w = 1$ における指標を x_i として、

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \frac{\prod_i x_{w(i)}^{\lambda_i}}{\prod_{i<j}(1 - x_{w(j)} x_{w(i)}^{-1})} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \frac{\operatorname{sgn} w \prod_i x_{w(i)}^{\lambda_i + n - i}}{\prod_{i<j}(x_i - x_j)}$$

で与えられる。これは、シューア多項式 $s_\lambda(x)$ の定義に他ならない。

この式は、$\mathrm{GL}(n)$の場合のワイルの指標公式であり、より一般に、コンパクト・リー群の既約表現の指標を、上のような形の分数式で表す公式が、知られている。(***参照)

CHAPTER 2

ホモロジー群による合成積代数とその表現の構成

この章では、(コ)ホモロジーにおける合成積を用いて、Lie環 $\mathfrak{sl}(2)$ と＊＊＊と、その表現の構成を行なう。使う空間は、これまで調べてきたグラスマン多様体、旗多様体である。次章以下で扱う、より難しい空間における同様の構成のプロトタイプとなるものである。

§4(v)で紹介した、ボレル・ヴェイユ理論では、リー群が作用する空間を取り、そのコホモロジー群への作用を用いて表現を実現した。ただし、そこで使ったコホモロジーは、ドルボー・コホモロジーであり、前章で主に扱ってきた特異コホモロジー、ドラーム・コホモロジーではない。実際、ホモトピックな写像 f, g は、これらのコホモロジーに同じ準同型写像を引き起こす。よって、連結なリー群 G を考えれば、すべての元は単位元とつなげられるので、これらのコホモロジーに引き起こす写像は、すべて恒等写像でしかない。

したがって、これから扱う構成は、ボレル・ヴェイユ理論とは趣が違うもので、実際、リー群の表現を作るのではなく、対応するリー環の表現を構成する。しかも、扱う空間は連結ではなく、たくさんの連結成分を持つものである。また、リー環を生成元と関係式を用いて表示し、生成元に対応する元が、異なる連結成分 X_α, X_β のコホモロジー群のあいだの写像として実現される。このような写像を実現するために、**対応**、すなわち $X_\alpha \times X_\beta$ の部分多様体、を用いる。

このような仕方で、リー環の表現を構成する方法が発見されたのは、比較的最近である。しかし、このような幾何学的な設定だけではなく、コホモロジーを非可換環の表現のなすグロタンディーク群に置き換えた構成 (***) なども、発見されており、その重要性は増している。

*** 加筆の予定 ***

5. 複素グラスマン多様体の余接束と$\mathfrak{sl}(2)$ の表現

5(i). シンプレクティック幾何学の用語から. X を C^∞多様体とするとき、その余接束 T^*X を多様体と考える。T^*Xには標準的な1-形式 θ が

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p^i dq_i$$

で定義される。ここで、$(q_1, \ldots, q_n)$ は X の座標系であり、その微分$dq_1, \ldots dq_n$ を余接空間の基底とし、それから誘導される余接空間の座標が $p^1, \ldots, p^n$ である。上のように、和を取ると、座標系のとり方にはよらず、θ は T^*X 上の well-defined な 1形式になる。さらに、

$$\omega = d\theta = \sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq_i$$

は、d閉な2-形式であり、接空間 T_xX $(x \in X)$ 上の交代形式として、非退化である。この二つの性質を持つ、多様体上の2-形式は**シンプレクティック形式**とよばれる。

Mを多様体、ω をその上のシンプレクティック形式とするとき、部分多様体 $S \subset M$が**ラグランジアン部分多様体**であるとは、ωの引き戻しが0であり、かつ $\dim S = \dim M/2$ となるときをいう。ωは非退化なので、制限が消えることのできる最大次元の部分空間は $\dim M/2$ である。したがって、ラグランジアン部分多様体の二番目の条件は、この最大次元になっていることを意味している。Sが $S \looparrowright M$ と単に M にMへのはめ込み写像があるときも、同じようにラグランジアン部分多様体の概念が定義される。

再び、T^*X の上のシンプレクティック形式 ω を考える。$f\colon S \looparrowright X$ をはめ込み写像とするとき、法束 $N_SX = f^*TX/TS$の双対束 N_S^*X を**余法束**という。余法束は、余接束の引き戻し f^*T^*X の部分束であり、TSの上で消えるような線形形式の全体に他ならない。これにより、はめ込み写像 $N_S^*X \looparrowright T^*X$ が定まり、これは T^*X のラグランジアン部分多様体になる。

この本では、上で説明した意味のシンプレクティック形式ではなく、複素多様体 X において複素余接束 T^*X を取り、上の構成において $(q_1, \dots, q_n)$ を正則座標系にとって定義される複素シンプレクティック形式が現れる。これは、T^*X上のd閉な$(2,0)$形式であり、正則接空間上の交代形式として非退化である。一般の複素多様体 M において、この二つの条件を満たすものを、複素シンプレクティック形式、あるいは誤解の恐れがないときには単に、シンプレクティック形式とよぶ。ラグランジアン部分多様体、余法束は、上とまったく同じように、そのまま複素多様体の範疇で定義される。

以下で、しばしば用いる計算を紹介しておく。余接束 T^*X の最高次のチャーン類は、T^*X を向きのついた実ベクトル束と考えたときのオイラー類であった。また、余接束は接束 TX の双対束である。したがって、分裂原理と(1.6)から $c_{\dim X}(T^*X) = (-1)^{\dim X} c_{\dim X}(TX)$ が成り立ち、X がコンパクトとすると、

$$\int_X c_{\dim X}(T^*X) = (-1)^{\dim X} \int_X c_{\dim X}(TX) = (-1)^{\dim X} (X\text{のオイラー数}) \tag{5.1}$$

が成立する。

5(ii). $\mathfrak{sl}(2)$の有限次元既約表現の構成. §4(v)で紹介したボレル・ヴェイユ理論の特別な場合として、$\mathbb{P}^1$ 上の超平面束のn乗の正則切断のなす空間に $\mathrm{SL}(2)$ の既約表現の構造が入る。$\mathbb{P}^1$の同次座標 $[x:y]$ を用いれば、この空間は、具体的には x, y についてのn次同次式の全体の空間であり、基底$\langle x^n, x^{n-1}y, \dots, y^n\rangle$を持つ。

この章のはじめに述べたように、この $\mathrm{SL}(2)$ の表現を、コホモロジーで実現するのではなく、代わりに、そのリー環 $\mathfrak{sl}(2)$ の表現を実現する。これを具体的に書いておこう。$\mathfrak{sl}(2)$は、トレースが0 の 2×2複素行列で、基底として

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を持つ。これらのあいだのリー括弧は、

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H$$

で与えられる。$\mathfrak{sl}(2)$ は、E, F, H で生成され、上の関係式で定められるリー環である。

また、n次同次式の全体の空間に

$$E = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad F = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad H = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} \tag{5.2}$$

で、線形写像を定めると、上の関係式を満たしていることが分かる。したがって、これは $\mathfrak{sl}(2)$ の表現を与える。実際、これはボレル・ヴェイユ理論から作られるSL(2)の表現を微分してできる、$\mathfrak{sl}(2)$ の表現である。この表現が既約であることを具体的にチェックすることも易しい。

この表現をコホモロジーを用いて、構成する。以下、複素グラスマン多様体 $G(k,\mathbb{C}^n)$ を単に $G(k,n)$ で表す。しばらく、nは固定するが、$0 \le k \le n$ は動かして考える。異なる k に対する複素グラスマン多様体の間に‘つながり’を作ることが以下の構成のポイントになる。

そのつながりとして、**インシデンス多様体** $P(k,n)$ を $G(k,n)\times G(k-1,n)$ の部分集合 $\{(S_1,S_2) \mid S_1 \supset S_2\}$ と定める。 q_1, q_2 を $P(k,n)$から$G(k,n), G(k-1,n)$への射影とすると、

$$\begin{tikzcd} & P(k,n) \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\ G(k,n) & & G(k-1,n) \end{tikzcd}$$

それぞれファイバー束で、q_1 のS_1におけるファイバーは、S_1の$k-1$次元部分空間の全体のなす $G(k-1,S_1) \cong \mathbb{P}^{k-1}$となり、$q_2$の S_2におけるファイバーは、$\mathbb{C}^n/S_2$ の1次元部分空間のなす $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n/S_2) = \mathbb{P}^{n-k}$と同型である。

複素グラスマン多様体の上のトートロジカル部分束を考え、$G(k,n)$ のものを S_1, $G(k-1,n)$ のものを S_2 で表す。このとき、$G(k,n)\times G(k-1,n)$ 上のベクトル束 $\mathrm{Hom}(S_2,\mathbb{C}^n/S_1)$ を考える。$S_2 \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/S_1$ の合成により、このベクトル束は切断 s をもち、その零点集合 $\mathrm{Zero}(s)$ はインシデンス多様体 $P(k,n)$である。 $P(k,n)$において sの微分∇sは全射であることは容易にチェックできるので、$P(k,n)$ は埋め込まれた部分多様体であり、さらに $G(k,n)\times G(k-1,n)$ 内での法束 $N_{P(k,n)}(G(k,n)\times G(k-1,n))$ は、$\mathrm{Hom}(S_2,\mathbb{C}^n/S_1)$ である。その双対束は**余法束**とよばれるが、それは $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n/S_1,S_2)$ である。

次に複素グラスマン多様体 $G(k,n)$ の余接束

$$T^*G(k,n) = \{(S,\xi) \mid S \subset \mathbb{C}^n, \quad \xi\colon \mathbb{C}^n/S \to S\}$$

を考える。 $T^*G(k,n)\times T^*G(k-1,n)$ の部分集合 $\tilde{P}(k,n)$ を

$$\tilde{P}(k,n) = \{(S_1,\xi_1,S_2,\xi_2) \mid S_1 \supset S_2, \quad \xi_1 = \xi_2\}$$

で定義する。$\xi_1 = \xi_2$ は、ともに $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ の元と思っての等式である。等式$\xi_1 = \xi_2$が成り立っていることにより、$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n/S_1,S_2)$の元と考えることができる。つまり、$\tilde{P}(k,n)$ は余法束 $N_{P(k,n)}(G(k,n)\times G(k-1,n))$ の全空間である。 p_1, p_2 を P_k から $T^*G(k,n), T^*G(k-1,n)$への射影とする。

$$\begin{tikzcd} & \tilde{P}(k,n) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ T^*G(k,n) & & T^*G(k-1,n). \end{tikzcd}$$

また、$\tilde{P}(k,n)$ は、$T^*G(k,n)\times T^*G(k-1,n)$ の余法束であるから、ラグランジアン部分多様体である。正確には、自然なシンプレクティック形式の第二成

分の符号を変更したものに関して、ラグランジアン部分多様体になる。特に、$d_1 = \dim_{\mathbb{C}} G(k,n) = k(n-k)$, $d_2 = \dim_{\mathbb{C}} G(k-1,n) = (k-1)(n-k+1)$とおくと、$\dim \tilde{P}(k,n) = d_1 + d_2$である。