

10(vi). 籠多様体へのトーラス作用. §10(iii)で調べたヒルベルト概型へのトーラスの作用を \mathfrak{M} の場合に拡張しよう。まず 2次元トーラス $(\mathbb{C}^\times)^2$ の作用を、商空間を取る前の作用

$$(B_1, B_2, a, b) \mapsto (t_1 B_1, t_2 B_2, a, t_1 t_2 b) \quad (t_1, t_2) \in (\mathbb{C}^\times)^2$$

から誘導される作用として定義する。 $r = 1$ のヒルベルト概型の場合には、 $\mathbb{C}^2 = \{(x, y)\}$ への作用から誘導される作用に等しいことは、明らかである。

さらに、 W の一次元部分空間への分解 $W = W^1 \oplus \cdots \oplus W^r$ を取り、各 W^α ($\alpha = 1, \dots, r$) へのスカラー倍の作用から誘導される $(\mathbb{C}^\times)^r$ の \mathfrak{M} への作用を考える。 $e_\alpha \in \mathbb{C}^\times$ として、 W^α 成分を e_α 倍する W の線形写像を e で表せば、 $a \mapsto ae^{-1}$, $b \mapsto eb$ から誘導される作用である。すべての e_α が等しい対角線部分群 $\mathbb{C}^\times \cong \{(e, \dots, e)\} \subset (\mathbb{C}^\times)^r$ は商空間 \mathfrak{M} には自明に作用するので、 $(\mathbb{C}^\times)^r / \mathbb{C}^\times \cong (\mathbb{C}^\times)^{r-1}$ が \mathfrak{M} に作用する。トーラス $(\mathbb{C}^\times)^{r-1}$, $(\mathbb{C}^\times)^2 \times (\mathbb{C}^\times)^{r-1}$ をそれぞれ T, \mathbb{T} で表そう。途中で、 $(\mathbb{C}^\times)^r$, $(\mathbb{C}^\times)^2 \times (\mathbb{C}^\times)^r$ も必要になるので、これは $\tilde{T}, \tilde{\mathbb{T}}$ としよう。

また、以下で e_α を $e_\alpha(e) = e_\alpha$ によって、ウェイト $\tilde{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ と同一視する。 t_1, t_2 も同様に \mathbb{T} , あるいは $\tilde{\mathbb{T}}$ のウェイトと同一視する。

命題 10.19. (1) $\mathfrak{M}(n, r)$ の T 作用に関する固定点集合は

$$\bigsqcup_{n_1 + \cdots + n_r = n} \mathfrak{M}(n_1, 1) \times \cdots \times \mathfrak{M}(n_r, 1)$$

となる。実際、上の空間から $\mathfrak{M}(n, r)$ への埋め込み写像は、各 $\mathfrak{M}(n_\alpha, 1)$ に対応する行列 $(B_1^\alpha, B_2^\alpha, a^\alpha, 0)$ に対して、直和 $\bigoplus_{\alpha=1}^r$ を取ることで与えられる。

(2) $\mathfrak{M}(n, r)$ の \mathbb{T} 作用に関する固定点集合は有限個であり、 r 個のヤング図形の組 $\vec{Y} = (Y^1, \dots, Y^r)$ であって、箱の総数 $|\vec{Y}| = \sum_\alpha |Y^\alpha|$ が n となるものでパラメトライズされる。

証明. (1) $(B_1, B_2, a, b) \in \mu^{-1}(0)^{\text{st}}$ に対応する商空間の点 $[B_1, B_2, a, b]$ が T の作用で固定されているとする。このとき、各 $e = (e_1, \dots, e_r) \in \tilde{T}$ に対して $\text{GL}(V)$ の元 $g(e)$ が存在して、

$$g(e)B_1g(e)^{-1} = B_1, \quad g(e)B_2g(e)^{-1} = B_2, \quad g(e)a = ae, \quad bg(e)^{-1} = e^{-1}b$$

が成り立つ。定理 10.8 の証明でみたように $\text{GL}(V)$ の安定な点の集合への作用は自由であったから、 $g(t)$ はただ一つに定まる。特に、 $g(ee') = g(e)g(e')$ が成り立ち、 $t \mapsto g(e)$ は $\tilde{T} \rightarrow \text{GL}(V)$ の写像とみて、群の準同型になる。つまり、 V は \tilde{T} の表現になる。 V を \tilde{T} の表現としてウェイト分解 $V = \bigoplus_\lambda V(\lambda)$ する。 λ は、ウェイトである。上の式から、 a^α の像はウェイト $\lambda = e_\alpha$ のウェイト空間に含まれており、また B_1, B_2 はウェイト空間を保つ。したがって、安定性の条件からウェイトは $\lambda = e_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, r$) のみである。また、 $V = \bigoplus_\alpha V^\alpha$ ($V^\alpha = V(e_\alpha)$) とすれば、与えられた W の分解 $W = W^1 \oplus \cdots \oplus W^r$ と合わせて、 B_1, B_2, a, b は、 $B_1^\alpha, B_2^\alpha, a^\alpha, b^\alpha$ の直和に分解する。 V^α の次元を n_α とすると、それぞれの直和因子は $\mathfrak{M}(n_\alpha, 1)$ の元を定め、逆に $\mathfrak{M}(n_1, 1) \times \cdots \times \mathfrak{M}(n_r, 1)$ の元から直和を考えて、 $\mathfrak{M}(n, r)$ の $(\mathbb{C}^\times)^{r-1}$ 作用に関する固定点が与えられる。また、補題 10.9 により、 $b^\alpha = 0$ が成り立つ。

(2) 命題 10.4 において、 $\mathfrak{M}(n_\alpha, 1)$ の $(\mathbb{C}^\times)^2$ 作用の固定点が、箱の数が n_α のヤング図形に対応していたことから主張が従う。 \square

上の証明の議論で現れたウェイト分解と同様に、 \mathbb{T} 作用の固定点においては、 $\tilde{\mathbb{T}}$ に関するウェイト分解が現れる。実際、固定点 $[B_1, B_2, a, b]$ の代表元 (B_1, B_2, a, b) を取ると、上と同様に

$$(10.20) \quad \begin{aligned} g(t)B_1g(t)^{-1} &= t_1^{-1}B_1, & g(t)B_2g(t)^{-1} &= t_2^{-1}B_2, \\ g(t)a &= ae, & bg(t)^{-1} &= t_1^{-1}t_2^{-1}e^{-1}b \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $t = (t_1, t_2, e)$ である。(上で議論したように、 $b^\alpha = 0$ であるから、最後の式は考慮から除いても構わない。) 上で得た分解 $V = \bigoplus V^\alpha$ をさらに細かく、 $V^\alpha(k, l)$ を t_1, t_2 が $t_1^k t_2^l$ で働くウェイト空間として $V = \bigoplus V^\alpha(k, l)$ と分解しよう。すると、 B_1, B_2 は

$$B_1: V^\alpha(k, l) \rightarrow V^\alpha(k-1, l), \quad B_2: V^\alpha(k, l) \rightarrow V^\alpha(k, l-1)$$

とそれぞれ写し、 a は

$$a: W^\alpha \rightarrow V^\alpha(0, 0)$$

となる。 b は、 $\bigoplus_\alpha V^\alpha(1, 1)$ 以外の直和因子の上では 0 である。ところが、安定性から $V^\alpha(k, l) \neq 0$ となる k, l は非正であることが分かるから、上でも注意した $b = 0$ が確認できる。

注 10.21. 固定点 $[B_1, B_2, a, b]$ の代表元 (B_1, B_2, a, b) の取り方には、 $\mathrm{GL}(V)$ による共役の不定性がある。しかし、異なる代表元を取っても、 V のトーラス $\tilde{\mathbb{T}}$ の表現の構造も $\mathrm{GL}(V)$ の元による共役で変わるだけなので、表現の同型類を考えれば、同じものになる。

10(vii). 接空間を記述する複体。 \mathfrak{M} の多様体としての構造を、商空間として導入したので、接空間は $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}}$ の接空間を、軌道の接空間で割った商空間である。これをより具体的に表すために、次の複体を考える。 (B_1, B_2, a, b) は $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}}$ の点で、 $(\dot{B}_1, \dot{B}_2, \dot{a}, \dot{b})$ は、その点における接ベクトルである。

$$(10.22) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{End}(V) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{End}(V)^{\oplus 2} & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{End}(V) \\ & & \oplus & & \\ & & \mathrm{Hom}(W, V) & & \\ & & \oplus & & \\ & & \mathrm{Hom}(V, W) & & \end{array}$$

$$\sigma(\xi) = \begin{bmatrix} \xi B_1 - B_1 \xi \\ \xi B_2 - B_2 \xi \\ \xi a \\ -b \xi \end{bmatrix}, \quad \tau(\dot{B}_1, \dot{B}_2, \dot{a}, \dot{b}) = [B_1, \dot{B}_2] + [\dot{B}_1, B_2] + \dot{a}b + a\dot{b}$$

ここで、 σ は、作用の微分であり、 τ は、 μ の微分である。 μ の同変性から $\tau\sigma = 0$ が従うが、直接確かめても明らかである。

命題 10.23. $\mu^{-1}(0)^{\mathrm{st}}$ の (B_1, B_2, a, b) における接空間は $\mathrm{Ker} \tau$ であり、 \mathfrak{M} の (B_1, B_2, a, b) に対応する商空間の点 $[B_1, B_2, a, b]$ における接空間は $\mathrm{Ker} \tau / \mathrm{Im} \sigma$ である。

今まで、グラスマン多様体や旗多様体の場合に見てきたように、ポットの留数定理や幾何学的表現論においては、トーラス作用の固定点における接空間の、トーラスの表現空間としてのウェイトを計算する必要がある。上の $\mathrm{Ker} \tau / \mathrm{Im} \sigma$ を用いて、ウェイトを計算してみよう。

(B_1, B_2, a, b) をトーラス固定点 $[B_1, B_2, a, b]$ の代表元とする。§10(iii)の後半に説明したように、 V は $\tilde{\mathbb{T}}$ の表現の構造を持つ。

$$V = \bigoplus_{\alpha, k, l} V^\alpha(k, l)$$

をウェイト空間への分解としよう。 $t = (t_1, t_2, e)$ は $V^\alpha(k, l)$ に $t_1^k t_2^l e_\alpha$ 倍で作用する。また、 $W = \bigoplus W^\alpha$ も $\tilde{\mathbb{T}}$ の表現としてのウェイト空間への分解と見る。 $\tilde{\mathbb{T}} = (\mathbb{C}^\times)^2 \times (\mathbb{C}^\times)^r$ の第一因子の $(\mathbb{C}^\times)^2$ は自明に働いている。

(10.22)の複体に現れるベクトル空間 $\text{End}(V)$ 等は、 V, W の表現の構造から誘導される、 \mathbb{T} の表現の構造を持つ。しかし、 σ, τ は表現の間の準同型写像ではない。§10(iii)で説明したように、 B_1, B_2 は $V^\alpha(k, l)$ を $V^\alpha(k-1, l), V^\alpha(k, l-1)$ に移すためである。このずれを解消するために、(10.22)の複体を

$$(10.24) \quad \begin{array}{c} \text{End}(V) \xrightarrow{\sigma} t_1 \text{End}(V) \oplus t_2 \text{End}(V) \xrightarrow{\tau} t_1 t_2 \text{End}(V) \\ \oplus \\ \text{Hom}(W, V) \\ \oplus \\ t_1 t_2 \text{Hom}(V, W) \end{array}$$

と修正する。ここで、 t_1, t_2 は一次元表現で、 $t = (t_1, t_2, e)$ が t_1 倍、 t_2 倍で作用するものであり、 $t_1 \text{End}(V)$ 等は $t_1 \otimes \text{End}(V)$ 等を略記したものである。すると、例えば $t_1 \text{End}(V)$ のウェイト λ のウェイト空間は、 $\text{End}(V)$ のウェイト $t_1^{-1} \lambda$ のウェイト空間になるので、 σ, τ は表現の準同型になる。

命題 10.25. (10.22)の複体を(10.24)のように修正すると、固定点 $[B_1, B_2, a, b]$ における接空間は、 $\text{Ker } \tau / \text{Im } \sigma$ とトーラスの表現として同型である。

証明. 上の修正は天下りにおこなったので、その意味を考えればよい。今までの構成は、固定点 $[B_1, B_2, a, b]$ の代表元 (B_1, B_2, a, b) の取り方に依存していて、これは商空間を取る前の $\mu^{-1}(0)^{\text{st}}$ 、あるいは \mathbf{M} の点である。これが、 $\tilde{\mathbb{T}}$ 作用で固定されていないことに問題点がある。そこで、 $\tilde{\mathbb{T}}$ の \mathbf{M} への作用を

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &\mapsto g(t) t_1 \dot{B}_1 g(t)^{-1}, & \dot{B}_2 &\mapsto g(t) t_2 \dot{B}_2 g(t)^{-1} \\ \dot{a} &\mapsto g(t) \dot{a} e^{-1}, & \dot{b} &\mapsto t_1 t_2 e \dot{b} g(t)^{-1} \end{aligned}$$

と定める。ただし、すでに取りつて固定した (B_1, B_2, a, b) と区別するために \mathbf{M} の点を $(\dot{B}_1, \dot{B}_2, \dot{a}, \dot{b})$ で表した。(10.20)により、 (B_1, B_2, a, b) はこの修正された作用の固定点である。また、修正前の作用との違いは $g(t)$ に関して共役を取っているだけなので、商空間 \mathfrak{M} への作用としては何も変わっていないことにも注意しよう。上で注意したように $\text{Ker } \tau / \text{Im } \sigma$ を取る (B_1, B_2, a, b) が動いてしまうことが問題なので、 $g(t)$ によって動いた先の軌道上の点から戻してきた、と考えることもできる。

この修正後、 $\text{Ker } \tau$ は $\mu^{-1}(0)^{\text{st}}$ の (B_1, B_2, a, b) の接空間に $\tilde{\mathbb{T}}$ の表現として同型であり、 $\text{Im } \sigma$ は軌道の接空間に、やはり $\tilde{\mathbb{T}}$ の表現として同型である。したがって、主張が示された。□

注 10.26. \mathfrak{M} の商空間としての構成法により、 $\mu^{-1}(0)^{\text{st}}$ は \mathfrak{M} 上の $\text{GL}(V)$ 主束であった。 V は $\text{GL}(V)$ の表現なので、付随したベクトル束 $\mu^{-1}(0)^{\text{st}} \times_{\text{GL}(V)} V$ が定義される。暫定的にこれを \mathcal{V} とおこう。このベクトル束 \mathcal{V} の $[B_1, B_2, a, b]$ におけるファイバーは、代表元 (B_1, B_2, a, b) を取ると自然に V と同型写像が誘導される。さらに、 B_1, B_2 は $\text{End}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}$ の切断とみなすことができる。

実際、そのような切断は $\mu^{-1}(0)^{\text{st}}$ 上の $\text{End}(V)$ に値を持つ関数で、 $\text{GL}(V)$ -同変なものに他ならないが、 B_1, B_2 はまさしくそのような関数である。 a, b についても同じように $\text{Hom}(\underline{W}, \mathcal{V}), \text{Hom}(\mathcal{V}, \underline{W})$ の切断と考えることができる。ここで、 \underline{W} は、ファイバーが W の自明なベクトル束である。さらに (10.22) は V, W を $\mathcal{V}, \underline{W}$ をと置き換えて、 $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ 上のベクトル束の複体として定義することができる。トーラスの作用まで込めて同変ベクトル束として $\mathcal{V}, \underline{W}$ を定めれば、(10.24) は、同変ベクトル束の複体を定める。

以下では、 $\mathcal{V}, \underline{W}$ を単に V, W で表し、場合に応じてベクトル空間としたり、ベクトル束としたり、することにする。 V をベクトル束として見ていることを強調したいときには、 \mathfrak{M} 上のトートロジカル束 (tautological bundle) という。

命題 10.25 の応用として、接空間のウェイトを計算することができる。 V の指標を $\text{ch}(V)$ で表す。 t_1, t_2, e_α を上のように $\tilde{\mathbb{T}}$ の指標と同一視することにして、 $\text{ch}(V)$ は $\mathbb{Z}[t_1^\pm, t_2^\pm, e_1^\pm, \dots, e_r^\pm]$ の元とみなす。双対空間 V^* や W 等の指標も $\text{ch}(V^*), \text{ch}(W)$ 等で表し、やはり $\mathbb{Z}[t_1^\pm, t_2^\pm, e_1^\pm, \dots, e_r^\pm]$ の元とみなす。すると、 $[x] = [B_1, B_2, a, b]$ における接空間 $T_{[x]}\mathfrak{M}$ の指標 $\text{ch}(T_{[x]}\mathfrak{M})$ は、(10.24) の複体 C^\bullet の各項を左から C^{-1}, C^0, C^1 として、 $\text{ch}(T_{[x]}\mathfrak{M}) = \text{ch} H^0(C^\bullet) = \text{ch} C^0 - \text{ch} C^1 - \text{ch} C^{-1}$ であるから、

$$\begin{aligned} \text{ch}(T_{[x]}\mathfrak{M}) \\ = (t_1 + t_2 - 1 - t_1 t_2) \text{ch}(V) \text{ch}(V^*) + \text{ch}(V) \text{ch}(W^*) + t_1 t_2 \text{ch}(W) \text{ch}(V^*) \end{aligned}$$

で与えられる。



表現のウェイトであるので、 $\text{ch}(T_{[x]}\mathfrak{M})$ は $t_1^\pm, t_2^\pm, e_\alpha^\pm$ の多項式として、係数はすべて非負である。上の式は、そのままでは、 $-1 - t_1 t_2$ から来る非正の項がある。これらの非正な項は、他の非負の項とキャンセルしていなければならない。キャンセルを終えた、非負な項のみからなる式を書き下すためには、ヤング図形による固定点の記述を用いて、組み合わせ論的な量を用いることが必要である。そのために、次の概念を準備する。

定義 10.27. 分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n)$ に対応するヤング図形 Y に対して、左から数えて i 列目、下から j 行目にある箱 s の腕長 (arm length) $a_Y(s)$ を

$$a_Y(s) = \lambda_i - j$$

により定める。同様に、 Y を左下角と右上の角を結ぶ対角線に関して折り返した転置 (transpose) のヤング図形 ${}^t Y$ に対する分割を $\lambda' = (\lambda'_1 \geq \dots)$ とするとき、箱 s の脚長 (leg length) $l_Y(s)$ を

$$l_Y(s) = \lambda'_j - i$$

により定める。箱 s が、ヤング図形の中にあるときには、図 5 の  の箱の個数 (図では2) が $a_Y(s)$ であり、 の箱の個数 (図では3) が $l_Y(s)$ である。以下では、箱がヤング図形の外にある場合も考えるので、 $l_Y(s), a_Y(s)$ は負の値を取ることもあり得る。例えば、図 5 の t の $l_Y(t), a_Y(t)$ はそれぞれ、 $-2, -1$ である。

定理 10.28. ヤング図形の組 $\vec{Y} = (Y^1, \dots, Y^r)$ に対応するトーラス作用の固定点における、 \mathfrak{M} の接空間のウェイトは、

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^r e_\beta e_\alpha^{-1} \left(\sum_{s \in Y_\alpha} t_1^{-l_{Y_\beta}(s)} t_2^{a_{Y_\alpha}(s)+1} + \sum_{t \in Y_\beta} t_1^{l_{Y_\alpha}(t)+1} t_2^{-a_{Y_\beta}(t)} \right)$$

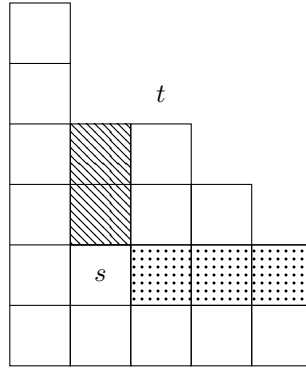


図 5. 腕長と脚長

で与えられる。

脚長、腕長を取るヤング図式を、添字として Y_α, Y_β として表した。箱 s, t は Y_α, Y_β の中にある箱としているので、 $l_{Y_\beta}(s), a_{Y_\alpha}(t)$ は負の値を取りうることに注意しよう。

問題 10.29. 定理 10.28 を [NY05] とは異なる方法で証明せよ。

10(viii). Nekrasov の分配関数. §4(iv) で言及した、非コンパクト空間上の同変積分の例として $\int_{\mathfrak{M}(n,r)} 1$ を、同変コホモロジー $H_{\mathbb{T}}^*(\mathfrak{M}(n,r))$ の局所化を用いて

$$\int_{\mathfrak{M}(n,r)} 1 = \sum_{\vec{Y}} \frac{1}{e(T_{\vec{Y}}\mathfrak{M}(n,r))}$$

と定義する。ここで、 $e(T_{\vec{Y}}\mathfrak{M}(n,r))$ は、 \vec{Y} における接空間の同変オイラー類である。 t_1, t_2, e_α に対応する同変コホモロジーの変数を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a_\alpha$ とおけば、上の式は $\varepsilon_1, \varepsilon_2, a_\alpha - a_\beta$ ($1 \leq \alpha < \beta \leq r$) に関する有理式である。さらに、 n に関する母関数を取り

$$Z(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{a}, \mathfrak{q}) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n \int_{\mathfrak{M}(n,r)} 1$$

を、4次元 $N = 2$ 超対称性 $U(r)$ ゲージ理論の Nekrasov 分配関数 (Nekrasov partition function) とよぶ。[Nek03] で導入されたものである。

定理 10.28 により

$$(10.30) \quad \sum_{\vec{Y}} \mathfrak{q}^{|\vec{Y}|} \prod_{\alpha, \beta=1}^r \prod_{s \in Y_\alpha} (a_\beta - a_\alpha - l_{Y_\beta}(s)\varepsilon_1 + (a_{Y_\alpha}(s) + 1)\varepsilon_2) \\ \times \prod_{t \in Y_\beta} (a_\beta - a_\alpha + (l_{Y_\alpha}(t) + 1)\varepsilon_1 - a_{Y_\beta}(t)\varepsilon_2)$$

で与えられる。

例として、 $r = 1$ の場合

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n \int_{X^{[n]}} 1$$

を考えてみよう。定理 10.10 を用いて $\mathfrak{M}(n, 1)$ を $X = \mathbb{C}^2$ 上の点のヒルベルト概型 $X^{[n]}$ で置き換えた。

事実 10.31. $\pi: X^{[n]} \rightarrow \text{Sym}^n X$ は固有写像であり、 $X^{[n]}$ の稠密な開集合上で微分同相である。

後半については、 n 個の異なる点が定めるイデアルを考えると、 $X^{[n]}$ の稠密な開集合であり、そこに π を制限すれば微分同相であることによる。

この事実により、

$$\pi_* 1_{X^{[n]}} = 1_{\text{Sym}^n X}$$

を得る。ただし、 $H_{\mathbb{T}}^0(X^{[n]})$ の 1 と $H_{\mathbb{T}}^0(\text{Sym}^n X)$ の 1 を区別するために、添字を付けた。

$\text{Sym}^n X$ の $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^\times)^2$ の固定点は原点に重複度 n を与えた $n \cdot 0$ の一点だけである。(4.14) の可換図式の証明を思い返すと、

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_T(X^{[n]}) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathcal{H}_T(\text{Sym}^n X) \\ \sum_Y \frac{i_Y^*}{e(T_Y X^{[n]})} = \left(\sum_Y i_{Y*} \right)^{-1} \downarrow & & \downarrow (i_{n \cdot 0})_*^{-1} \\ \bigoplus_Y \mathcal{H}_T(\{Y\}) & \xrightarrow{\pi_*^T} & \mathcal{H}_T(\{n \cdot 0\}) \end{array}$$

という可換図式を得る。ここで、 Y はヤング図式で、 $X^{[n]}$ のトーラス固定点と同一視しており、 i_Y はその点の包含写像である。また、 $i_{n \cdot 0}$ は、 $\text{Sym}^n X$ のただ一つの固定点 $n \cdot 0$ の包含写像である。

$\text{Sym}^n X$ は多様体ではないが、高々有限群による商 $(\mathbb{C}^2)^n / \mathfrak{S}_n$ である。したがって、(4.14) のときと同様に $(i_{n \cdot 0})_*^{-1}$ を計算することができ、それは

$$\frac{1}{\#\mathfrak{S}_n} \frac{1}{e(T_0(\mathbb{C}^2)^n)} = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right)^n$$

である。(10.29) と合わせて、

$$\begin{aligned} \sum_Y q^{|Y|} \prod_{s \in Y} (-l_Y(s) \varepsilon_1 + (a_Y(s) + 1) \varepsilon_2) ((l_Y(s) + 1) \varepsilon_1 - a_Y(s) \varepsilon_2) \\ = \exp \left(\frac{q}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) \end{aligned}$$

が成り立つことが従う。左辺は、ヤング図式だけで定められている組み合わせ論的な式である。この式は、Macdonald 多項式のコーシー恒等式とよばれる、組み合わせ論だけで証明できる式を用いて、幾何を使わずに証明することができる。([Mac95, ***] 参照)

一般に $r > 1$ のときには、同様の $Z(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{a}, q)$ の簡潔な式は知られていない。

*** 以下加筆予定 ***

11. ハイゼンベルグ代数のヤングジャン

11(i). ヘッケ対応。複素グラスマン多様体の同変コホモロジーに、 $\mathfrak{sl}(2)$ やヤングジャンの表現の構造を定義したときに用いたのがインデンス多様体、より正確にはその余法束であった。(§5(iii) 参照) この節では、箆多様体におけるインデンス多様体の類似であるヘッケ対応 (**Hecke correspondence**) を導入する。この節の内容は、[Nak98, §5] による。

ヒルベルト概型 $X^{[n]}$ の場合には、グラスマン多様体のインシデンス多様体 $\{(S_1, S_2) \in G(k, n) \times G(k-1, n) \mid S_1 \supset S_2\}$ の自然な類似として、

$$(11.1) \quad \{(I^1, I^2) \in X^{[n]} \times X^{[n-1]} \mid I^1 \subset I^2\}$$

を思いつくだろう。実際、一般の $\mathfrak{M}(n, r)$ の場合には、これの自然な拡張になっている。

Bibliography

- [AB84] M. F. Atiyah and R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, *Topology* **23** (1984), no. 1, 1–28.
- [BGfGf73] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel'fand, and S. I. Gel'fand, *Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P* , *Uspehi Mat. Nauk* **28** (1973), no. 3(171), 3–26.
- [BT82] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 82, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [BV82] N. Berline and M. Vergne, *Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **295** (1982), no. 9, 539–541.
- [BV83] ———, *Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes*, *Duke Math. J.* **50** (1983), no. 2, 539–549.
- [Dem74] M. Demazure, *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), 53–88.
- [ESm87] G. Ellingsrud and S. A. Strømme, *On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane*, *Invent. Math.* **87** (1987), no. 2, 343–352.
- [FH91] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991, A first course, Readings in Mathematics.
- [Ful97] W. Fulton, *Young tableaux*, *London Mathematical Society Student Texts*, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, With applications to representation theory and geometry.
- [Ful98] ———, *Intersection theory*, second ed., *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Gin91] V. Ginzburg, *Lagrangian construction of the enveloping algebra $U(\mathfrak{sl}_n)$* , *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **312** (1991), no. 12, 907–912.
- [GV93] V. Ginzburg and É. Vasserot, *Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n* , *Internat. Math. Res. Notices* (1993), no. 3, 67–85.
- [KK86] B. Kostant and S. Kumar, *The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G* , *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), no. 6, 1543–1545.
- [Lus88] G. Lusztig, *Cuspidal local systems and graded Hecke algebras. I*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1988), no. 67, 145–202.
- [Mac95] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed., *Oxford Mathematical Monographs*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.
- [MO19] D. Maulik and A. Okounkov, *Quantum groups and quantum cohomology*, *Astérisque* (2019), no. 408, ix+209, [arXiv:1211.1287](https://arxiv.org/abs/1211.1287) [[math.AG](#)].
- [Nak94] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, *Duke Math. J.* **76** (1994), no. 2, 365–416.
- [Nak98] ———, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, *Duke Math. J.* **91** (1998), no. 3, 515–560.
- [Nak01] ———, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), no. 1, 145–238 (electronic).
- [Nek03] N. A. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2003), no. 5, 831–864.
- [NY05] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, *Invent. Math.* **162** (2005), no. 2, 313–355.

- [SV13] O. Schiffmann and E. Vasserot, *Cherednik algebras, W-algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on \mathbf{A}^2* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **118** (2013), 213–342.
- [Var00] M. Varagnolo, *Quiver varieties and Yangians*, Lett. Math. Phys. **53** (2000), no. 4, 273–283.
- [VV99] M. Varagnolo and E. Vasserot, *On the K-theory of the cyclic quiver variety*, Internat. Math. Res. Notices (1999), no. 18, 1005–1028.