注 5.17. (5.11) の定義について、とりあえず受け入れて進んでほしいと書いたが、少し背景を説明する。$G(k,n)$ を A_1型箙に対する箙多様体と捉えると、k, n は n はウェイト格子、k はルート格子の元と見なせる。そして、$G(k,n)$ のコホモロジーは定理 5.4において、ウェイトが $n-2k$ のウェイト空間になっていたが、ここに現れた 2 は、A_1 型のカルタン行列の2である。ヤンギアンの構成では、k がトートロジカル部分束 Sの階数であること、$n-k$が商束の階数であることに注意して、$(n-k)-k$ がSとQ の双対束のチャーン類で置き換えられている。ただし、そのとき単純に S^*とQ^*を使うのではなく、S^*の方には q^{-1}を掛ける。そして、それぞれに q を掛けた qQ^* と S^* が分子・分母をひっくり返して掛けられて、(5.11) のようになっているのである。 **** あとで箙多様体の一般的な定義をしたときに振り返る ****

問題 5.18. 同型

$$\bigoplus_{k=0}^{n} H^*_{\mathrm{U}(n)\times S^1}(G(k,n)) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} \mathbb{C}[\hbar, z_1, \dots, z_n]^{\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_{n-k}}$$

のもと、F_r, E_s が

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{k} f(z_1,\dots,\widehat{z_i},\dots,z_k,z_i,z_{k+1},\dots,z_n)\,(-z_i)^r \prod_{a\in\{1,\dots,k\}\setminus\{i\}} \frac{z_i-z_a+\hbar}{z_i-z_a},\\
\sum_{j=k}^{n} g(z_1,\dots,z_{k-1},z_j,z_k,\dots,\widehat{z_j},\dots,z_n)\,(-z_j)^s \prod_{b\in\{k,\dots,n\}\setminus\{j\}} \frac{z_b-z_j+\hbar}{z_b-z_j}\\
f\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]^{\mathfrak{S}_{k-1}\times S_{n-k+1}},\quad g\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]^{\mathfrak{S}_k\times S_{n-k}}
\end{gathered}$$

で与えられることを示し、ヤンギアンの関係式を満たしていることを証明せよ。

*** 余積、可積分系について書くかもしれない。***

6. 旗多様体の余接束と(退化)アファイン・ヘッケ環の表現

6(i). 退化アファイン・ヘッケ環の表現. この節では、旗多様体 $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$ を単に $\mathcal{F}(n)$ で表す。$1\le i\le n-1$ に対して、$\mathcal{P}(i,n)$ を、旗多様体の定義で、i次元の部分空間を $S_{1,i}$, $S_{2,i}$ と二つ取ってきたものとする:

$$0=S_0\subset S_1\subset\cdots\subset S_{i-1}\begin{array}{c}\subset\ S_{1,i}\ \subset\\ \\ \subset\ S_{2,i}\ \subset\end{array}S_{i+1}\subset\cdots\subset S_n=\mathbb{C}^n$$

ただし、$S_{1,i}$ と $S_{2,i}$ の間には包含関係は課さない。$S_{1,i}$ もしくは $S_{2,i}$ を取ることにより、$\mathcal{P}(i,n)$ から $\mathcal{F}(n)$ へ二つの写像 q_1, q_2 が定義される。それらを組み合わせて、$\mathcal{P}(i,n)\hookrightarrow\mathcal{F}(n)\times\mathcal{F}(n)$ と $\mathcal{F}(n)\times\mathcal{F}(n)$ の部分集合とみなすと、i以外の S_j が第一成分と第二成分で等しい、という条件で決まる埋め込まれた部分多様体になっている。この構成により、前節と同様に

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{P}(i,n) \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\
\mathcal{F}(n) & & \mathcal{F}(n)
\end{tikzcd}$$

という図式が定まる。q_1, q_2 は、ベクトル束 S_{i+1}/S_{i-1} に付随する射影束であり、射影直線 $\mathbb{C}P^1$ をファイバーとする。ファイバーに沿った接束は、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}(S_{2,i}/S_{i-1}, S_{i+1}/S_{2,i}) = \mathrm{Hom}(L_{2,i}, L_{2,i+1}) \qquad (q_1\text{のとき}),\\&\mathrm{Hom}(S_{1,i}/S_{i-1}, S_{i+1}/S_{1,i}) = \mathrm{Hom}(L_{1,i}, L_{1,i+1}) \qquad (q_2\text{のとき})\end{aligned}$$

である。ここで、$a = 1, 2$ で、$L_{a,i} = S_{a,i}/S_{i-1}$, $L_{a,i+1} = S_{i+1}/S_{a,i}$ とおいた。他の直線束 L_j $(j \neq i, i+1)$ については、S_j/S_{j-1} であり、第一、第二成分を区別する必要がなく、添字 a を記す必要がないことに注意しよう。q_1 のファイバーの接束を考えるときは、$S_{1,i}$ は固定されていて、$S_{2,i}/S_{i-1}$ が射影束のトートロジカル束になっているので、添字の 1と2が入れ替わるのである。

グラスマン多様体のときと同様に、余接束と余法束を考えて、図式

$$\begin{tikzcd} & \tilde{\mathcal{P}}(i,n) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ T^*\mathcal{F}(n) & & T^*\mathcal{F}(n) \end{tikzcd}$$

を定める。旗多様体の余接束を(2.6)を用いて

$$\{(S_\bullet, \xi) \in \mathcal{F}(n) \times \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \mid \xi(S_{j+1}) \subset S_j \quad j = 0, \dots, n-1\}$$

と書くと、$\tilde{\mathcal{P}}(i,n)$ は、$T^*\mathcal{F}(n) \times T^*\mathcal{F}(n)$ の中で、旗多様体の部分については、第一成分と第二成分が i次元のところを除いて等しく、余接方向については、第一成分と第二成分は等しく、かつ $\xi(S_{i+1}) \subset S_{i-1}$ となっている、という条件で決まる部分多様体である。p_1, p_2 の逆像は、$\xi(S_{i+1}) \not\subset S_{i-1}$ となる $T^*\mathcal{F}(n)$ の開集合上は空集合で、$\xi(S_{i+1}) \subset S_{i-1}$ 上では、$\mathbb{C}P^1$である。グラスマン多様体でインシデンス多様体を考えたときと同様に、q_1, q_2 はファイバー束なのに対して、p_1, p_2 はそうでなく、後者の方が難しそうに見えるのだが、実際にはそうならないのである。

まず §5(iii) での計算のポイントだった、余法束とファイバーの接束の関係を今の場合に見てみよう。$\tilde{\mathcal{P}}(i,n)$ は $\mathcal{P}(i,n)$ 上のベクトル束としてみると、

$$\begin{aligned}&\{\xi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \mid \xi(S_{j+1}) \subset S_j \quad j = 0, \dots, \widehat{i-1}, \widehat{i}, \dots, n, \quad \xi(S_{i+1}) \subset S_{i-1}\}\\&\qquad = \bigoplus_{j<k, (j,k)\neq(i,i+1)} \mathrm{Hom}(L_k, L_j)\end{aligned}$$

となる。(jまたはkが、i, $i+1$でも、上で除外している部分以外なら、$a = 1, 2$のどちらを考えても変わらない。)これは、$p_2^* T^*\mathcal{F}(n) = \bigoplus_{j<k} \mathrm{Hom}(L_k, L_j)$ の部分束で、商束は

$$\mathrm{Hom}(L_{2,i+1}, L_{2,i})$$

である。上で説明したことと比べると、これは q_1 に関してファイバーに沿った接束の双対である。よって §5(iii) のときと同様に $p_{1*}p_2^*$ を $H^0(\mathcal{F}(n))$ で考えると $(-1)^{\dim(\text{ファイバー})}(\text{ファイバーのオイラー数}) = -2$ が現れる。

実際には、この観察は、次のように一般的に成立する。

問題 6.1. X_1, X_2 を向きのつけられたコンパクトな多様体として、$M_1 = T^*X_1$, $M_2 = T^*X_2$ とする。$P \subset X_1 \times X_2$を埋め込まれた部分多様体として、射影 $q_1 \colon P \to X_1$は沈み込みになっていると仮定する。このとき余法束 $N_P^*(X_1 \times X_2)$ は自然に T^*X_2 の部分束になり、商束 $T^*X_2/N_P^*(X_1 \times X_2)$ は、q_1 のファイバーに沿った余接束になることを示せ。

特に、複素多様体の範疇で考えたときには、

$$p_{1*}p_2^*([X_2]) = (-1)^{\dim(\text{ファイバー})}(\text{ファイバーのオイラー数})[X_1]$$

が成立する。

次に§§5(iv), 5(v)と同様に、$\mathrm{U}(n)\times S^1$-同変コホモロジーで合成積を計算する。ここで、S^1 は $T^*\mathcal{F}(n)$ の余接束のファイバーにスカラー倍で作用するものである。$\mathrm{U}(n)$ の対角行列の全体のトーラス T を取り、固定点を考える。$\mathcal{F}(n)$ については、補題 2.5で見たとおり、n次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元と対応する。$\mathcal{P}(i,n)$ については、固定点は二通りあり、$S_{1,i}=S_{2,i}$ で$\mathfrak{S}_n$ の元に対応するものが、最初の場合である。次の場合は、$S_{1,i}\neq S_{2,i}$ のときである。$S_{2,i}$ の方に対応する対称群の元を $w\in\mathfrak{S}_n$ とすると、$S_{1,i}$ の方に対応するものは、$w(i)$ と $w(i+1)$ が入れ替わったものである。すなわち、i と $i+1$ を入れ替える $\mathfrak{S}_n$ の元を s_i と書くと、$ws_i\in\mathfrak{S}_n$が第一の旗に対応する。つまり、

$$\mathcal{P}(i,n)^T = \{(w,w)\mid w\in\mathfrak{S}_n\}\sqcup\{(ws_i,w)\mid w\in\mathfrak{S}_n\}$$

で、$q_1^T(w,w)=w=q_2^T(w,w)$, $q_1^T(ws_i,w)=ws_i$, $q_2^T(ws_i,w)=w$ である。

先の余法束とファイバーの接束の関係から、定理 5.6の証明と同じ議論により

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_T(\mathcal{F}(n)) & \xrightarrow{-q_{1*}(e(\mathrm{Hom}(L_{2,i+1},L_{2,i}))\cup q_2^*(\cdot))} & \mathcal{H}_T(\mathcal{F}(n)) \\
{\scriptstyle \sum i_{w_2}^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \sum i_{w_1}^*} \\
\bigoplus_{w_2}\mathcal{H}_T(w_2) & \xrightarrow[q_{1*}^T(q_2^T)^*]{} & \bigoplus_{w_1}\mathcal{H}_T(w_1)
\end{array}$$

は可換である。上の固定点の記述から$q_{1*}^T(q_2^T)^*$ で $[w_2]$ は $[w_2]+[w_2s_i]$ に送られることが従う。特に、$-q_{1*}(e(\mathrm{Hom}(L_{2,i+1},L_{2,i}))\cup q_2^*(\cdot))-\mathrm{id}$ は、対称群の s_i と同じ関係式

$$s_i^2=1,\qquad s_is_j=s_js_i\quad |i-j|>1\text{のとき},\qquad s_is_{i+1}s_i=s_{i+1}s_is_{i+1} \tag{6.2}$$

を満たすことが分かる。

ここで、誘導による同型 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]\cong H_T^*(\mathrm{pt})\cong H_{\mathrm{U}(n)}^*(\mathcal{F}(n))$によって x_i が $c_1(L_i^*)$ に移り、固定点 w_2 において、L_i^* のウェイトが $x_{w_2(i)}$ であったことに注意すると、

$$i_{w_2}^*f(x_1,\dots,x_n)=f(x_{w_2(1)},\dots,x_{w_2(n)})[w_2]$$

となる。S^1のファイバーへのスカラー倍の作用を考慮して、上の可換図式で上段の写像の同変オイラー類を $e(\mathrm{Hom}(L_{2,i+1},L_{2,i})\otimes q)$ と変えると、

$$\begin{aligned}
&-q_{1*}^T\left(e(\mathrm{Hom}(L_{2,i+1},L_{2,i})\otimes q)\cup(q_2^T)^*\left(i_{w_2}^*f(x_1,\dots,x_n)[w_2]\right)\right)\\
&=q_{1*}^T\left(\frac{x_{w_2(i)}-x_{w_2(i+1)}-\hbar}{x_{w_2(i)}-x_{w_2(i+1)}}f(x_{w_2(i_1)},\dots,x_{w_2(i_n)})[w_2]\right)\\
&=\frac{x_{w_2(i)}-x_{w_2(i+1)}-\hbar}{x_{w_2(i)}-x_{w_2(i+1)}}f(x_{w_2(i_1)},\dots,x_{w_2(i_n)})\left([w_2]+[w_2s_i]\right)
\end{aligned}$$

となり、第一項、第二項をそれぞれ i_{w_2}, $i_{w_2s_i}$ で書き直すと、

$$\begin{aligned}
&-q_{1*}^T\left(e(\mathrm{Hom}(L_{2,i+1},L_{2,i})\otimes q)\cup(q_2^T)^*\right)(f)\\
&\qquad\qquad=\frac{x_i-x_{i+1}-\hbar}{x_i-x_{i+1}}f+\frac{x_{i+1}-x_i-\hbar}{x_{i+1}-x_i}s_if
\end{aligned}$$

であることが従う。ただし、$s_i f$ は、fの変数 x_i と x_{i+1} を入れ替える作用素として$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ に作用する:

$$(s_i f)(x_1 x_2 \dots x_n) = f(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},x_i,x_{i+2},\dots,x_n).$$

上と同様に、対角成分の寄与を差し引くために、この写像から恒等写像を引いて

$$\sigma_i \overset{\text{def.}}{=} -q_{1*}^T \left(e(\operatorname{Hom}(L_{2,i+1},L_{2,i})\otimes q)\cup (q_2^T)^*\right) - \mathrm{id} \tag{6.3}$$

とおくと、

$$\sigma_i f = s_i f - \frac{\hbar}{x_i - x_{i+1}}(f - s_i f) \tag{6.4}$$

となる。この作用素は、**Demazure-Lusztig作用素**とよばれる。上の計算より、第二項に現れている

$$\partial_i f \overset{\text{def.}}{=} \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}}$$

は、$q_{1*}q_2^*$ に他ならない。これは**差分商作用素 (divided difference operator)**とよばれており、Bernstein-Gelfand-Gelfand [**BGfGf73**]、Demazure [**Dem74**] により、歴史的にはこちらの発見の方が早い。

幾何学的には、$H^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathcal{F}(n))$ 上で定義されているのでそうならなければいけないのは当然であるが、 $f - s_i f$ は分母の $x_i - x_{i+1}$ で割り切れるので、二つの作用素は、多項式の空間を保っていることも分かる。また、$H^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ について線形であることも、幾何学的には当然であり、計算でも直接チェックできる。

次が成り立つ。

命題 6.5 ([**BGfGf73, Dem74**], Kostant-Kumar [**KK86**]も参照)**.**

$$\begin{gathered}\partial_i\circ\partial_i = 0,\quad \partial_i\circ\partial_j = \partial_j\circ\partial_i \quad (|i-j|>1 \text{ のとき}),\\ \partial_i\circ\partial_{i+1}\circ\partial_i = \partial_{i+1}\circ\partial_i\circ\partial_{i+1}\end{gathered} \tag{6.6}$$

$$x_i x_j = x_j x_i, \tag{6.7}$$

$$\partial_i\circ x_j - x_{s_i(j)}\circ\partial_i = \begin{cases} 0 & |i-j|>1\text{のとき}\\ 1 & j=i\text{のとき}\\ -1 & j=i+1\text{のとき}\end{cases} \tag{6.8}$$

ただし、 (6.7)と (6.8)で x_i, x_j, $x_{s_i(j)}$ は変数を掛ける作用素と見ている。

(6.6)と、置換 s_i が満たす関係式(6.2)と比べてみると、最初のものが $s_i\circ s_i = 1$ と違っているだけで、 **組み紐関係式 (braid relation)**とよばれる後ろの二つは同じである。

定義 6.9. 生成元 ∂_i $(1\le i\le n-1)$, x_j $(1\le j\le n)$ と関係式(6.6)から (6.8)で定められる $\mathbb{C}$上の代数を**nilヘッケ環 (nil-Hecke algebra)**という。$\deg\partial_i = -2$, $\deg x_j = 2$ により、次数付き代数になる。

上の次数は、コホモロジーの次数と対応して、$H^*_{\mathrm{U}(n)}(\mathcal{F}(n))$ はnilヘッケ環の次数付き表現になっていることを注意する。

次に σ_i について関係式を調べると、次が分かる。

命題 6.10 (Lusztig [**Lus88**]).

$$\begin{gathered}\sigma_i \circ \sigma_i = 1, \quad \sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i \quad (|i-j|>1 \text{ のとき}),\\ \sigma_i \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i = \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \sigma_{i+1}\end{gathered} \tag{6.11}$$

$$\sigma_i \circ x_j - x_{s_i(j)} \circ \sigma_i = \begin{cases} 0 & |i-j|>1 \text{のとき} \\ -\hbar & j=i \text{のとき} \\ \hbar & j=i+1 \text{のとき}\end{cases} \tag{6.12}$$

定義 6.13. 生成元 σ_i $(1 \le i \le n-1)$, x_j $(1 \le j \le n)$ と関係式 (6.7), (6.11)と(6.12)で定められる $\mathbb{C}$上の代数 H_{deg} を**退化アファイン・ヘッケ環 (degenerate affine Hecke algebra)**という。$\deg \sigma_i = -2$, $\deg x_j = 2$, $\deg \hbar = 2$ により、次数付き代数になる。

問題 6.14. (1) 命題 6.5を証明せよ。
(2) 命題 6.10を証明せよ。
(3) H_{deg} は、$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \otimes \mathbb{C}[\hbar, x_1, \ldots, x_n]$ と線形空間として同型であることを証明せよ。

問題 6.15. この節の計算は、一般の複素半単純リー群に付随した旗多様体の場合にも適用できる。(旗多様体の定義などについては、[**FH91**]を参照せよ。) 旗多様体を記述するための、リー環、ワイル群などの用語を身に着けたら、あとは$\mathcal{P}(i,n)$ の定義を、一般の旗多様体の場合にどうすればいいかも自然に分かるはずで、そのあとの計算は基本的には同じである。これを各自確かめよう。

6(ii). アファイン・ヘッケ環の表現.

*** 同変K群を用いたアファイン・ヘッケ環の構成を紹介する予定 ***

CHAPTER 4

ジョルダン箙多様体とハイゼンベルグ代数のヤンギアンの表現

この章では、まず箙多様体の定義と基本的な性質を簡潔に紹介し、ジョルダン箙

に付随した箙多様体の同変コホモロジーの上に、ハイゼンベルグ代数のヤンギアンの表現を実現する。ここでは結果を引用するに留めるが、ジョルダン箙に付随した箙多様体は、射影平面上のねじれのない枠付き連接層 (E, φ)

- E は $\mathbb{C}P^2$ 上のねじれのない連接層で、無限遠の直線ℓ_∞ の近傍で局所自由なもの
- 枠 $\varphi\colon E|_{\ell_\infty} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r}$ は Eの無限遠への制限と自明ベクトル束のあいだの同型写像

のモジュライ空間と同じであることが知られている。ここで、ℓ_∞は、$\mathbb{C}P^2$の同次座標を $[z_0 : z_1 : z_2]$ としたとき、$z_0 = 0$ で定義されるものである。モジュライ空間の中で E が局所自由なもののなす開集合は、$\mathbb{R}^4$ 上の曲率が L^2 に属するインスタントンのモジュライ空間と同じであることも知られており、そのためにジョルダン箙に付随した箙多様体は、理論物理学の研究にもしばしば現れる。ハイゼンベルグ代数のヤンギアンの表現は、理論物理学者の Alday-Gaiotto-立川 (名前の頭文字を取って、AGTとよばれる)の研究を、数学的に厳密に理解しようとする中から Schiffmann-Vasserot [**SV13**], Maulik-Okounkov [**MO19**] によって構成されたものである。

このジョルダン箙多様体の同変積分として定義されるNekrasov の分配関数 [**Nek03**] は、**** 加筆予定 ****

歴史的には、ジョルダン箙と違って頂点を自分自身に結ぶ辺がない箙についての箙多様体と、カッツ・ムーディー・リー環、そのヤンギアン、量子ループ代数の表現の関係が先に見出された。[**Nak94, Nak98, VV99, Nak01, Var00**] が、この本の趣旨に従い、トーラス作用の固定点の記述が易しいジョルダン箙の場合を先に扱うことにする。

10. 箙多様体

この節では、箙多様体の定義を与える。

一般的な定義の動機付けを与えるために、アファイン直線上のn点のヒルベルト概型について導入し、これをアファイン平面の場合に変更、そしてさらに一般の場合、と進むことにする。

10(i). アファイン直線上の点のヒルベルト概型. まず、基本的な1次元の場合を考える。第1章の同変コホモロジーの台のときにも言及したように、一変数多項式環 $\mathbb{C}[x]$ の極大イデアルの全体は、アファイン直線 $\mathbb{C}$ の点と一対一に対応

し、また $\mathbb{C}$ 上の多項式関数の全体のなす可換環が $\mathbb{C}[x]$ である。この対応は $\mathbb{C}$ の点 a に対して、$(x-a)$ で生成される極大イデアルを対応させるものである。a で関数の値を取る写像 $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}; f(x) \mapsto f(a)$ は、商写像 $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]/(x-a)$ の像の $\mathbb{C}[x]/(x-a)$ を $\mathbb{C}$ に同型に移すものとして捉えられる。

この対応を、より一般のイデアル I と、商 $\mathbb{C}[x]/I$ の場合に拡張しよう。例えば、射影空間のコホモロジー環 $\mathbb{C}[x]/(x^N)$ は $I=(x^N)$ に対応する。これも、何らかの意味で $\mathbb{C}$ の中にある幾何学的な対象として理解したい。

可換環論、$\mathbb{C}[x]$ は単項イデアル整域であり、したがって I は多項式 f の生成するイデアル (f) である、と学んだ。多項式 $f(x)$ は、$\mathbb{C}$上では $(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_N)$と因数分解し、$(f)$ に N 個の点のなす部分集合 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_N\} \subset \mathbb{C}$ を対応させるのは、自然であろう。ここで気を付けなければいけないのは、$\alpha_i=\alpha_j$ $(i \neq j)$となる可能性があることで、その場合は α_i は重複度 2、もしくはもっと α_k, ... が一致している場合は、より高い重複度を与えるべきであることである。イデアル $I=(x^N)$ は、N 個の点 α_1, ..., $\alpha_N \in \mathbb{C}$ が定めるイデアル $(f)=(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_N)$ の α_1, ..., α_N がすべて 0 に収束した極限で、原点が重複度 N を持ち、その意味で$\mathbb{C}$内の'N個の点'の部分集合であると考える。代数幾何では、このようなものも部分多様体を一般化した幾何学的な対象として取扱う。

定義 10.1. $\mathbb{C}$ の**閉部分スキーム (closed subscheme)**とは、イデアル $I \subset \mathbb{C}[x]$ のこととする。

なお、この定義は、$\mathbb{C}$の特殊性を使っているので、一般のスキーム X の閉部分スキームの定義ではないことに注意すること。代数幾何において、一般の場合の定義を学び、$X=\mathbb{C}$ の場合に適用すると、この定義になるということを確認してほしい。

さて、$\mathbb{C}$のn個の点の**ヒルベルト概型**とは、$\mathbb{C}$の閉部分スキームであって、$\mathbb{C}[x]/I$ が $\mathbb{C}$-線形空間として n次元であるものの全体のなす集合とする。これを $\mathbb{C}^{[n]}$ で表す。

$$\mathbb{C}^{[n]} \overset{\text{def.}}{=} \left\{ I \subset \mathbb{C}[x] \,\middle|\, I \text{ はイデアルで、} \dim \mathbb{C}[x]/I = n \right\}$$

集合として定義して、その構造を何も考えていないが、上の説明から、重複度付きで数えて N 個の点の全体のなす集合であるから、n次対称積

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) = \overbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}^{n\text{ 個}} / \mathfrak{S}_n$$

と同じであるべきで、これで位相空間とする。

一方で、I は単項イデアルで、最高次の係数が1のモニック多項式 $f(x) = x^n + e_1 x^{n-1} + \dots + e_n$ で生成される。したがって、

$$\mathbb{C}^{[n]} \ni (f) \longleftrightarrow (e_1,\dots,e_n) \in \mathbb{C}^n$$

と $\mathbb{C}^n$ とも同じである。両者をつなげば、

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) \ni (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \mod \mathfrak{S}_n \longleftrightarrow (e_1,\dots,e_n) \in \mathbb{C}^n$$

となるが、この対応は $e_i = (-1)^i \alpha_i$ のi 次初等対称多項式 で与えられる。実際、$f(x) = (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n) = x^n + e_1 x^{n-1} + \dots$ だから、当然である。

また、$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C})$ 上の多項式関数の全体のなす可換環は、$\mathbb{C}[\alpha_1,\dots,\alpha_n]^{\mathfrak{S}_n}$ であり、対称式の基本定理により

$$\mathbb{C}[\alpha_1,\dots,\alpha_n]^{\mathfrak{S}_n} \cong \mathbb{C}[e_1,\dots,e_n]$$

となって、右辺が $\mathbb{C}^n$ 上の多項式関数の全体のなす可換環になる、と見ることができる。

次に、ヒルベルト概型の行列による表示を与える。あとで、アファイン直線ではなくアファイン平面の上のn点のヒルベルト概型の行列による表示を与える。これは、ヒルベルト概型の接空間の記述を与える使われる。

アイデアは、$n\times n$の複素行列 B が与えられたとき $V=\mathbb{C}^n$ に $\mathbb{C}[x]$-加群の構造を

$$\mathbb{C}[x]\ni f\mapsto f(B)\in \mathrm{End}(V)$$

で与えるというものである。つまり、xを掛けるという作用素が B に写される。このとき B と B' が共役、すなわち $B'=gBg^{-1}$ $(g\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}))$ とすると、V と B' から決まる $\mathbb{C}[x]$-加群 V' は同型になる。逆に V, V' が $\mathbb{C}[x]$-加群として同型ならば、B と B' は共役である。

イデアルIから決まる $\mathbb{C}[x]$-加群 $\mathbb{C}[x]/I$ は、任意のものではなく、$1 \mod I\in \mathbb{C}[x]/I$ を**巡回ベクトル (cyclic vector)**として持つ、という性質を持つ。ここで、$\mathbb{C}[x]$-加群 V の巡回ベクトル $v\in V$とは、$v,\, x\cdot v,\cdots, x^n\cdot v,\cdots$ が V を張るときを言う。逆に、V が巡回ベクトル v を持てば、

$$I=\{f(x)\in\mathbb{C}[x]\mid f(x)v=0 \text{ in } V\}$$

とおくことで、イデアルが復元できる。たとえば、$V=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\cdots$ で、各 $\mathbb{C}$ に x は 0 で作用するものとすると、巡回ベクトルは持たない。

そこで、

$$\left\{(B,a)\in \mathrm{End}(V)\times \mathrm{Hom}(\mathbb{C},V)\,\middle|\, \begin{array}{l}a(1)\text{は}B\text{に関する巡回ベ}\\ \text{クトルである}\end{array}\right\}\Big/ \mathrm{GL}(V)$$

と定義する。今までの説明によって、これは $\mathbb{C}^{[n]}$ と、自然な全単射を持つ。

$B^k a(1)$ がそれよりも前の $a(1),\ldots, B^{k-1}a(1)$ の一次結合で書ければ、それ以降の $B^{k+1}a(1), B^{k+2}a(1),\ldots$ もそうなるから、$a(1)$ が B に関する巡回ベクトルであれば、$a(1), Ba(1),\ldots, B^{n-1}a(1)$ は V の基底になる。したがって、(B,a) を

$$B=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & b_1\\ 1 & & 0 & b_2\\ & \ddots & & \vdots\\ 0 & & 1 & b_n\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

という形に書くことができる。$\det(z-B)=z^n-b_nz^{n-1}-\cdots-b_1$ と特性多項式から $b_1,\ldots,b_n$ を読み取れるので、(B,a) の $\mathrm{GL}(V)$-軌道と上の形の行列はちょうど一点で交わる。したがって、上の空間は $\mathbb{C}^n$ と複素多様体として同型であることも分かる。

Bibliography

[AB84] M. F. Atiyah and R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, Topology **23** (1984), no. 1, 1–28.

[BGfGf73] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel′ fand, and S. I. Gel′ fand, *Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P*, Uspehi Mat. Nauk **28** (1973), no. 3(171), 3–26.

[BT82] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[BV82] N. Berline and M. Vergne, *Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **295** (1982), no. 9, 539–541.

[BV83] ———, *Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 2, 539–549.

[Dem74] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 53–88.

[FH91] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991, A first course, Readings in Mathematics.

[Ful97] W. Fulton, *Young tableaux*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, With applications to representation theory and geometry.

[Ful98] ———, *Intersection theory*, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Gin91] V. Ginzburg, *Lagrangian construction of the enveloping algebra $U(\mathrm{sl}_n)$*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** (1991), no. 12, 907–912.

[GV93] V. Ginzburg and É. Vasserot, *Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n*, Internat. Math. Res. Notices (1993), no. 3, 67–85.

[KK86] B. Kostant and S. Kumar, *The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **83** (1986), no. 6, 1543–1545.

[Lus88] G. Lusztig, *Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1988), no. 67, 145–202.

[Mac95] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[MO19] D. Maulik and A. Okounkov, *Quantum groups and quantum cohomology*, Astérisque (2019), no. 408, ix+209, arXiv:1211.1287 [math.AG].

[Nak94] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 2, 365–416.

[Nak98] ———, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **91** (1998), no. 3, 515–560.

[Nak01] ———, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 1, 145–238 (electronic).

[Nek03] N. A. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2003), no. 5, 831–864.

[NY05] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, Invent. Math. **162** (2005), no. 2, 313–355.