$\vec{v}$: Γの表現（の同型類） $= \bigoplus_i \rho_i^{\oplus v_i}$

$$X(\vec{v}) \overset{\text{def.}}{=} \left\{ I \subset \mathbb{C}[x,y] \;\middle|\; \begin{array}{l} \Gamma\text{-invariant} \\ \mathbb{C}[x,y]/I = \vec{v} \\ \quad \text{as } \Gamma\text{-modules} \end{array} \right\}$$

Fact ① $X(\vec{v})$ は $2v_0 - (\vec{v},\vec{v})$ 次元の複素多様体である。（ϕでないとすると）

② $X(\vec{v})$ は連結である

③ $\pi : X(\vec{v}) \longrightarrow (S^{|\vec{v}|}\mathbb{C}^2)^\Gamma \cong S^n(\mathbb{C}^2/\Gamma)$ for some n

は proper morphism

ある場合には特異点解消

（たとえば $\vec{v} = n$ 正則表現）

①の証明

— 行列を使うもの

— Riemann-Roch を使うもの

$X(\vec{v})$ は $(\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2)^\Gamma$ の成分（の和）だから

一般論によって多様体である。

接空間は $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{C}^2$ の接空間の
Γ-不変部分空間である.

∴ $\mathrm{Ext}^1_A(A/I, A/I)$ の Γ-inv. part
を計算すればよい.

同変 R.R. によって

$$\sum (-1)^i \underset{ch}{\cancel{\dim}}\, \mathrm{Ext}^i(A/I, A/I) = \int_{\mathbb{C}^2} ch(A/I)\, ch(A/I)^*$$

$$ch(A/I) = ch\,\mathrm{Hom}_\Delta(A, A/I)\,[pt]$$
$$= \underbrace{ch(A/I)}_{\text{Γの表現}}\,[pt]$$

前は $[pt]^2 = 0$ であった.

一つの説明 $[pt]^2 = [pt][pt'] = 0$
ちがう点
とれる

Γの作用があるので このようにしてはいけない.

Koszul cpx

$$0 \leftarrow \mathbb{C} \xleftarrow[\substack{(x,y)\\=(0,0)}]{ev.1} A \xleftarrow{(x,y)\cdot} Q\otimes A \xleftarrow{(x,y)\cdot} \wedge^2 Q \otimes_A A \leftarrow 0$$

を用いて

$$= [A] - [Q \otimes A] + [\Lambda^2 Q \otimes A]$$

$$= [\Lambda_{-1} Q \otimes A]$$

$$\therefore [pt]^2 = [\Lambda_{-1} Q \otimes A][pt]$$

$$\therefore \int_{\mathbb{C}^2} ch(A/\Gamma)^* ch(A/\Gamma)\, td\, \mathbb{C}^2$$

$$= (A/\Gamma)^* \otimes (A/\Gamma) \otimes \Lambda_{-1} Q$$

Γ-inv. part を取ると $(A/\Gamma, A/\Gamma)$

//

例

・$\vec{v}=0$　　$I=\mathbb{C}[x,y]$　一点

・$\vec{v}=\rho_0$　　$I=(x\ y)$　一点

$2v_0-(\rho_0,\rho_0)=0$

・$\vec{v}$＝正則表現

（Γ-orbit が定めるイデアルに対応する表現）
free

…アファイン・カルタン行列の kernel で非0成分が1のベクトル　δ に対応

$$\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \qquad \vec{v}=\underset{1}{\rho_0}\oplus\underset{1}{\rho_1}\oplus\cdots\oplus\underset{1}{\rho_{n-1}} \right)$$

∴ $2v_0-(\vec{v},\vec{v})=2$

$X(\vec{v})$　　$\mathbb{C}^2/\Gamma\setminus\{0\}$ ← …free orbits

というのの Φ' の和になる。

$X(\vec{v})$ は $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の minimal resolution になる。

§4. Correspondence

$$\mathcal{E}_i(\vec{v}) = \{(I_1, I_2) \in X(\vec{v}-\rho_i) \times X(\vec{v}) \mid I_1 \supset I_2\}$$

但し $\vec{v}$ ~~は~~ が ρ_i 成分を含まないときは ϕ となる.

$$0 \to I_2 \to I_1 \to I_1/I_2 \to 0$$

$\mathbb{C}[x,y]*\Gamma$-加群の完全列である.

$I_1 \in X(\vec{v}-\rho_i)$, $I_2 \in X(\vec{v})$ であるから I_1/I_2 は Γの表現としては ρ_i である.

<u>主張</u> I_1/I_2 は $\mathbb{C}[x,y]$-加群としては自明である.

$$I_1/I_2 \longrightarrow \cancel{\mathbb{C}^2}\, Q \otimes I_1/I_2$$

$$f \bmod I_2 \mapsto \begin{bmatrix} xf \bmod I_2 \\ yf \bmod I_2 \end{bmatrix}$$

は Γ-equivariant である.

ρ_i-成分 $\to$ ρ_i-成分にうつる

ところが $\cancel{\mathbb{C}^2}\, Q \otimes \rho_i$ は ρ_i 成分をもたない //

同様に，

$$0 \to I_1/I_2 \to A/I_2 \to A/I_1 \to 0$$

も考える。

$\mathbb{C}[x,y]*\Gamma$-加群の完全列

より一般に

$$\mathcal{P}_i^{(k)}(\vec{v}) = \{(I_1, I_2) \in X(\vec{v}-k\rho_i)\times X(\vec{v}) \mid I_1 \supset I_2\}$$

$$0 \to I_2 \to I_1 \to I_1/I_2 \to 0$$

$$0 \to I_1/I_2 \to A/I_2 \to A/I_1 \to 0$$

I_1/I_2 は Γ-加群として $\rho_i^{\oplus k}$

A-加群として自明。

事実 ① $\mathcal{P}_i^{(k)}(\vec{v}) \subset X(\vec{v}-k\rho_i)\times X(\vec{v})$

はなめらかな部分多様体

② $I_2 \in X(\vec{v})$ に対し

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{P}_i^{(k)}(\vec{v}) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X(\vec{v}-k\rho_i) & & X(\vec{v}) \end{tikzcd}$$

$p_2^{-1}(I_2)$

$\cong Gr(k, \mathrm{Hom}_A(A_0 \otimes \rho_i^{\oplus k}, A/I_2)^{\Gamma})$

自明 A-加群 $A/(x,y)$

③ $I_1 \in X(v - k p_i)$ について

$$p_1^{-1}(I_1) \cong Gr(k, \mathrm{Hom}_A(I_1, A \otimes \rho_i)^{\Gamma})$$

(証明) ① OK

② I_1を決めるかわりに A/I_1 をきめればよい.

$$\{\mathrm{Hom}_A(\rho_i^{\oplus k}, A/I_2) \text{ で injective なもの}\} / \rho_i \text{の自己同型}$$

$$= \mathrm{Hom}_A(\rho_i, A/I_2) \text{ の } k \text{次元部分空間}$$

③についても同様

大切だとおもったこと I_1/I_2 の $\mathbb{C}[x,y] * \Gamma$ 加群としての構造がパラメータだけで unique に定まってしまう (rigid)

例. $\vec{r}$ = 正則表現

$\vec{r}-\rho_i$ $(i \neq 0)$ に対応する $X(\vec{r}-\rho_i)$

は一点のみからなる

$$\dim = 2-(\vec{r}-\rho_i, \vec{r}-\rho_i) = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} X(\vec{r}-\rho_i)\times X(\vec{r}) & \supset & \mathcal{C}_i(\vec{r}) & \cong & \mathbb{P}^1 \\ \| & \swarrow & & & \circlearrowleft \mathbb{P} \\ X(\vec{r}) & & X(\vec{r}-\rho_i) = \text{一点} & & \end{array}$$

$\mathcal{C}_i(\vec{r})$ たちが互いに相異なり

$X(\vec{r}) \setminus (\mathbb{C}^2\setminus\{0\})/\Gamma$ をなすこともわかる

さらに $\mathcal{C}_i(\vec{r}) \cap \mathcal{C}_j(\vec{r})$ は一点で交わるか

or 全く交わらない

交わるのは Dynkin 図で $\underset{\rho_i}{\circ}$—$\underset{\rho_j}{\circ}$

とむすばれていることである.

$\mathrm{Hom}_A(\rho_i, A/I_2)^{\Gamma}$ や $\mathrm{Hom}_A(I, \rho_i)^{\Gamma}$

は I が $X(\vec{v})$ の中を動くとともに次元が変わりうる. よって $\mathfrak{S}_i^{(k)}(\vec{v})$ は $X(\vec{v})$ や $X(\vec{v}-k\rho_i)$ 上の Grassmann b'dle ではない.

これらの次元が一定な stratum に分割すると Grassmann b'dle になる

~~stratumの次元とfiberの次元をたすとちょうど~~

(stratified Grassmann b'dle)

主張.

$$\mathrm{Hom}_A(A_0, A/I) - \mathrm{Hom}_A(I, A_0)^*$$

は Γ の virtual な表現として $\Lambda_{-1}Q \otimes \vec{v} - \rho_0$

に一致する。 特に $I \in X(\vec{v})$ にはよらない.

$$\mathrm{Hom}_A(\mathbb{C}, A/I) \underset{\longleftrightarrow}{\cong} \left\{ f \bmod I \in A/I \;\middle|\; \begin{array}{l} xf = 0 \bmod I \\ yf = 0 \end{array} \right\}$$

1の行き先を考える.

$$\therefore \quad \mathrm{Hom}_A(\mathbb{C}, A/I) = \mathrm{Ker}\,\sigma$$

$$\left(\sigma : A/I \xrightarrow{\sigma} Q \otimes A/I \otimes \rho_0 \xrightarrow{\tau} A/I \right.,$$

Ker τ $\quad \mathrm{Hom}_A(I, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(I/\mathfrak{m}I, \mathbb{C})$

$\mathfrak{m}$: maximal ideal $(x\, y)$

$$\therefore \quad \mathrm{Hom}_A(I, \mathbb{C})^* = I/\mathfrak{m}I$$

$\mathrm{Ker}\,\tau / \mathrm{Im}\,\sigma = I/\mathfrak{m}I$ となる. (exercise)