次の写像の合成を考え、これを簡潔に $p_{1*}p_2^*$ と書く。

$$\begin{array}{ccccc} H^*(G(k-1,n)) & & & & H^*(G(k,n)) \\ \cong\big\downarrow \text{Thom同型} & & & & \cong\big\uparrow \text{Thom同型} \\ H_c^{2d_2+*}(T^*G(k-1,n)) & \xrightarrow[p_2^*]{} & H_c^{2d_2+*}(\tilde{P}(k,n)) & \xrightarrow[p_{1*}]{} & H_c^{2d_1+*}(T^*G(k,n)) \end{array}$$

さらに、直和 $\bigoplus_{0\le k\le n} H^*(G(k,n))$ を考えて、上の合成に符号をつけて足し合わせ

$$F=\sum(-1)^{k-1}p_{1*}p_2^*$$

と定め、上の直和空間に働く作用素とみなす。

同様に p_1 と p_2 の役割を入れ替え

$$E=\sum(-1)^{n-k}p_{2*}p_1^*$$

と定義する。また、

$$H=\sum(n-2k)\mathrm{id}_{H^*(G(k,n))}$$

とする。コホモロジーの次数が保たれていることに注意しよう。特に、次数 0 の部分は保たれている。

定理 5.3 (Ginzburg)**.** $[H,E]=2E$, $[H,F]=-2F$, $[E,F]=H$ が満たされる。すなわち、$\bigoplus_{0\le k\le n} H^0(G(k,n))$は、$\mathfrak{sl}(2)$ の表現である。また、この表現は、$\mathfrak{sl}(2)$の(5.2)で定義された$(n+1)$次元表現と同型である。

定理 5.5 において、この結果は次数が0以外のところでも成立していることを証明する。

証明. $[H,E]=2E$, $[H,F]=-2F$のチェックは自明である。

$1_k\in H^0(G(k,n))$を、$G(k,n)$の1という定数関数があらわすクラスとしたときに、$p_2^*1_k$は、$p_2^*\vartheta_{T^*G(k-1,n)}$ である。ただし、$\vartheta_{T^*G(k-1,n)}$ は、ベクトル束 $T^*G(k-1,n)\to G(k-1,n)$のトム類である。

この $p_2^*\vartheta_{T^*G(k-1,n)}$ を $\tilde{P}(k,n)$ に関するポアンカレ双対定理

$$H_c^{2d_2+*}(\tilde{P}(k,n))\cong H_{2d_1-*}(\tilde{P}(k,n))$$

により、これを$\tilde{P}(k,n)$のコホモロジー類として求めて、p_{1*} を計算したい。(ここで、$H_{2d_1-*}(\tilde{P}(k,n))$ は、ボレル・ムーア・ホモロジーではなく通常のホモロジー群である。) ポイントは、集合論的な引き戻し $p_2^{-1}G(k-1,n)$ は、$P(k,n)$であって、その次元は d_1+k-1なのに対して、期待次元は、$d_1+d_2-d_2=d_1$であり、$(k-1)$次元分だけずれていることであり、これは、$p_2^*\vartheta_{T^*G(k-1,n)}=\alpha\cap[P(k,n)]$ となるコホモロジー類 $\alpha\in H^{2(k-1)}(P(k,n))$ が存在することを示唆する。

そのように考えれば、実際に α を求めるのは難しくない。$T^*G(k-1,n)=\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n/S_2,S_2)$, $N^*_{P(k,n)}(G(k,n)\times G(k-1,n))=\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n/S_1,S_2)$ であったことを思い出すと、ベクトル束の完全列

$$0\to\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n/S_1,S_2)\to\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n/S_2,S_2)\to\mathrm{Hom}(S_1/S_2,S_2)\to 0 \tag{5.4}$$

があり、この完全列は、C^∞ベクトル束の圏では分裂することから、トム類は

$$p_2^*\vartheta_{T^*G(k-1,n)}=\vartheta_{\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n/S_1,S_2)}\vartheta_{\mathrm{Hom}(S_1/S_2,S_2)}$$

と分解し、

$$\vartheta_{\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n/S_1,S_2)}\cap[\tilde{P}(k,n)]=[P(k,n)]$$

であることから、

$$p_2^*\vartheta_{T^*G(k-1,n)} \cap [\tilde{P}(k,n)] = e(\mathrm{Hom}(S_1/S_2, S_2)) \cap [P(k,n)]$$

である。つまり、$\alpha = e(\mathrm{Hom}(S_1/S_2, S_2))$ である。

次に、$q_1\colon P(k,n) \to G(k,n)$ は S_1 の中の余次元 1 の部分空間のなすグラスマン束(実際には射影束)であり、q_1 のファイバーの接束は、$\mathrm{Hom}(S_2, S_1/S_2)$ であることに注意する。したがって、上に出てきた$\mathrm{Hom}(S_1/S_2, S_2)$ はファイバーの余接束である。だから、$\alpha = e(\mathrm{Hom}(S_1/S_2, S_2))$ を q_1 のファイバーに沿って積分すると、前節の注意(5.1)により、

$$(-1)^{\dim(\text{ファイバー})}(\text{ファイバーのオイラー数})1_k = (-1)^{k-1}k1_k$$

となる。符号の調整から $F1_{k-1} = k1_k$である。

同様に、$E1_k = (n-k+1)1_{k-1}$ である。$n-k+1$ は q_2 のファイバー$\mathbb{P}^{n-k}$ のオイラー数に他ならない。ここで、$1_k = \binom{n}{k}x^{n-k}y^k$とすると、(5.2)の表現の作用と同じである。以上により証明が完了した。 □

5(iii). 同変コホモロジーにおける計算. 次に、上の構成を同変コホモロジーで定式化し直そう。$G(k,n)$ や、その他、上に現れた空間には自然に $\mathrm{U}(n)$ が現れているので、$\mathrm{U}(n)$-同変コホモロジーを用いる。

$G(k,n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(k) \times \mathrm{U}(n-k)$に注意すると、誘導(4.16)と定理 4.17から

$$H^*_{\mathrm{U}(n)}(G(k,n)) = H^*_{\mathrm{U}(k)\times\mathrm{U}(n-k)}(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_{n-k}}$$

である。ただし、対称群の積 $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$ は、 $x_1, \dots, x_k$ の入れ替えと、$x_{k+1}, \dots, x_n$ の入れ替えで働く。

また、問題 1.12 において、グラスマン束のコホモロジーを記述した。例 4.6のあとで指摘したように、これを $H^*_{\mathrm{U}(n)}(G(k,n))$ に適用することができる。 特に、$H^*_{\mathrm{U}(n)}(G(k,n))$ は $H^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{pt})$ の自由加群であり、また $H^*_{\mathrm{U}(n)}(G(k,n)) \otimes_{H^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{pt})} \mathbb{C}$ は$H^*(G(k,n))$ と同型である。ここで、$H^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{pt}) \to \mathbb{C}$ は、$H^0_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{C}$に注意して、高次のコホモロジーを0に送る環準同型であり、$\mathrm{U}(n)$ 同変コホモロジーを自明群の同変コホモロジーに移す制限準同型とも考えられる。

定理 5.5 (Ginzburg)**.** 関係式 $[H,E] = 2E$, $[H,F] = -2F$, $[E,F] = H$ が

$$\bigoplus_{0\le k\le n} H^*_{\mathrm{U}(n)}(G(k,n)) = \bigoplus_{0\le k\le n} \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_{n-k}}$$

上の作用素として満たされる。

H, E, F は、$H^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{pt})$-線形であるから、上の注意により、この関係式は同変でない通常のコホモロジー $\bigoplus H^*(G(k,n))$ でも成り立つことを注意しておく。

定理 5.5の証明. 上の証明により、$(-1)^{k-1}p_{1*}p_2^*$ は結局のところ

$$(-1)^{k-1}q_{1*}(e(\mathrm{Hom}(S_1/S_2, S_2)) \cap q_2^*(\cdot)) \tag{5.6}$$

であるから、$T^*G(k,n)$, $\tilde{P}(k,n)$ を持ち出す代わりに、これを計算する。

q_{1*}を考える。定理 4.17を使い、$H_T^*(P(k,n)) \to H_T^{*-2(k-1)}(G(k,n))$ を代わりに求めることにする。 (4.14)で注意したように、定理 4.9の証明により、図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_T^*(P(k,n)) & \xrightarrow{q_{1*}} & \mathcal{H}_T^{*-2(k-1)}(G(k,n)) \\
\sum_x \dfrac{i_x^*}{e(T_xP(k,n))}\Big\downarrow & & \Big\downarrow \sum_y \dfrac{i_y^*}{e(T_yG(k,n))} \\
\bigoplus_x \mathcal{H}_T^*(x) & \xrightarrow[q_{1*}^T]{} & \bigoplus_y \mathcal{H}_T^*(y)
\end{array}$$

は可換である。ただし、$\mathcal{H}_T^*(?) = H_T^*(?) \otimes_{H_T^*(\mathrm{pt})} \operatorname{Frac} H_T^*(\mathrm{pt})$ で、x は $P(k,n)^T$、y は $G(k,n)^T$ を走るものとする。また、q_1^T は q_1 の固定点集合への制限で、 q_{1*}^T は、$x \in (q_1^T)^{-1}(y)$となる x について和を取ることで与えられる。 $H_T^*(G(k,n))$, $H_T^*(P(k,n))$は、$H_T^*(\mathrm{pt})$加群として捻れを持たないので、$? \otimes \operatorname{Frac} H_T^*(\mathrm{pt})$で関係式をチェックしても問題ないことに注意しよう。

さて、

$$\begin{aligned}
&T(G(k,n) \times G(k-1,n))/TP(k,n) \\
&\qquad\qquad = N_{P(k,n)}(G(k,n) \times G(k-1,n)) = \operatorname{Hom}(S_2, \mathbb{C}^n/S_1)
\end{aligned}$$

に注意すると、 $x \in (q_1^T)^{-1}(y)$ のとき

$$\frac{e(T_yG(k,n))}{e(T_xP(k,n))} = \frac{e(\operatorname{Hom}(S_2, \mathbb{C}^n/S_1)_y)}{e(\operatorname{Hom}(S_2, \mathbb{C}^n/S_2)_y)} = \frac{1}{e(\operatorname{Hom}(S_2, S_1/S_2)_y)}$$

が成り立つ。これは、定理 5.3の証明の途中で行った計算、より正確には、その双対束における計算と同じである。分母の$e(\operatorname{Hom}(S_2, S_1/S_2)_y)$ は、(5.6)の $(-1)^{k-1}e(\operatorname{Hom}(S_1/S_2, S_2))$ とキャンセルしする。したがって

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_T^*(P(k,n)) & \xrightarrow{(-1)^{k-1}q_{1*}(e(\operatorname{Hom}(S_1/S_2,S_2))\cap)} & \mathcal{H}_T^{*-2(k-1)}(G(k,n)) \\
\sum i_x^*\Big\downarrow & & \Big\downarrow \sum i_y^* \\
\bigoplus_x \mathcal{H}_T^*(x) & \xrightarrow[q_{1*}^T]{} & \bigoplus_y \mathcal{H}_T^*(y)
\end{array}$$

は可換である。引き戻し写像 q_2^* と $\sum i_x^*$ の可換性の方は、明らかなので、結局 (5.6) は $(q_1^T)_*(q_2^T)^*$ で与えられる。したがって(5.6) は、写像

$$\bigoplus_{y_2 \in G(k-1,n)^T} \mathcal{H}_T^*(y_2) \to \bigoplus_{y_1 \in G(k,n)^T} \mathcal{H}_T^*(y_1)$$

としては、

$$[y_2] \mapsto \sum_{y_1} \#\left(\{(y_1, y_2)\} \cap P(k,n)\right)[y_1]$$

で与えられる。固定点集合を$I \subset \{1, \ldots, n\}$と同一視して、これを書き直すと

$$[I_2] \mapsto \sum_{i \in I_2^c} [I_2 \cup \{i\}] \tag{5.7}$$

となる。同様に

$$(-1)^{n-k} p_{2*} p_1^* = (-1)^{n-k} q_{2*}(e(\operatorname{Hom}(\mathbb{C}^n/S_1, S_1/S_2)) \cap q_1^*(\cdot))$$

は、

$$[I_1] \mapsto \sum_{i \in I_1} [I_1 \setminus \{i\}] \tag{5.8}$$

で与えられる。

部分集合 $I \subset \{1, \ldots, n\}$ を次のような図式で表す:

n 個の箱を並べ、そのうちの k 個が黒、残りが白になっているもので、左から黒の箱が i_1番目、i_2番目、...、i_k 番目になっているとき、$I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ に対応させて、固定点との全単射を定める。

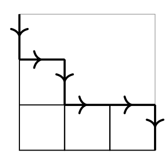
上の $p_{1*}p_2^*$ の計算により、Fをこの図式(正確には、図式に対応する固定点の基本類が与える$\mathcal{H}_T^*(G(k,n))$ の元)に適用すると、一個の白い箱を黒に替えてできる図式の和になる。一方、Eを適用すると、一個の黒い箱を白に替えてできる図式の和である。そこで、$[E,F]$をこの図式に適用すると、白と黒の箱を入れ替えるものについては、EF と FE でキャンセルし、F で白を黒に替えた箱を、Eでまた元の白に戻すものの$n-k$通り、E で黒を白に替えたものをFで戻すもののk通りの差が残り、結局 $(n-2k)$倍されることになる。 □

このように見ると、$\bigoplus_{k=0}^n \mathcal{H}_{\mathrm{U}(n)}^*(G(k,n))$ が$\mathfrak{sl}(2)$ の2次元表現 $V = \mathbb{C}^2$ を n 個テンソル積した $V^{\otimes n}$ を $\mathcal{H}_{\mathrm{U}(n)}^*(\mathrm{pt})$ に係数拡大したものであることも明白である。実際、白い箱と黒い箱を V の基底とみなし、1番目の箱が1番目のVの基底、2番目の箱が2番目のVの基底、...と対応させれば、上のEはテンソル積のE、すなわち

$$\sum_i 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \underset{i\text{番目}}{E} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$$

に他ならない。

注 5.9. 上の図式は、**マヤ図式**とよばれる。§2(iv)で紹介した、$k \times (n-k)$の長方形の中に入るヤング図とは、次のやり方で対応する。長方形の、左上の角から出発して、箱の並びに応じて、黒い箱なら右に一つ進み、白い箱なら下に一つ進むというルールで折れ線を描く。例えば、上の例の場合は、



となる。左下に囲まれるのが、対応するヤング図である。

5(iv). ヤンギアンの表現. この節では、$\mathfrak{sl}(2)$の表現の構成を少し変更かつ拡大して、ヤンギアンの表現を作る。ヤンギアンは、Drinfeldによって導入された非可換環で、$\mathfrak{sl}(2)$に値を持つ多項式のリー環 $\mathfrak{sl}(2) \otimes \mathbb{C}[z]$ (カレント代数)の普遍展開環を変形したものである。生成元と関係式による表示は後で与える。

まず、作用する群を拡大する。$T^*G(k,n)$ にS^1の作用を、余接束のファイバーのスカラー倍として定める。インシデンス多様体 $\tilde{P}(k,n)$ は、$T^*G(k,n) \times T^*G(k-1,n)$ への対角の S^1 作用で不変であり、p_1, p_2 は同変である。したがって、p_{1*}, p_2^* は、作用を増やした $H_{\mathrm{U}(n)\times S^1}^*(T^*G(k,n))$、$H_{\mathrm{U}(n)\times S^1}^*(\tilde{P}(k,n))$ の間の準同型として定義することができる。この付け加えられたS^1に関する同変コホモロジーの超平面束に対応する生成元を $\hbar$ であらわす。したがって、

$H^*_{S^1}(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[\hbar]$ である。ヤンギアンの定義においては、$\hbar$は量子化のパラメータに対応し、$\hbar = 0$ とすると、カレント代数の普遍展開環になる。同変コホモロジーの立場では、$\hbar = 0$ はS^1作用を忘れて$\mathrm{U}(n)$の作用だけを考えた $H^*_{\mathrm{U}(n)}(?)$ に戻ることに対応する。

また、$\tilde{P}(k,n)$ の上には、自然な直線束 S_1/S_2 が定義されていることに注意し、$F = \sum(-1)^k p_{1*}p_2^*$ を

$$F_r = \sum_k (-1)^{k-1} p_{1*}(c_1(S_1/S_2)^r \cup p_2^*(\cdot))$$

と拡張する。これは、$\bigoplus H^*_{\mathrm{U}(n)\times S^1}(G(k,n))$ に働く作用素である。ここで、rは非負整数であり、$r = 0$ が元のFに他ならない。同様に

$$E_r = \sum_k (-1)^{n-k} p_{2*}(c_1(S_1/S_2)^r \cup p_1^*(\cdot))$$

と定義する。

次に、H_r を定義するために、準備を行おう。同変ベクトル束 E に対して、その同変チャーン類を用いて同変コホモロジーに値を持つ多項式を

$$c^z(E) = \sum_{i=0}^{\operatorname{rank} E} z^{\operatorname{rank} E - i} c_i(E)$$

と定める。例えば、Eが直線束であれば、$c^z(E) = z + c_1(E)$ である。$E = E_1 \oplus E_2$ と分解していれば、$c^z(E) = c^z(E_1)c^z(E_2)$ である。これを用いると形式的な同変ベクトル束の差 $E_1 \ominus E_2$に対しても $c^z(E_1 \ominus E_2) = c^z(E_1)c^z(E_2)^{-1}$ により、同変コホモロジーに値を持つ形式的ローラン級数として定義することができる。(つまり、同変K理論の元に対して well-defined であるということである。)

$G(k,n)$ 上のトートロジカル部分束 S, 商束 Q を考え、その双対束 S^*, Q^* を取る。また、q, q^{-1} をウェイト 1, -1 の S^1 の一次元表現とし、$q^{-1}Q^*$ を Q^* に q^{-1} をテンソル積してできる、$\mathrm{U}(n) \times S^1$-同変ベクトル束とする。qS^* についても同様に定める。先の $\hbar$ との関係は、$\hbar = c_1(q) \in H^2_{S^1}(\mathrm{pt})$である。そこで、$H_r$ の母関数 $H(z) \overset{\mathrm{def.}}{=} 1 + \hbar \sum_{r=0}^{\infty} H_r z^{-r-1}$ が、直和因子 $H^*_{\mathrm{U}(n)}(G(k,n))$ において

$$\left(\frac{c^z(qQ^*)c^z(q^{-1}S^*)}{c^z(Q^*)c^z(S^*)} \right)^+$$

をカップ積する作用素となるように定める。ただし、$(\ )^+$ は、有理関数の$z = \infty$での展開を表す。上の式は、$z = \infty$で正則、かつ定数項は1であること、また定数項を除いて$\hbar$で割れることに注意する。したがって、H_r は確かに定義されている。そのように定義してから$\hbar = 0$とおくことができるので、上の定義は一見 $\hbar = 0$ では意味を持たないように見えるにも関わらず、H_rは $H^*_{\mathrm{U}(r)}(G(k,n))$ に働く作用素としても well-defined である。また、(1.9)により、$c^z(qQ^*) = c^{z+\hbar}(Q^*)$, $c^z(q^{-1}S^*) = c^{z-\hbar}(S^*)$ が成り立つ。これから、$H_0 = \operatorname{rank} Q - \operatorname{rank} S = n - 2k$ となって、前の定義の拡張になっていることも分かる。最終的にヤンギアンの関係式が成り立つように選ばれているので、この定義の式の意味はあまり気にしないで、とりあえず先に進んでほしい。

主張. 関係式 $[E_s, F_r] = H_{r+s}$ が成立する。

§5(iii)の計算を今の場合に、変更・拡張する。上の$H(z) = 1+\hbar\sum_{r=0}^{\infty} H_r z^{-r-1}$は、$I \subset \{1, \ldots, n\}$ に対応する固定点では

$$\left(\prod_{a\in I} \frac{z - x_a - \hbar}{z - x_a} \prod_{b\in I^c} \frac{z - x_b + \hbar}{z - x_b}\right)^+ \tag{5.10}$$

となる。

次に F_r を計算するために、(5.6)において、$e(\mathrm{Hom}(S_1/S_2, S_2))$がどこから来ていたかを思い出すと、それは (5.4) であった。この短完全列において、$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n/S_2, S_2)$、$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n/S_1, S_2)$はグラスマン多様体の余接束、余法束なので、$S^1$ がスカラー倍で作用している。よって、(5.4) をS^1 同変ベクトル束の短完全列とするためには、$\mathrm{Hom}(S_1/S_2, S_2)$ にもS^1 をスカラー倍で作用させなければいけない。その上で、$e(\mathrm{Hom}(S_1/S_2, S_2))$は$\mathrm{U}(n) \times S^1$-同変オイラー類と取る。すると、固定点を$\{1, \ldots, n\}$ の部分集合と同一視して、(5.7) は

$$F_r \colon [I_2] \mapsto \sum_{i\in I_2^c} x_i^r \prod_{a\in I_2} \frac{x_a - x_i + \hbar}{x_a - x_i} [I_2 \cup \{i\}]$$

と一般化される。x_i^rは $c_1(S_1/S_2)^r$ から来るもので、固定点において S_1/S_2 の同変チャーン類が x_i だからである。また、前の計算では、$e(\mathrm{Hom}(S_1/S_2, S_2))$ が、局所化から来る $e(\mathrm{Hom}(S_2, S_1/S_2))$ と符号を除いてキャンセルして、分数式の部分が現れてこなかったが、今回は、この二つが S^1 作用の分だけ違っているので、分子と分母で$\hbar$ の和の分だけずれている。

E_s についても同様である。(5.8)は

$$E_s \colon [I_1] \mapsto \sum_{j\in I_1} x_j^s \prod_{b\in I_1^c} \frac{x_j - x_b + \hbar}{x_j - x_b} [I_1 \setminus \{j\}]$$

と一般化される。

交換子 $[E_s, F_r]$ を計算すると、白と黒を入れ替えている部分については、定理5.5の証明と同様に $E_s F_r$ と $F_r E_s$ でキャンセルする。残りの替えた箱を元に戻す部分は、$F_r E_s$ からは

$$[I] \mapsto \sum_{i\in I} x_i^{r+s} \prod_{a\in I\setminus\{i\}} \frac{x_a - x_i + \hbar}{x_a - x_i} \prod_{b\in I^c} \frac{x_i - x_b + \hbar}{x_i - x_b} [I]$$

を得る。同様に、$E_s F_r$ の部分からの寄与は

$$[I] \mapsto \sum_{i\in I^c} x_i^{r+s} \prod_{a\in I} \frac{x_a - x_i + \hbar}{x_a - x_i} \prod_{b\in I^c\setminus\{i\}} \frac{x_i - x_b + \hbar}{x_i - x_b} [I]$$

である。また、共に $[I]$ を $[I]$ のスカラー倍に移すので、スカラーの部分だけを計算すればよい。

定理 5.11 (Ginzburg-Vasserot, Varagnolo)**.** 上で定義した $\bigoplus_{k=0}^{n} H^*_{\mathrm{U}(n)\times S^1}(G(k,n))$ に働く作用素 E_r, F_r, H_r $(r=0,1,2,\dots)$ は、ヤンギアンの定義関係式

$$\begin{gathered}[H_r, H_s] = 0, \quad [H_0, E_r] = 2E_r, \quad [H_0, F_r] = -2F_r, \\ [H_{r+1}, E_s] - [H_r, E_{s+1}] = \hbar\left(H_r E_s + E_s H_r\right), \\ [H_{r+1}, F_s] - [H_r, F_{s+1}] = -\hbar\left(H_r F_s + F_s H_r\right), \\ [E_{r+1}, E_s] - [E_r, E_{s+1}] = \hbar\left(E_r E_s + E_s E_r\right), \\ [F_{r+1}, F_s] - [F_r, F_{s+1}] = -\hbar\left(F_r F_s + F_s F_r\right), \\ [E_s, F_r] = H_{r+s}\end{gathered}$$

を満たす。

問題 5.12. 上の定義において $\hbar=0$ とすると、真ん中の四つの式の右辺が消えるので、リー括弧のみで書かれる関係式になるので、リー環を定める。そのリー環は $H_r = H\otimes z^r$, etc とおくことにより、$\mathfrak{sl}(2)\otimes\mathbb{C}[z]$ と同型であることを証明せよ。

問題 5.13. 主張の残りの計算と、他の関係式のチェックを行って証明を完成させよ。

2 行目の関係式を母関数 $H(z)$ で書き直すと

$$z[H(z), E_s] - [H(z), E_{s+1}] = H(z)E_s + E_s H(z) \tag{5.14}$$

となる。

注 5.15. §4(v)で説明したように、同変コホモロジーと同変K理論の間には類似があるので、上の計算を同変K理論で形式的になぞることができる。ただし、途中で使った式 $(-1)^{k-1}e(\mathrm{Hom}(S_1/S_2, S_2)) = e(\mathrm{Hom}(S_2, S_1/S_2))$ は、同変K群のときには成立しないので、その点は注意が必要である。実際、関係式 $[E,F]=H$ は変更する必要がある。

*** 以下、加筆予定 ***