§5.

$$\mathcal{L}(\vec{v}) = \{ I \in X(\vec{v}) \mid \mathrm{Supp}\, A/I = \{0\} \}$$ //

compactな部分集合であることが知られている.

$X(\vec{v}) \xrightarrow{\pi} S^n(\mathbb{C}^2/\Gamma)$ の $\pi^{-1}(0) = \mathcal{L}(\vec{v})$

$$H_*(\mathfrak{L}(\vec{v})) \xrightarrow{e_i} H_*(\mathfrak{L}(\vec{v}-p_i))$$ を

$e_i(c) = p_{1*}([\mathfrak{P}_i(\vec{v})] \cap p_2^* c)$ で定義する.

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{P}_i(\vec{v}) \subset X(\vec{v}-p_i) \times X(\vec{v}) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X(\vec{v}-p_i) & & X(\vec{v})
\end{tikzcd}$$

$$p_1(p_2^{-1}(\mathfrak{L}(\vec{v})) \cap \mathfrak{P}_i(\vec{v})) \subset \mathfrak{L}(\vec{v}-p_i)$$

$$I_1 \supset I_2 \qquad I_1/I_2 \cong p_i$$

より $\mathrm{Supp}\, A/I_1 \sqcup \{0\} = \mathrm{Supp}\, A/I_2$

もう少し正確に

$[\mathfrak{P}_i(\vec{v})] \in H_*(\mathfrak{P}_i(\vec{v})) \cong H^*(X(\vec{v}-p_i) \times X(\vec{v}),\ ”\setminus \mathfrak{P}_i(\vec{v})$

⋮

$\mathfrak{P}_i(\vec{v})$ の十分近いところに
support をもつ微分形式
(Thom class)
$\mathfrak{P}_i(\vec{v})$ のデルタ関数を近似

$[p_2^* c) \cancel{\in H_*(p_2^{-1}(\ldots))} = [X(\vec{v}-p_i)] \times c$

$$[\mathfrak{P}_i(\vec{v})] \cap [p_2^* c] \in H_*(\underbrace{\mathfrak{P}_i(\vec{v}) \cap p_2^{-1}(\mathfrak{L}(\vec{v}))}_{\text{コンパクト}})$$

同様に $f_i : H_*(\mathcal{L}(\vec{v}-e_i)) \longrightarrow H_*(\mathcal{L}(\vec{v}))$

$$(-1)^{\frac{1}{2}\dim X(\vec{v}-e_i) - X(v))} p_{2*}([\mathcal{B}_i(\vec{v})] \cap p_1^*(\cdot))$$

$$d = -v_0 \cdot id_{H_*(\mathcal{L}(\vec{v}))}$$

~~同様~~. $h_i = \{\delta_{0i} - (e_i, \vec{v})\} \cdot id_{H_*(\mathcal{L}(\vec{v}))}$

$\vec{v}$をすべて動かして $\bigoplus_{\vec{v}} H_*(\mathcal{L}(\vec{v}))$

上のoperatorとみなす.

Th. e_i, f_i, h_i は affine Lie alg. $\mathfrak{g}$ の定義関係式をみたす.

すなわち $\bigoplus_{v} H_*(\mathcal{L}(\vec{v}))$ は $\mathfrak{g}$ の表現である.

$[h_i, h_j] = 0$ $[h_i, d] = 0$

$[h_i, e_j] = c_{ji} e_j$, $[h_i, f_j] = -c_{ji} f_j$

$[d, e_i] = \delta_{0i} e_i$, $[d, f_i] = -\delta_{0i} f_i$

$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$

$(\mathrm{ad}\, e_i)^{1-c_{ij}} e_j = 0$ $(\mathrm{ad}\, f_i)^{1-c_{ij}} f_j = 0$

(Serre relation)

証明のスケッチ：

Serre relation は $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$ と

次から従う

<u>Lemma</u> e_i, f_i は locally nilpotent

i.e. 各 $\vec{v}$ に対し N: 十分大にとると

$$\left.\begin{matrix} e_i^N \\ f_i^N \end{matrix}\right|_{H_*(\mathcal{L}(\vec{v}))} = 0$$

∵ e_i : $\vec{v}$ を $\vec{v} - p_i$ にうつす. よってこちらは明らか.

f_i について $Q \otimes \mathbb{C}[x, y]/\Gamma \otimes \rho_0 \twoheadrightarrow \mathbb{C}[x, y]/\Gamma$

ρ_i - 成分を考える.

a次元 $\displaystyle\sum_j a_{ij} v_j + \delta_{0i} \geqq v_i$

左辺は v_i がふえても不変.

だから v_i だけが大きくなりすぎると

$X(\vec{v} + N p_i) = \phi$. //

$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$ が一番のポイント

$\cancel{}\, X(\vec{v}_1) \times X(\vec{v}_2) \times X(\vec{v}_3)$ $\quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \rho_i = \vec{v}_3 + \rho_j$

$\quad \cup\, p_{12}^{-1}(\mathcal{P}_i(\vec{v})) \quad \cup\, p_{23}^{-1}(\omega \mathcal{P}_j(\vec{v}))$

$X(\vec{v}_1) \times X(\vec{v}_2{}') \times X(\vec{v}_3)$ $\quad \vec{v}_2{}' = \vec{v}_1 - \rho_j = \vec{v}_3 - \rho_i$

$\cup \quad \cup$

$p_{12'}^{-1}(\omega \mathcal{P}_j(\vec{v}))$ $\quad p_{2'3}^{-1}(\mathcal{P}_i(\vec{v}))$

convolution の合成 $\quad p_{13*}(p_{12}^{-1} \cdot \cap p_{23}^{-1} \cdot)$ で与えられる

set theoretical な $\cap$ を考える

上 $\{(I_1, I_2, I_3) \mid I_1 \supset I_2 \subset I_3\}$

下 $\{(I_1, I_2', I_3) \mid I_1 \subset I_2' \supset I_3\}$

$I_1 \neq I_3$ のときは,

$I_1 \cap I_3 = I_2$ となるしか可能性がない.

I_1/I_2 : dim 1

I_3/I_2 : 〃

またこのとき

$I_2{}' = I_1 + I_3$

事実 $I_1 \neq I_3$ という開集合に制限すると

$\cap$ は transverse で, 上と下は同型になる.

(微分同相)

$r<i=i\neq j$ なときは $[e_i, f_j] = e_i f_j - f_j e_i$
$= 0$.

さらに,

$[e_i, f_i] = \sum_{v} c_v \cdot \mathrm{id}_{H_*(\mathfrak{X}(v))}$ も分かった.

for some constant c_v

$X_{i;0}(\vec{v})$ に制限して c_v を決定する.

$\parallel$ $\quad\nwarrow$ ϕ かもしれない開集合.

$\{\mathrm{Hom}_A(P_i, A/\Gamma)^{\Gamma}=0\}$

(ϕ のときは別のものを取る.)

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_i(\vec{v}) = \{I_1 \supset I_2\} \arrow[dr, "p_2"] & \\
& X(\vec{v}) \\
w\mathcal{F}_i(\vec{v}) = \{I_1 \subset I_2\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$p_2^{-1}(X_{i;0}(\vec{v})) = \phi$ by ②

$p_2^{-1}(X_{i;0}(\vec{v}))$;

projective bundle.

第一日目の計算と

似ている