$$X_{i,r}(\vec{v}) \overset{\text{def}}{=} \{ I \in X(\vec{v}) \mid \mathrm{Hom}_A(A_0, A_I) \text{ の } \rho_i^*\text{-成分の次元} = r$$

$$\left(\dim \mathrm{Hom}_{A\#\Gamma}(A_0\otimes\rho_i, A/I) = r \right) \}$$

とおく.

~~$p : X_{i,r}(\vec{v}) \cap \mathcal{I}(\vec{v}) \longrightarrow X_{i,0}(\vec{v} - re_i) \cap \mathcal{I}$~~

$$p : X_{i,r}(\vec{v}) \longrightarrow X_{i,0}(\vec{v} - r\rho_i)$$

$$\mathrm{Hom}_{A\#\Gamma}(A_0\otimes\rho_i, A/I)\otimes(A_0\otimes\rho_i) \longrightarrow A/I$$

evaluation hom

injective である.

そこで $p(I)$ を $A/p(I) = \text{cokernel}$ となるように定義する.

$$(p(I), I) \in \mathfrak{P}_i^{(r)}(\vec{v})$$

$X_{i,0}(\vec{v} - r\rho_i)$ は (ϕ ~~でなければ~~ かもしれない) 開集合であり

p は Grassmann b'dle

$$Gr(r, \underbrace{\mathrm{Hom}_{A\#\Gamma}(I, A_0\otimes\rho_i)})$$

$= \delta_{0i} - (\vec{v} - r\rho_i, \rho_i)$ 次元

$\left(\rho_0 - \wedge_1 Q\otimes(\vec{v} - r\rho_i)\right)$ の ρ_i-成分

これを $\mathcal{L}(\vec{v})$, $\mathcal{L}(\vec{v}-r\rho_i)$ に制限する

$$I \in \mathcal{L}(\vec{v}) \iff p(\cdot I) \in \mathcal{L}(\vec{v}-r\rho_i)$$

$$p : \underbrace{\mathcal{L}(\vec{v}) \cap X_{i;r}(\vec{v})}_{\mathcal{L}_{i;r}(\vec{v})} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{L}(\vec{v}-r\rho_i) \cap X_{i;0}}_{\mathcal{L}_{i;0}(\vec{v}-r\rho_i)}(\vec{v}-r\rho_i)$$

fiberの次元

$$= r\cdot(\delta_{0i} - (\vec{v}-r\rho_i, \rho_i) - r)$$
$$= r(\delta_{0i} - (\vec{v}, \rho_i) + r)$$

$$\dim X(\vec{v}) = 2v_0 - (\vec{v}, \vec{v})$$

$$\dim X(\vec{v}-r\rho_i) = 2v_0 - 2r\delta_{0i} - (\vec{v}-r\rho_i, \vec{v}-r\rho_i)$$

$$= 2v_0 - 2r\delta_{0i} - (\vec{v}, \vec{v}) + 2(r\rho_i, \vec{v}) - 2r^2$$

$$= 2v_0 - (\vec{v}, \vec{v}) - 2r\left(\delta_{0i} - (\vec{v}, \rho_i) + r\right)$$

$= \dim X(\vec{v}) - 2\cdot$ fiberの次元

$$\therefore \quad \dim \mathcal{L}(\vec{v}) \cap X_{i;r}(\vec{v}) = \frac{1}{2}\dim X(\vec{v})$$

$$\iff \dim \mathcal{L}(\vec{v}-r\rho_i) \cap X_{i;0}(\vec{v}-r\rho_i) = \frac{1}{2}\dim X(\vec{v}-r\rho_i)$$

Prop. $\mathcal{L}(\vec{v})$ (のすべての既約成分)は $\dim = \frac{1}{2}\dim X(\vec{v})$

Lemma $\mathcal{L}(\vec{v}) = \bigcup_{\substack{i \\ r \neq 0}} \mathcal{L}_{i,r}(\vec{v})$ if $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\mathrm{Hom}_A(A_0, A/I)$ を考える。

~~∵~~ $\underset{\substack{\cap \\ A_0}}{1}$ の行き先は、A/I の元で $f \bmod I$

$xf \bmod I = 0 = yf \bmod I$

となるもの

mult. by x, y $\underbrace{\text{は nilpotent だから}}_{\text{交換可能なので}}$

そのような $f \bmod I$ は存在する。

逆に 1 の行き先と $f \bmod I$ と決めると、

$\mathrm{Hom}_A(A_0, A/I)$ の元をえる

∴ $\neq 0$ //

(proof of Prop)

$|\vec{v}|$ に関する帰納法で行う。

$\vec{v} = \vec{0}$ のときは明らか。

~~ind.~~ の

$\mathcal{L}_{i;0}(\vec{v}-r\rho_i)$ は ~~内~~ $\mathcal{L}(\vec{v}-r\rho_i)$ の open set

だから ind. の仮定により 半分次元

$\therefore$ $\mathcal{L}_{i;r}(\vec{v})$ も 半分次元

Lemma より $\mathcal{L}(\vec{v})$ は半分次元 //

Crystal structure

$Y \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{L}(\vec{v})$

$$\varepsilon_i(Y) := Y \text{の generic な元 } I \text{ についての}$$

$$\dim \mathrm{Hom}_{A\# D}(A_0 \otimes \rho_i, A/I)$$

$$= \min_{I \in Y} \dim \mathrm{Hom} =$$

$$\varphi_i(Y) := \varepsilon_i(Y) + \delta_{i0} - (\vec{v}, \rho_i)$$

$\overline{p(Y \cap \mathcal{L}_{i;r}(\vec{v}))} =: Y'$: irr. component of $\mathcal{L}(\vec{v}-re_i)$

$r = \varepsilon_i(Y)$ のとき　　 ふつう $\varepsilon_i(Y') = 0$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_{i;0}(\vec{v}) \arrow[drr, "Gr(0,d)"'] & \mathcal{L}_{i;1}(\vec{v}+\rho_i) \arrow[dr, "Gr(1,d)"] & \cdots \arrow[d] & \mathcal{L}_{i;d}(\vec{v}+d\rho_i) \arrow[dl, "Gr(d;d)"] \\
 & & \mathcal{L}_{i;0}(\vec{v}) &
\end{tikzcd}
$$

$$\left(d = \delta_{0i} - (\vec{v}, \rho_i) \right)$$

そこで $Y \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{L}(\vec{v})$ s.t. $\varepsilon_i(Y) = 0$ に対し

対応する $\mathcal{L}(\vec{v} - k\rho_i)$ のキヤク成分を考えて

$\cancel{\tilde{f}_i(Y)} =$

$$
\begin{tikzcd}
0 & Y \arrow[l, "\tilde{e}_i"'] \arrow[r, shift left, "\tilde{f}_i"] \arrow[dr, equal] & Y_1 \arrow[l, shift left, "\tilde{e}_i"] \arrow[r, shift left] & \cdots \arrow[l, shift left, "\tilde{e}_i"] & Y_d \arrow[r, "\tilde{f}_i"] \arrow[dll, equal] & 0 \\
 & & Y & & &
\end{tikzcd}
$$

$$\bigsqcup_{\vec{v}} \mathrm{Irr}\,\mathcal{L}(\vec{v}) \xrightarrow{\tilde{e}_i,\, \tilde{f}_i} \bigsqcup \mathrm{Irr}\,\mathcal{L}(\vec{v}) \cup \{0\}$$

Kashiwara op.

キノウ法により すべての $Y \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{L}(\vec{v})$

は $\tilde{e}_i$ たちを何回かapplyして

$[\mathcal{L}(0)] \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{L}(0)$ にもっていける

このとき

$$f_i[Y] = \underbrace{[\hat{f}_i Y]}_{\pm(\varepsilon(Y)+1)} + \sum_{\substack{Y';\ \varepsilon_i(Y') \\ \geqq \varepsilon_i(\hat{f}_i Y)+1}} c_{Y'}[Y']$$

となることが証明できる

(Grassmann bdle の 計算)

帰納法により

$\forall [Y] \in U(\mathfrak{g}) \cdot [\mathrm{vac}]$ が分かる.

$$\therefore \bigoplus_{\vec{v}} H_{\substack{\dim X(\vec{v}) \\ 2\dim \mathcal{L}(\vec{v})}}(\mathcal{L}(\vec{v}))$$

は highest weight 表現

integrable であることは示してあったから

既約表現であることも

示された //