10(ii). アファイン平面上の点のヒルベルト概型. 次に $X = \mathbb{C}^2$ として、Xのn個の点のヒルベルト概型を

$$X^{[n]} \overset{\text{def.}}{=} \left\{ I \subset \mathbb{C}[x,y] \,\middle|\, I\text{はイデアルで、}\dim \mathbb{C}[x,y]/I = n \right\}$$

と定義する。

$\mathbb{C}$ のときと同様に、次の行列表示がある。Vをn次元の複素ベクトル空間としたとき

$$X^{[n]} = \left\{ (B_1, B_2, a) \,\middle|\, \begin{array}{l} [B_1, B_2] = 0, \\ a(1)\text{は}B_1,\ B_2 \text{ に関する巡回ベク} \\ \text{トルである} \end{array} \right\} \Big/ \mathrm{GL}(V)$$

となる。ただし、B_1, B_2 は $\mathrm{End}(V)$ の元、a は $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, V)$の元である。また、$a(1)$ が B_1, B_2 に関する巡回ベクトルであるとは、$a(1)$ を含み B_1, B_2 で不変な V の部分空間 T は、$T = V$ しかないときをいう。対応は、$a(1) = 1 \mod I$, B_1, B_2 を x, y を掛ける写像と定義すればよい。すると $[B_1, B_2] = 0$が成り立ち, $a(1)$ は巡回ベクトルである。逆写像は、$\mathbb{C}$ のときと同じように

$$I = \{ f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \mid f(B_1, B_2)a(1) = 0 \}$$

とおけばよい。

$X^{[n]}$ の元にどのようなものがあるか、簡単な場合に見てみよう。

例 10.2. (1) $\mathbb{C}^2$ の相異なる n 個の点 $p_1 = (x_1, y_1), \dots, p_n = (x_n, y_n)$ を取ってきたときに、

$$I = \{ f \in \mathbb{C}[x,y] \mid f(p_1) = \cdots = f(p_n) = 0 \}$$

は、$X^{[n]}$の点である。対応する行列は

$$B_1 = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n), \quad B_2 = \mathrm{diag}(y_1, \dots, y_n), \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(2) $[\lambda : \mu] \in \mathbb{C}P^1$としたときに

$$I = \{ f \in \mathbb{C}[x,y] \mid f(0) = 0, \quad \mu f_x(0) + \lambda f_y(0) = 0 \}$$

とおくと、$X^{[2]}$の点である。対応する行列は

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(2)の例が、$\mathbb{C}$ の場合と $\mathbb{C}^2$ の場合の大きな違いを表している。$\mathbb{C}$ の場合は、重複度を考えれば、いくつかの点が一致しているときでも情報が失われなかったが、$\mathbb{C}^2$ の場合には、関数の微分が消える方向に応じて異なるイデアルが対応しているのである。さらに、$n = 2$でIが原点で消える関数の極大イデアルの中に含まれている場合は、上の形になることも明らかである。

$I \in X^{[n]}$ に対して、$\mathbb{C}[x,y]/I$ の台 $\mathrm{Supp}(\mathbb{C}[x,y]/I)$ を考えることにより、対称積 $\mathrm{Sym}^n X$ の元が定まる。ただし、§4(ii)では、Supp を Spec の中のザリスキー閉集合として定義したが、ここでは Supp を極大イデアルの全体の $\mathrm{Spm}\,\mathbb{C}[x,y] = \mathbb{C}^2$ の中で考えることにする。また、各点ごとに重複度をきちんと定義しないと対称積の元を定めないので、詳細については 問題 10.3とする。ともかく、写

像$\pi\colon X^{[n]} \to \mathrm{Sym}^n X$が定義される。$\mathbb{C}$のときはこの写像が全単射になったが、$\mathbb{C}^2$ の場合は上で見たように、単射ではなくなっている。

写像 π は、行列表示を用いると次のように与えられる。$[B_1, B_2] = 0$ であるから、B_1, B_2 を同次に三角化する：

$$B_1 = \begin{pmatrix} x_1 & * & \cdots & * \\ 0 & x_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & x_n \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} y_1 & * & \cdots & * \\ 0 & y_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & y_n \end{pmatrix}$$

このとき、$((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \mod \mathfrak{S}_n$ が $\pi(B_1, B_2, a)$ の行き先である。

問題 10.3. (1) $\mathrm{Supp}(\mathbb{C}[x,y]/I)$ の各点に重複度を定義し、π の定義を完成せよ。また、その定義のもとで、上の行列表示で与えられるものと一致することを証明せよ。

(2) $\mathbb{C}^{[n]}$ の行列表示 (B, a) において、$\mathrm{Sym}^n \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n$ への写像は、$\det(z - B)$の係数であった。同様に、π を B_1, B_2 から特性多項式、もしくはその変種を用いて定義せよ。

10(iii). ヒルベルト概型へのトーラス作用の固定点. アファイン平面 $X = \mathbb{C}^2$ には、$\mathrm{GL}(2)$ が自然に作用する。$\mathrm{GL}(2)$ の極大トーラス $T = (\mathbb{C}^\times)^2$ を対角行列の全体と取ると、Xの座標 (x, y) に対して

$$(x, y) \mapsto (t_1 x, t_2 y)$$

で与えられる。この作用は、ヒルベルト概型 $X^{[n]}$への作用を誘導する:

$$I \mapsto (t_1, t_2) \cdot I \overset{\text{def.}}{=} \{ f(x,y) \mid f(t_1 x, t_2 y) \in I \}.$$

たとえば I が点 (a, b) に対応するイデアルとすると、$I = (x - a, y - b)$ であり、$(t_1, t_2) \cdot I = (x - t_1 a, y - t_2 b)$ となる。

命題 10.4 (Ellingsrud-Strømme [**ESm87**]). $X^{[n]}$ の T-作用の固定点は、単項式で生成されるイデアル I であり、n の分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots)$ に$I = (y^{\lambda_1}, xy^{\lambda_2}, \dots, x^l)$ と対応する。ここで l は、λ の長さで λ の 0 でない成分の個数である。

単項式で生成されるイデアル (以後、単に**単項式イデアル**とよぶ)と分割の対応は、ヤング図形で図 3で図示すると分かりやすい。

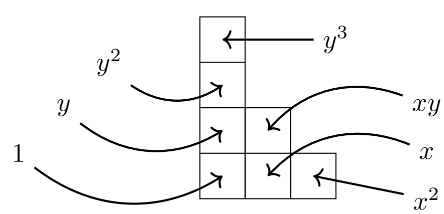

図 3. 単項式イデアルとヤング図形

証明. 二変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ の線形空間として基底として、単項式の全体 $x^i y^j$ $(i, j \geq 0)$ を取る。この基底はTの作用に関して、同時固有値が $t_1^i t_2^j$ の同時固有ベクトルである。すべての固有値が相異なるので、$I \subset \mathbb{C}[x,y]$が T-不変な部

分ベクトル空間であるとしたら、$\{x^i y^j\}$ の部分集合で張られるものでなければならない。そこで、単項式を図 3のように図示して、I に入らないものを四角の箱で囲むことにする。$\mathbb{C}[x,y]/I$ はn次元だから、n 個の箱が配位される。 I はイデアルなので、箱 s に対応する単項式が I に入れば、s の右、上にある箱に対応する単項式も I に属する。これは、箱がヤング図形をなしている、を意味する。第一列目の箱の数を λ_1, 第二列目を $\lambda_2, \ldots$ とすれば、$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ は分割であり、一行目の右端の単項式は x^{l-1} である。

イデアルの生成元は、第一行目の一番上の箱の一つ上の単項式 y^{λ_1}, 二行目の一番上の箱の一つ上の単項式 $xy^{\lambda_2}, \ldots,$ と取れるので、主張が従う。 □

単項式イデアル I の行列表示も容易である。ヤング図形の箱に対応する単項式が $V = \mathbb{C}[x,y]/I$ の基底になっているので、箱をVのベクトルと思ってB_1, B_2, a を表せば良い。ヤング図形の箱は、B_1 により一つ右の箱、B_2により一つ上の箱、のベクトルに写される。もしもヤング図形の外に出てしまって対応する箱がない場合は、0に写される。また、$a(1)$は、$1 \mod I$ であるから、左下の角にある箱のベクトルである。

10(iv). 複素多様体であること. 次に、$X^{[n]}$、より一般にジョルダン箙に付随した箙多様体が複素多様体であることを示そう。

単に $[B_1, B_2] = 0$ を定義関係式とみなし、左辺の微分を計算してみると

$$[\dot{B}_1, B_2] + [B_1, \dot{B}_2]$$

である。これを $(\dot{B}_1, \dot{B}_2) \in \mathrm{End}(V)^{\oplus 2}$ を$\mathrm{End}(V)$ に送る線形写像とみて、ξ が像とトレースで決まる内積で直交していると仮定すると、

$$[B_1, \xi] = 0 = [B_2, \xi]$$

が成り立つ。このような ξ は $\xi(a(1)) \in V$ を決定すれば決まるので、上の線形写像の余核は V と同型であることが従う。特に、微分の階数が一定なので、複素多様体であることが従う。(たとえば、*** 参照) しかし、あとでより一般の箙多様体を考えるときの都合も考えて、少々回り道をして証明を与えよう。上の考察を使って、微分が全射になるように

$$\begin{gathered}\mu\colon \mathbf{M} \overset{\text{def.}}{=} \mathrm{End}(V)^{\oplus 2} \oplus \mathrm{Hom}(W,V) \oplus \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{End}(V) \\ \mu(B_1, B_2, a, b) = [B_1, B_2] + ab\end{gathered} \tag{10.5}$$

と、変数を増やしておく。また、ヒルベルト概型の場合は、$W = \mathbb{C}$ であるが、より一般的にW は r次元の複素ベクトル空間であるときも考えることにする。*** で紹介するように、階数rの射影平面上のねじれのない枠付き連接層で $c_2 = n$ となるもののモジュライ空間となることが知られている。

巡回ベクトルの条件を一般化し、次の**安定性**の条件を導入する。

定義 10.6. $(B_1, B_2, a, b) \in \mathbf{M}$ が**安定**であるとは、$\mathrm{Im}\, a$を含み、B_1, B_2 で不変なVの部分空間T は、$T = V$しかないときをいう。

$\dim W = 1$ のときは、$\mathrm{Im}\, a = \mathbb{C}a(1)$ だから、たしかに巡回ベクトルの条件と同じである。$\mathbf{M}$ の安定な点の全体のなす開集合を$\mathbf{M}^{\mathrm{st}}$、$\mu^{-1}(0)$ の中で安定な点の全体のなす開集合を$\mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}}$で表すことにする。

ジョルダン箙に付随した箙多様体を

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}(n,r) \equiv \mathfrak{M}(V,W) &\overset{\text{def.}}{=} \mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}} / \mathrm{GL}(V) \\ &= \left\{ (B_1,B_2,a,b) \in \mathbf{M} \,\middle|\, \begin{array}{l} \mu(B_1,B_2,a,b) = [B_1,B_2]+ab = 0 \\ (B_1,B_2,a,b)\text{は安定である} \end{array} \right\} \Big/ \mathrm{GL}(V)\end{aligned}$$

と定義する。ベクトル空間を指定しなくても誤解の恐れがないときには、単に$\mathfrak{M}$で表す。ベクトル空間の次元だけを使いたいときは、$\mathfrak{M}(n,r)$ で表す。

補題 10.7. $(B_1,B_2,a,b) \in \mathbf{M}$ は、安定であると仮定する。このとき μ の微分 $d\mu$ は全射である。特に、$\mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}}$ は、(n^2+2nr)次元の複素多様体である。

証明. ξ が $d\mu$ とトレースの定める内積に関して直交しているとすると、

$$[B_1,\xi] = 0 = [B_2,\xi], \quad \xi a = 0, \quad b\xi = 0$$

が成り立つ。$T = \operatorname{Ker}\xi$ に安定性の条件を適用して、$\operatorname{Ker}\xi = V$ であるので、$\xi = 0$ でなければならない。 □

定理 10.8. 箙多様体 $\mathfrak{M}$ は、 $2nr$次元の複素多様体の構造を持ち、 $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}}$は、その上の$\mathrm{GL}(V)$-主束である。

証明. $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}}$ が複素多様体になることは、すでに補題 10.7で示してあった。

次に、$\mathrm{GL}(V)$の作用が自由であることを示す。実際、$g \in \mathrm{GL}(V)$ が (B_1,B_2,a,b) を固定するとすると、$ga = a$, $gB_1 = B_1 g$, $gB_2 = B_2 g$ が成り立ち、$T = \operatorname{Ker}(g - \mathrm{id})$ に安定の条件を適用して、$g = \mathrm{id}$ を得る。

次に作用が固有であることをチェックしよう。 $\mathbf{M}^{\mathrm{st}} \times \mathbf{M}^{\mathrm{st}}$ 内の点列

$$\begin{aligned}\big((B_{1,n},B_{2,n},a_n,b_n),& \\ &(B'_{1,n},B'_{2,n},a'_n,b'_n) = (g_n B_{1,n} g_n^{-1}, g_n B_{2,n} g_n^{-1}, g_n a_n, b_n g_n^{-1})\big)\end{aligned}$$

が $n \to \infty$ で$((B_{1,\infty},B_{2,\infty},a_\infty,b_\infty),(B'_{1,\infty},B'_{2,\infty},a'_\infty,b'_\infty))$に $\mathbf{M}^{\mathrm{st}} \times \mathbf{M}^{\mathrm{st}}$ 内で収束していると仮定する。このとき g_n が発散すると仮定して矛盾を導けばよい。

$$g_n B_{1,n} = B'_{1,n} g_n, \quad g_n B_{2,n} = B'_{2,n} g_n \quad g_n a_n = a'_n, \quad b_n = b'_n g_n$$

が成り立っている。$\|g_n\|^2 = \operatorname{tr}(g_n {}^t\overline{g_n})$ が $n \to \infty$ で発散していると仮定する。このとき$\xi_n = g_n/\|g_n\|$ はノルムが 1 であるから、収束する部分列を持つ。極限をξ_∞ とおくと、

$$\xi_\infty B_{1,\infty} = B'_{1,\infty}\xi_\infty, \quad \xi_\infty B_{2,\infty} = B'_{2,\infty}\xi_\infty, \quad \xi_\infty a_\infty = 0, \quad 0 = b'_\infty \xi_\infty$$

が成り立つ。例えば、三番目の式は $(g_n/\|g_n\|)a_n = a'_n/\|g_n\|$の極限を取ったものである。$(B_{1,\infty},B_{2,\infty},a_\infty,b_\infty)$ が安定であることから、$\xi = 0$ が従うが、これは、作り方から $\|\xi\| = 1$ であることに反する。

また、$\|g_n^{-1}\| \to \infty$と仮定すると、同様にして $(B'_{1,\infty},B'_{2,\infty},a'_\infty,b'_\infty)$ が安定であることに反する。したがって、g_n は G_V のコンパクト集合にとどまり、作用は固有である。

定理 3.3により、商空間が複素多様体であることが従う。次元は$\dim \mu^{-1}(0) - \dim \mathrm{GL}(V) = \dim \mathbf{M}^{\mathrm{st}} - 2\dim \mathrm{GL}(V)$ で、$2nr$ である。 □

$\dim W = 1$のときは、人工的に付け加えた変数 b は、次の補題により消去できる。($\mathbb{C}$が、標数0であることを暗に使っていることに注意しよう。)

補題 10.9. $\dim W = 1$ と、$\mu(B_1, B_2, a, b) = 0$ を仮定する。 $\widehat{B}$ を B_1, B_2 を掛けてできる非可換単項式とすると、

$$b\widehat{B}a = 0$$

が成り立つ。

証明. $\widehat{B}$に出てくる B_1, B_2 の個数に関する帰納法で証明する。$\widehat{B} = 1$ のときは、

$$ba = \mathrm{tr}(ab) = -\mathrm{tr}([B_1, B_2]) = 0$$

と正しい。

個数が $k-1$ 個まで正しいとして、$\widehat{B}$ が k 個の積であるとする。$\widehat{B} = \cdots B_2 B_1 \cdots$ と途中に $B_2 B_1$ が出てきているとすると、$B_2 B_1 = B_1 B_2 + ab$ を用いて、$b\widehat{B} = (\cdots B_1 B_2 \cdots) + b(\cdots ab \cdots)$ と書き直す。帰納法の仮定により、第二項は0である。したがって、m_1, m_2 を $\widehat{B}$ に現れる B_1, B_2 の個数としたとき、$b\widehat{B} = bB_1^{m_1}B_2^{m_2}$が成り立つ。特に、$\widehat{B} = B_1^{m_1}B_2^{m_2}$ $(m_1 + m_2 = k)$の場合のみ考えればよい。このとき

$$b\widehat{B}a = \mathrm{tr}(\widehat{B}ab) = -\mathrm{tr}(B_1^{m_1}B_2^{m_2}[B_1, B_2]) = -\mathrm{tr}(B_1^{m_1}[B_2^{m_2}, B_1]B_2)$$

である。$m_2 = 0$の場合は、0であることが分かったので、$m_2 > 0$ と仮定してよい。真ん中に出てくる $[B_2^{m_2}, B_1]$ は

$$\sum_{l=0}^{m_2-1} B_2^l [B_2, B_1] B_2^{m_2-l-1}$$

と展開されるが、$[B_2, B_1] = ab$ を用いて書き直すと

$$-\sum_{l=0}^{m_2-1} \mathrm{tr}(B_1^{m_1}B_2^l ab B_2^{m_2-l}) = -\sum_{l=0}^{m_2-1} bB_2^{m_2-l}B_1^{m_1}B_2^l a$$

となる。上で証明したことから、各項は $-bB_1^{m_1}B_2^{m_2}a = -b\widehat{B}a$ に等しいので、$(m_2+1)b\widehat{B}a = 0$ となり、$b\widehat{B}a = 0$ が従う。 □

定理 10.10. $\mathfrak{M}(n, 1) = X^{[n]}$ である。

10(v). シンプレクティック商. この節では寄り道をして、商 $\mathfrak{M} = \mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}} / \mathrm{GL}(V)$ が**シンプレクティック商**とよばれるものの例であり、特にシンプレクティック多様体の構造を持つことを説明する。

Xをシンプレクティック多様体とし、ωをその上のシンプレクティック形式とする。§5(i)のようにC^∞級多様体の中で考えてもよいが、$\mathfrak{M}$ の場合に応用するためには、複素多様体の範疇で考える。

Gをリー群とし、複素多様体の範疇で考える場合には複素リー群 (例えば、前節のように $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) とする。$G$は X にシンプレクティック形式を保って作用すると仮定する。リー環の元 $\xi \in \mathfrak{g}$ が、X上に定めるベクトル場を $\xi^\#$ とおく。このとき、シンプレクティック形式に $\xi^\#$の内部積 $\iota_{\xi^\#}$ を適用すると、カルタンの公式 (***) により

$$d\iota_{\xi^\#}\omega = L_{\xi^\#}\omega - \iota_{\xi^\#}d\omega$$

となる。Gがωを保つという仮定から、$L_{\xi^\#}\omega = 0$ である。また、ωがシンプレクティック形式であることから、$d\omega = 0$ である。したがって、$\iota_{\xi^\#}\omega$は d-閉な1次微分形式である。ポアンカレの補題 (複素多様体の範疇では、ドルボーの補題) *** により、d-閉な1次微分形式は、完全であり、$dH_\xi = \iota_{\xi^\#}\omega$ となる関数 H_ξ が取れ

る。一般には、H_ξは必ずしも存在しないが、存在するとき H_ξ は ξ に対応する**ハミルトニアン関数**であるという。

定義 10.11. Gのリー環 $\mathfrak{g}$の線形空間としての双対空間を $\mathfrak{g}^*$ で表す。$\mu\colon X \to \mathfrak{g}^*$ が、XへのGの作用に関する**運動量写像**であるとは、

(1) $\xi \in \mathfrak{g}$ に対し、$\langle \mu, \xi \rangle$ は ξ に対応するハミルトニアン関数である。すなわち、$d\langle \mu, \xi \rangle = \iota_{\xi^\#}\omega$ が成り立つ。

(2) μ は G-同変である。すなわち、$\mu(gx) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\,\mu(x)$ がすべての $x \in X$, $g \in G$ に対して成り立つ。ここで、$\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}$ は随伴写像$\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ の双対写像$\in \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$ である。

(2) より、$\mu^{-1}(0)$ は Gの作用で保たれていることに注意する。

補題 10.12. G の $\mu^{-1}(0)$ への作用が、高々離散的な固定部分群しか持たないと仮定する。すなわち、ある点$x \in X$について、$\xi^\#$ が x で消えているならば、$\xi = 0$でなければならないとする。このとき、$\mu^{-1}(0)$ 上 $d\mu$ は全射である。したがって、$\mu^{-1}(0)$ は X に埋め込まれた部分多様体である。

証明. 運動量写像の定義から $d\langle \mu, \xi \rangle = \iota_{\xi^\#}\omega$ である。ω が非退化なので、これが 0 になることと、$\xi^\#$ が消えることが同値であることに注意すれば、結論が従う。 □

さらに強く、Gの$\mu^{-1}(0)$への作用は自由であるとしよう。商空間がうまく定義できるように、固有であることも仮定する。すると $\mu^{-1}(0)/G$ は多様体である。

$i\colon \mu^{-1}(0) \to X$ を包含写像、$\pi\colon \mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/G$ を商写像とする。ω の $\mu^{-1}(0)$ への制限 $i^*\omega$ を考える。運動量写像の定義から次の二つの性質が成り立つ。

- $i^*\omega$ は $\xi^\#$ を内部積すると0になる。すなわち、πの微分の核のベクトルを代入すると0になる。
- Gの作用で不変である。

このとき、商空間 $\mu^{-1}(0)/G$ の多様体の構造の定義から、$\mu^{-1}(0)/G$上の二次微分形式 ω^{red} であって、 $\pi^*\omega^{\mathrm{red}} = i^*\omega$ となるものを

$$\omega^{\mathrm{red}}_{[x]}(v, w) = \omega_x(\tilde{v}, \tilde{w})$$

として定義することができる。ここで、$x \in \mu^{-1}(0)$ で、$[x]$ は対応する商空間 $\mu^{-1}(0)/G$の点、v, $w \in T_{[x]}(\mu^{-1}(0)/G)$で、$\tilde{v}$, $\tilde{w}$は、商を取る前の接空間 $T_x\mu^{-1}(0)$ のベクトルで、$\pi_*(\tilde{v}) = v$, $\pi_*(\tilde{w}) = w$ となるものである。上の注意により、$\omega^{\mathrm{red}}_{[x]}$ は、この定義でwell-defined になる。

補題 10.13. $\omega^{\mathrm{red}}_{[x]}$ は、商空間の接空間 $T_{[x]}(\mu^{-1}(0)/G)$ 上の二次形式として非退化である。

証明. 運動量写像の定義から、$\mathrm{Ker}\, d\mu$ は $\{\xi^\# \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$ の、シンプレクティック形式に関する直交補空間である。したがって、ω は $\mathrm{Ker}\, d\mu/\{\xi^\# \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$ 上でwell-defined であり、さらに非退化である。 □

外微分作用素 d と π^*, i^* が可換であることに注意して

$$\pi^* d\omega^{\mathrm{red}} = di^*\omega = i^*d\omega = 0 \tag{10.14}$$

であるが、π が沈み込み写像で π^* は単射であることから $d\omega^{\mathrm{red}} = 0$ が成り立つ。つまり、ω^{red} は閉形式である。したがって、次を得る。

定理 10.15 (シンプレクティック商)**.** $\mu^{-1}(0)/G$ は $\pi^*\omega^{\mathrm{red}} = i^*\omega$ で特徴づけられるシンプレクティック形式 ω^{red} を持つ。

定義 10.16. $\mu^{-1}(0)/G$ をレベル0における、 X のGによる**シンプレクティック商**という。

我々の設定に戻る。(10.5)で導入した $\mathbf{M}$ は$\mathbf{N} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathrm{End}(V) \oplus \mathrm{Hom}(W, V)$として、$\mathbf{N} \oplus \mathbf{N}^*$ という形をしているので、標準的なシンプレクティック形式を持つ。$\xi \in \mathrm{Lie}\,\mathrm{GL}(V) = \mathrm{End}(V)$ が生成するベクトル場 $\xi^\#$ は、$(B_1,\, B_2,\, a,\, b)$ において

$$([\xi, B_1], [\xi, B_2], \xi a, -b\xi)$$

を値として取る。一方、μ の定義によって

$$\begin{aligned} d\langle \mu, \xi\rangle(\dot{B}_1, \dot{B}_2, \dot{a}, \dot{b}) &= \mathrm{tr}\left(\left([\dot{B}_1, B_2] + [B_1, \dot{B}_2] + \dot{a}b + a\dot{b}\right)\xi\right) \\ = \mathrm{tr}\left(-\dot{B}_1[\xi, B_2] + \dot{B}_2[\xi, B_1] + \dot{a}b\xi + \dot{b}\xi a\right) \end{aligned}$$

である。これは、ベクトル $(\dot{B}_1,\, \dot{B}_2,\, \dot{a},\, \dot{b})$ と、ベクトル $([\xi, B_1],\, [\xi, B_2],\, \xi a,\, -b\xi)$ のシンプレクティック形式に関するペアリングである。したがって、μ は運動量写像であり、$\mathfrak{M} = \mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}}/G$ はシンプレクティック商である。特に、箙多様体 $\mathfrak{M}$ はシンプレクティック多様体の構造を持つ。

注 10.17. この本では取り扱わないが、より一般のレベルにおける商を定義することができる。実際、$c \in \mathfrak{g}^*$ とするとき、部分群$\mathrm{Stab}_G(c) = \{g \in G \mid \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}(c) = c\}$ は、$\mu^{-1}(c)$ に作用する。上と同じ定義で ω^{red} は well-defined であり、d-閉である。 ω^{red}が非退化であることを見るために、$v \in T_{[x]}(\mu^{-1}(c)/\,\mathrm{Stab}_G(c))$ に対して、そのリフト $\tilde{v} \in T_x\mu^{-1}(c)$ を取る。すると、$c = 0$のときと同様に 補題10.13の証明と同じ議論

$$\begin{aligned} &\omega^{\mathrm{red}}_{[x]}(v, w) = 0 \quad \forall w \in T_{[x]}(\mu^{-1}(c)/\,\mathrm{Stab}_G(c)) \\ \Longleftrightarrow\ &\omega_x(\tilde{v}, \tilde{w}) = 0 \quad \forall \tilde{w} \in T_x\mu^{-1}(c) \\ \Longleftrightarrow\ &\tilde{v} \in T_x\mu^{-1}(c)^{\perp} \\ \Longleftrightarrow\ &\tilde{v} = \xi^\#_x \quad \exists \xi \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

が適用できる。このとき、初めの仮定 $\tilde{v} \in T_x\mu^{-1}(c)$ から

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mu(\exp(t\xi)x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}^*_{\exp(-t\xi)}(c)$$

ξ は $\mathrm{Stab}_G(c)$ のリー環に属していなければならない。したがって、$\tilde{v}$ は商空間を取るときの$\mathrm{Stab}_G(c)$-軌道の接空間の元であり、$v = 0$である。したがって、ω^{red}は非退化である。

問題 10.18. Gをリー群、$\mathfrak{g}^*$ をそのリー環の双対空間とする。$c \in \mathfrak{g}^*$ を通る余随伴軌道 $O(c) = \{\mathrm{Ad}^*_g(c) \mid g \in G\}$ の上に、包含写像 $O(c) \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ が運動量写像となるような、G-不変シンプレクティック形式がただ一つ存在することを示せ。このシンプレクティック多様体を**Kirillov-Kostant余随伴軌道 (coadjoint orbit)**という。

Bibliography

[AB84] M. F. Atiyah and R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, Topology **23** (1984), no. 1, 1–28.

[BGfGf73] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel′ fand, and S. I. Gel′ fand, *Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P*, Uspehi Mat. Nauk **28** (1973), no. 3(171), 3–26.

[BT82] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[BV82] N. Berline and M. Vergne, *Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **295** (1982), no. 9, 539–541.

[BV83] ———, *Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 2, 539–549.

[Dem74] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 53–88.

[ESm87] G. Ellingsrud and S. A. Strø mme, *On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane*, Invent. Math. **87** (1987), no. 2, 343–352.

[FH91] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991, A first course, Readings in Mathematics.

[Ful97] W. Fulton, *Young tableaux*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, With applications to representation theory and geometry.

[Ful98] ———, *Intersection theory*, second ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Gin91] V. Ginzburg, *Lagrangian construction of the enveloping algebra $U(\mathrm{sl}_n)$*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** (1991), no. 12, 907–912.

[GV93] V. Ginzburg and É. Vasserot, *Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n*, Internat. Math. Res. Notices (1993), no. 3, 67–85.

[KK86] B. Kostant and S. Kumar, *The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **83** (1986), no. 6, 1543–1545.

[Lus88] G. Lusztig, *Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1988), no. 67, 145–202.

[Mac95] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[MO19] D. Maulik and A. Okounkov, *Quantum groups and quantum cohomology*, Astérisque (2019), no. 408, ix+209, arXiv:1211.1287 [math.AG].

[Nak94] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 2, 365–416.

[Nak98] ———, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **91** (1998), no. 3, 515–560.

[Nak01] ———, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 1, 145–238 (electronic).

[Nek03] N. A. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2003), no. 5, 831–864.

[NY05] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, Invent. Math. **162** (2005), no. 2, 313–355.

[SV13] O. Schiffmann and E. Vasserot, *Cherednik algebras, W-algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on* $\mathbf{A}^2$, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **118** (2013), 213–342.

[Var00] M. Varagnolo, *Quiver varieties and Yangians*, Lett. Math. Phys. **53** (2000), no. 4, 273–283.

[VV99] M. Varagnolo and E. Vasserot, *On the K-theory of the cyclic quiver variety*, Internat. Math. Res. Notices (1999), no. 18, 1005–1028.