$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}[x,y]/I \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{c} \mathbb{C}[x,y]/I$$

$$\begin{matrix} f \bmod I \\ g \bmod I \end{matrix} \quad a \longmapsto \begin{matrix} (xg - yf) \bmod I \\ + a \end{matrix}$$

は Γ-同変である。

但し $\left.\begin{array}{l} \mathbb{C}^2 \text{ には } \Gamma \subset SU_2 \text{ を通じて} \\ \mathbb{C} \text{ には 自明に} \end{array}\right\}$ 作用する。

さらに、これは全射である。

系 $\mathbb{C}[x,y]/I$ が既約成分 ρ_i $(\neq \rho_0)$ を含んでいれば、

~~ρ_0 か $\mathbb{C}^2\otimes\rho_i$ の既約成分~~

$\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}[x,y]/I$ も ρ_i を含んでいなければならない

Q : $\Gamma < SU_2$ から誘導される2次元表現

- $\Lambda^2 Q$: 自明表現 ∵ $\det \gamma = 1$ $\forall \gamma \in SU_2$
- $Q^* \cong Q$

$\Lambda_{-1} Q := \Lambda^0 Q - Q + \Lambda^2 Q$ (virtual な表現)

$\in R(\Gamma)$: Γ の表現環

(キヤク表現たる ρ_i を基底とする自由 $\mathbb{Z}$-加群)

$\cong \mathbb{Z}^n$

(n = # キヤク表現)

$R(\Gamma)$ 上の bilinear form $(\, , \,)$ を

$(\rho, \rho') = \dim \mathrm{Hom}_\Gamma(\rho, \Lambda_{-1} Q \otimes \rho')$

$= \rho^* \otimes \Lambda_{-1} Q \otimes \rho'$ の ρ_0-成分の重複度

- $(\rho, \rho') = (\rho', \rho)$

$(\rho^* \otimes \Lambda_{-1} Q \otimes \rho')^* = \rho \otimes (\Lambda_{-1} Q)^* \otimes \rho'^*$

$= \rho'^* \otimes \Lambda_{-1} Q \otimes \rho$

<u>McKay 対応のいいかえ</u>

$(\, , \,)$ は affine Cartan 行列である.

$$(\rho_i, \rho_j) = \dim \mathrm{Hom}_P(\rho_i, \Lambda_{-1} Q \otimes \rho_j)$$

$$= \dim \mathrm{Hom}_P(\rho_i, \rho_j - Q \otimes \rho_j + \rho_j)$$

$$= 2\delta_{ij} - \dim \mathrm{Hom}_P(\rho_i, Q \otimes \rho_j)$$

ρ_i から ρ_j へ引かれる線の本数

これは Dynkin graph から Cartan 行列を定めるやり方に他ならない.

§3. 豚多様体の定義と基本的な性質

$$\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2 \overset{\text{def}}{=} \{ I \subset \mathbb{C}[x,y] \mid \dim \mathbb{C}[x,y]/I = n \}$$

イデアル

<u>事実</u>. ① $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2$ は $2n$ 次元の複素多様体である
(代数)

② $\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2$ は連結であり,

$\mathbb{C}^2$ の n コの相異なる点から定まるイデアルたちが open, dense な部分集合を与える.

③ $\pi : \mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2 \longrightarrow S^n\mathbb{C}^2$

$$I \longmapsto \mathrm{Supp}\,\mathbb{C}[x,y]/I \text{ を重複度をこめて}$$

(しかるべく定めたもの)

は特異点解消である.

①の証明

- Fogarty
- Mukai (?)
- 行列表示を用いる
- 座標を具体的に与える (Haiman)

あとで使うことも考えて Mukai 流の説明をする。
?

$\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2 \ni I$ の I における接空間は

$$\mathrm{Ext}^1_A(A/I, A/I) \qquad A=\mathbb{C}[x,y]$$

で与えられる。(変形理論)

$\mathrm{Hom}_A(A/I, A/I)$: 自己同型

$\mathrm{Ext}^2_A(A/I, A/I)$: 障害

双対定理 (Grothendieck-Serre) により

$$\mathrm{Ext}^2_A(A/I, A/I) = \mathrm{Hom}_A(A/I, A/I)^*$$

($K_{\mathbb{C}^2}$ = trivial を用いた)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(A/I, A/I) & \cong & A/I \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & f(1) \bmod I) \end{array}$$

: n次元

$\therefore$

次の交代和 $\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \underbrace{\mathrm{Ext}^i}_{\dim}(A/I, A/I)$

は Riemann-Roch 公式で計算できる.

$$\int_{\mathbb{C}^2} \mathrm{ch}((A/I)^*)\,\mathrm{ch}(A/I)\,\underbrace{\mathrm{td}\,\mathbb{C}^2}_{=1}$$

$\mathrm{ch}(A/I)$ を形式的に計算してみる

$$\int_{\mathbb{C}^2} \mathrm{ch}(A/I)\,\mathrm{td}\,\mathbb{C}^2 = \sum(-1)^i \underset{\dim}{\mathrm{Ext}^i}(A, A/I)$$

$$= \underset{\dim}{\mathrm{Hom}}(A, A/I) = N$$

$$\therefore\ \mathrm{ch}(A/I) = N \cdot \mathrm{P.D.}[pt] \in H_c^4(\mathbb{C}^2)$$

$$\therefore\ \int_{\mathbb{C}^2} \mathrm{ch}(A/I)^*\,\mathrm{ch}(A/I)\,\mathrm{td}\,\mathbb{C}^2$$

$$= \int_{\mathbb{C}^2} N^2\,\underbrace{\mathrm{P.D.}(pt) \cup \mathrm{P.D.}(pt)}_{H_c^8(\mathbb{C}^2)=0} = 0\ !$$

$$\therefore\ \dim \mathrm{Ext}^1(A/I, A/I) = 2N.$$

//

行列表示 $\{(B_1, B_2, v) \mid ①② \} / GL_N$

$(B_1, B_2) \mapsto [B_1, B_2]$ の微分は

$[\delta B_1, B_2] + [B_1, \delta B_2]$ である.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}_N & \longrightarrow & \mathbb{C}^N \\ \ni & & \ni \\ C & \longmapsto & Cv \end{array}$$

の転置写像は.

$$\begin{array}{ccc} v' \in \mathbb{C}^N & \longrightarrow & \mathfrak{gl}_N \\ v' & \longmapsto & C' \end{array}$$

$$\langle C, C' \rangle = \langle Cv, v' \rangle$$

$\langle C, C' \rangle = \mathrm{tr}(CC')$, $\langle Cv, v' \rangle = \mathrm{tr}({}^t v' C v)$

v : 横ベクトル

${}^t v'$: たてベクトル

$\therefore C' = v\,{}^t v'$

$$\mathfrak{gl}_N \xrightarrow{P} \mathfrak{gl}_N / \mathbb{C}^N = \mathfrak{gl}_N / \{ v\,{}^t v' \mid v' \in \mathbb{C}^N \}$$

$P \circ \mu$ という合成写像を考える

$C \in \mathfrak{gl}_N$ が

$[\delta B_1, B_2] + [B_1, \delta B_2]$ $\quad \forall \delta B_1, \delta B_2$ と直交

$\Leftrightarrow \quad [C, B_1] = 0 = [C, B_2]$

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{gl}_N^{\oplus 2} \oplus \mathbb{C}^N & \xrightarrow{d\mu} & \mathfrak{gl}_N & \xrightarrow{p} & \mathfrak{gl}_N / \mathbb{C}^N \\ & & \wr\| \text{tr} & & \\ & & (\mathfrak{gl}_N)^* & \longleftarrow & (\mathfrak{gl}_N/\mathbb{C}^N)^* \\ & & & & \cong \\ & & & & \{C \mid Cv = 0\} \end{array}$$

$(\mathrm{Im}\, d\mu)^\perp \cap (\mathfrak{gl}_N / \mathbb{C}^N)^*$

$= \{ C \mid Cv = 0,\ [C, B_1] = 0 = [C, B_2] \}$

$= 0 \qquad$ by cyclic vector condition ①

$(p \circ \mathrm{Im}\, d\mu)^\perp = \{ C \mid Cv = 0,\ [C, B_1] = 0 = [C, B_2] \}$

$= 0$

$\therefore \quad p \circ \mathrm{Im}\, d\mu$: 全射

よって

$$\mathfrak{gl}_N \times \mathfrak{gl}_N \times \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathfrak{gl}_N/\mathbb{C}^N$$

$$(B_1, B_2, v) \longmapsto p([B_1, B_2])$$

のビブンは全射

$$p([B_1, B_2]) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad [B_1, B_2] = v^t v' \quad \text{for some } v' \in \mathbb{C}^N$$

$$\Rightarrow \quad [B_1, B_2] = 0.$$

Lecture Note

の Prop2.8 参照

あとは きちんと割れていることをチェックする必要がある.

$$\dim = 2\dim \mathfrak{gl}_N + \dim \mathbb{C}^N - \dim \mathfrak{gl}_N/\mathbb{C}^N - \dim \mathfrak{gl}_N$$

$$= 2N$$

//