# 量子アファイン展開環の結晶基底
## 上智大学における集中講義

中島 啓

量子展開環は, Lusztig と柏原によって定義された標準基底, 結晶基底という, 様々ないい性質をもつ基底を持っている. 量子展開環の表現論は, 結晶基底の性質と深く絡んでおり, 結晶基底を調べることは, 表現論を調べることに直接つながっている. しかし, 結晶基底の定義は, Lusztig のものも柏原のものも '具体的' とはいえない. したがって, 結晶基底を調べるのには, 定義をいくら見ていても役に立たない. 何らかの他のアイデアが必要である.

この講義では, 有限次元のリー環とアファイン・リー環に対応する量子展開環に,

(1) PBW 基底と呼ばれる具体的な式で定義される基底を定義し,
(2) PBW 基底と標準基底 (=大域結晶基底) の基底の変換行列が, 上三角で対角成分が 1 で, 対角成分以外の成分が $q\mathbb{Z}[q]$ に属することを示す.

特に PBW 基底を用いて, 結晶基底のパラメトライズができることになる. そして, (2) の主張が量子アファイン展開環のある有限次元表現 (extremal ウェイト加群) の構造と深く関係していることを見ることになる.

また時間があれば, PBW 基底を用いて示される大域結晶基底に関する構造定理 (柏原と Lusztig の予想の解決) についても紹介したい.

この講義では, まず有限型のときに, PBW 基底から出発して標準基底を定義するという筋道を取り, (2) の主張が明らかになるように標準基底を定義する. これは Lusztig が最初の論文で使ったやり方であるが, 一部, 箙の表現論を証明に使っていた部分を完全に代数的に証明を与えた. ただし, $ADE$ 型以外のときには, そうして定義された標準基底が Lusztig-柏原の標準基底と同じであることは, ここでは示されない. (符号の umbiguity が問題として残されている.) またアファイン型のときは, 標準基底の構成については Lusztig-柏原の理論を援用することにして, ここでは存在は証明しない. PBW 型基底から出発するアプローチは, アファインのときにも可能なのであるが, 現在のところ一つの (技術的な?) 未解決問題があって, $A_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $E_n^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ 以外の時には, 定義ができていないのである. これはあとで説明する.

また, この講義では, 箙多様体の理論は用いず, ここで述べられるすべての結果は, 代数的に証明される. しかし, 幾何学的な背景を知っていた方が理解が深まるので, ところどころで紹介する. 詳しい説明はないので, Lusztig の教科書 [Lusztig の教科書] や

[Ringel] C. Ringel, *The Hall algebra approach to quantum groups*, in *XI Latin American School of Mathematics (Spanish) (Mexico City, 1993)*, 85–114, Soc. Mat. Mexicana, México, 1995.

を参考にしてほしい.

また, 後半の extremal ウェイト加群の理論においては, 箙多様体の同変 $K$ 群を使った定義が可能であるが, これについても詳しく説明しないので, 論文

[1] *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 145-238.

[2] *Quiver varieties and tensor products*, Invent. Math., **146** (2001), 399–449.

を参照してもらいたい.

extremal ウェイト加群の構造定理は, 幾何学的な構成からは 'ほぼ自明' になってしまうのである.

## Contents



## 量子展開環に関する教科書

[Lusztig の教科書] G. Lusztig, Introduction to Quantum Groups, Progress in Math. **110**, Birkhäuser, 1993.
[Hong-Kang] J. Hong and S.K. Kang, Introduction to quantum groups and crystal bases, Graduate Studies in Mathematics, 42. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
[Jantzen の教科書] J.C. Jantzen, Lectures on quantum groups, Graduate Studies in Mathematics, 6. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
[日本語の教科書] 柏原正樹, Crystal basis of modified quntized universal evneloping algbras, 山本敦子記, 東京大学数理科学セミナリーノート, 10, 東京大学, 1995.
[フランス語の教科書] M. Kashiwara, Bases cristallines des groupes quantiques, Edited by Charles Cochet, Cours Spécialisés, 9. Société Mathématique de France, 2002.
[谷崎の教科書] 谷崎俊之, リー代数と量子群共立叢書 現代数学の潮流 2002

## 量子アファイン展開環について,

[BN] J. Beck and H. Nakajima, *Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras*, Duke Math., **123** (2004), no. 2, 335–402.

## の中で主に使った参考文献

[1] T. Akasaka, *An integral PBW basis of the quantum affine algebra of type* $A_2^{(2)}$, Publ. RIMS **38** (2002), 803–894.
[2] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), 555–568.
[3] J. Beck, V. Chari and A. Pressley, *An algebraic characterization of the affine canonical basis*, Duke Math. J. **99** (1999), 455–487.
[4] I. Damiani, *The R-matrix for (twisted) affine algebras*, in *Representations and quantizations (Shanghai, 1998)*, 89–144, China High. Educ. Press, Beijing, 2000.
[5] M. Kashiwara, *Crystal bases of modified quantized enveloping algebra*, Duke Math. J. **73** (1994), 383–413.
[6] ———, *On level zero representations of quantized enveloping algebras*, Duke Math. J. **112** (2002), 117–175.

# Part 1.

## 1. $q$ 二項定理

$q$ を不定元とし, $n \in \mathbb{Z}$ に対して $q$-整数 $[n]$ を

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

によって定義する. $q$ を強調したいときには $[n]_q$ で表わす. これは整数 $n$ の $q$ **類似**と呼ばれる. 分子は分母で割り切れていることに注意すると, $[n]$ は $q$ に関する整数係数ローラン多項式, すなわち $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ の元である. $n \geq 0$ のとき

$$[n]^! = [n][n-1]\cdots[1]$$

とおく. また $m \geq n \geq 0$ に対して二項係数の $q$ 類似を

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m]^!}{[n]^![m]^!}$$

によって定義する. $0 < n < m$ のとき

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = q^{-n} \begin{bmatrix} m-1 \\ n \end{bmatrix} + q^{m-n} \begin{bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

が成り立つ. 実際, これは $q^{-n}[m-n] + q^{m-n}[n] = [m]$ から従う. (1.1) から帰納法により $\left[ \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right]$ が $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ に属することが従う. 次は二項定理の $q$ 類似である.

**命題 1.2.**

$$\prod_{h=0}^{k-1} (1 + q^{2h} z) = \sum_{t=0}^{k} q^{t(k-1)} \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix} z^t \qquad (k \geq 0)$$

証明. $k$ に関する帰納法で示す. $k = 0$ のときは明らかである. (左辺は 1 であると約束する.) $k$ まで正しいと仮定して $k+1$ のときを示す. 右辺に $1 + q^{2k} z$ をかけると

$$1 + \sum_{t=1}^{k} \left( q^{t(k-1)} \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix} + q^{2k+(t-1)(k-1)} \begin{bmatrix} k \\ t-1 \end{bmatrix} \right) z^t + q^{k(k+1)} z^{k+1}$$

となる. 真ん中の項に(1.1) を適用すれば, 示したい式の右辺の $k$ を $k+1$ で置き換えたものになるので, $k+1$ が正しいことが示された. □

**系 1.3.**

$$\begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix} \in q^{t(k-t)} (1 + q\mathbb{Z}[q])$$

証明. 命題 1.2 の左辺の $z^t$ の係数を考えればよい. □

**命題 1.4.** $m, n, t \geq 0$ のとき

$$\sum_{k+l=t} q^{ml-nk} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n \\ t \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

証明. 上の命題を用いて

$$\begin{aligned} &\sum_{t=0}^{m+n} q^{t(m+n-1)} \begin{bmatrix} m+n \\ t \end{bmatrix} z^t = \prod_{h=0}^{m+n-1} (1 + q^{2h} z) \\ &= \prod_{h=0}^{m-1} (1 + q^{2h} z) \prod_{h=0}^{n-1} (1 + q^{2h} q^{2m} z) = \sum_{k=0}^{m} q^{k(m-1)} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} z^k \sum_{l=0}^{n} q^{l(n-1)} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} q^{2ml} z^l \end{aligned}$$

となるので, $z^t$ の係数を比較して上の式を得る. □

$q$ 二項係数について

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m][m-1]\ldots[m-n+1]}{[n]^!}$$

が成り立つことに注意する. 右辺は, $m \in \mathbb{Z}$ のときにも意味を持つので, この式で $\left[ \begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} \right]$ の定義を拡張しておく. 次の性質

$$0 \leq m < n \Longrightarrow \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = 0, \tag{1.5}$$

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} n-1-m \\ n \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

が成り立つ.

**命題 1.7.** 命題 *1.4* が $m, n \in \mathbb{Z}$ のときも成り立つ.

## 2. $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$

2.1. **定義.** $q$ を不定元とし, $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ を $e$, $f$, $t$, $t^{-1}$ を生成元として持つ $\mathbb{Q}(q)$-代数で, 定義関係式

$$tt^{-1} = 1 = t^{-1}t, \qquad tet^{-1} = q^2 e, \qquad tft^{-1} = q^{-2} f, \qquad ef - fe = \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}}$$

を満たすものとする.

$$f^{(n)} = \frac{f^n}{[n]!}, \qquad e^{(n)} = \frac{e^n}{[n]!}$$

とおく.

2.2. **表現.** まず 1 次元表現 $V = \mathbb{Q}(q)v$ を調べる. すべての作用素は可換である. したがって

$$ev = tet^{-1}v = q^2 ev$$

が成り立つ. よって $ev = 0$ である. 同様に $fv = 0$ である. また

$$0 = [e, f]v = \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}} v$$

より, $tv = \pm v$ でなければならない. 逆に, $e \mapsto 0$, $f \mapsto 0$, $t \mapsto \pm 1$ は確かに $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現となる.

次に

$$V = \mathbb{Q}(q)v_0 \oplus \mathbb{Q}(q)v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}(q)v_n$$

とおき,

$$tv_i = \pm q^{n-2i} v_i, \qquad ev_i = \pm [n - i + 1] v_{i-1}, \qquad fv_i = [i + 1] v_{i+1}$$

とおく. ただし, $\pm$ はどちらか一方を取る. このとき定義関係式のうち非自明なのは $ef - fe = \frac{t-t^{-1}}{q-q^{-1}}$ だけであるが, これも $[i+1]_q[n-i]_q - [i]_q[n-i+1]_q = [n-2i]_q$ を示してチェックされる.

このように $t$ の固有値は, $\pm q^{\text{巾}}$ という形で現れるが, 以下では $q^{\text{巾}}$ となるような表現のみを取り扱う. このとき, 上の表現で $\pm$ の $+$ を取ったものを $V(n)$ で表わす.

$V = V(n)$ のとき, $v_0$ を最高ウェイトベクトルで, $v_i = f^{(i)} v_0$ とする. このとき

$$f^{(r)} v_i = \begin{bmatrix} r + i \\ r \end{bmatrix} v_{i+r}, \qquad e^{(r)} v_i = \begin{bmatrix} n + r - i \\ r \end{bmatrix} v_{i-r} \tag{2.1}$$

が成り立つ.

## 3. 量子展開環

3.1. **定義.** 量子展開環 $\mathbf{U}_q$ は, 対称化可能なカッツ・ムーディー・リー環 $\mathfrak{g}$ の普遍展開環 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$ を量子変形したものである. この節では, その定義を与える.

まず, **カルタン・データ**とは, 次のことである.

- 有限次元ベクトル空間 $\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Q}\alpha_i$ ($I$ は基底 $\{\alpha_i\}$ の添字集合),
- $(\ ,\ )$ : その上の $\mathbb{Q}$ に値を取る対称二次形式で次を満たすもの
  - すべての $i\in I$ に対して $(\alpha_i,\alpha_i)>0$,
  - $\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\in\mathbb{Z}_{\le 0}$ for $i\ne j$.

このとき, 行列 $(\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)})_{i,j\in I}$ を **(対称化可能な) カルタン行列**という. 対称化可能であるというのは, 対角行列 $\mathrm{diag}((\alpha_i,\alpha_i)\mid i\in I)$ をかければ対称行列になることに由来する.

[Kac の教科書] では, 対称化可能なカルタン行列を最初に与え, 内積 $(\ ,\ )$ はあとで与えている.

内積 $(\ ,\ )$ が正定値のとき, **有限型**という. この場合が有限次元の複素単純リー環に対応し, $ABCDEFG$ で分類される. 内積は長いルートの長さが $\sqrt{2}$ と約束する. また, $(\ ,\ )$ が半正定値のとき, **アファイン型**という.

カルタン行列が与えられれば, カッツ・ムーディー・リー環 $\mathfrak{g}$ の定義には十分であるが, $\mathbf{U}_q$ の定義には, さらに次の**ルート・データ**が必要である:

- $P$ : 有限階数の自由アーベル群 (ウェイト格子)
- $I$ : 有限集合 (単純ルートの添え字集合) と $\alpha_i\in P$, $h_i\in P^*\overset{\text{def.}}{=}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P,\mathbb{Z})$
- $(\ ,\ )$ と $\bigoplus\mathbb{Q}\alpha_i$ はカルタン・データであって, 次を満たすもの
  - $\langle h_i,\lambda\rangle=\frac{2(\lambda,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$

$P$ は, $\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ と取ることもできるが, 必ずしもそうしなくてもよい. これは, 有限次元の $\mathfrak{g}$ に対応する場合は, $\mathbf{U}_q$ の定義において, カルタン部分環に対応する部分は, $\mathbf{U}(\mathfrak{h})$ ではなく, '極大トーラス' で与えられていることによるのであり, 同じリー環をもつリー群が複数存在しうることに対応する. $P=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ が adjoint で, $P^*=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}h_i$ が単連結に対応する. しかし, $\mathfrak{g}$ がアファイン・リー環のときには, カルタン行列が可逆でないために, $P$ の階数として $\#I$ に取るか, もしくは $\alpha_i$ が一次独立になるように $\#I+1$ と取るかで, $\mathbf{U}_q$ とその表現論はもっと drastic に変わる.

次の記号を用意しておく:

- $Q=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ : ルート格子
- $Q_+=\sum_{i\in I}\mathbb{Z}_{\ge 0}\alpha_i$

$(\alpha_i,\alpha_i)/2\in\mathbb{Z}d^{-1}$ となる正の整数 $d$ を固定する. 不定元 $q_s$ を用意し, $q=q_s^d$ とする. しかし習慣により, $q$ を基本的な変数として取り扱う. 内積 $(\ ,\ )$ を定数倍してもよいときには, $d=1$ となるように正規化しておいてよい. いずれにせよ, これは本質的なことではない.

$q$-整数を $[n]_q=\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}$ で定義し, $q$-階乗, $q$-二項係数を通常の階乗, 二項係数の定義において整数を $q$-整数で置き換えたものとして定義する. また $q_i=q^{(\alpha_i,\alpha_i)/2}$ とし, $[n]_{q_i}$ 等を単に $[n]_i$ であらわす. 他でも $q$ のローラン多項式 $F$ に添字 $F_i$ とつけたものは, つねにこのような意味とする.

**定義 3.1.** 量子展開環 $\mathbf{U}_q$ は, $e_i$, $f_i$, $q(h)=q^h$ ($i\in I$, $h\in d^{-1}P^*$) を生成元として持つ $\mathbb{Q}(q_s)$ 上の代数で, 次の基本関係式で定義されるものである.

$$q^0=1,\qquad q^{h_1+h_2}=q^{h_1}q^{h_2}\quad\text{for } h_1,h_2\in d^{-1}P^*, \tag{3.2}$$

$$q^he_iq^{-h}=q^{\langle h,\alpha_i\rangle}e_i,\qquad q^hf_iq^{-h}=q^{-\langle h,\alpha_i\rangle}f_i\qquad\text{for } i\in I,\ h\in d^{-1}P^*, \tag{3.3}$$

$$[e_i,f_j]=\delta_{ij}\frac{t_i-t_i^{-1}}{q_i-q_i^{-1}}\qquad\text{for } i,j\in I \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}}(-1)^ke_i^{(k)}e_je_i^{(1-a_{ij}-k)}=0=\sum_{k=0}^{1-a_{ij}}(-1)^kf_i^{(k)}f_jf_i^{(1-a_{ij}-k)} \tag{3.5}$$

ただし, $t_i=q(\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}h_i)$, $e_i^{(n)}=e_i^n/[n]_i^!$ とする.

最後の関係式(3.5) は**量子セール関係式**とよばれる. [Lusztig の教科書] では, $\mathbf{U}_q$ (より正確には下に述べる三角部分環 $\mathbf{U}_q^{\pm}$) は, この関係式の代わりに §6 で導入される内積に関する根基で割って定義される. 上のよく使われる定義との同値性は, カッツ・ムーディー・リー環に関する対応する事実と, $q=1$ への特殊化を用いて証明される.

$\mathfrak{g}$ を強調したいときには, $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ と書く. しかし, ほとんどの場合は $\mathfrak{g}$ を変える必要がないので, 単に $\mathbf{U}_q$ と書く.

**命題 3.6.** $\mathrm{U}_q$ 上に余積 $\Delta$, 余単位写像 $\varepsilon$, 転置写像 $S$ を

$$\Delta(q^h) = q^h \otimes q^h, \quad \Delta(e_i) = e_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes e_i, \quad \Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + t_i \otimes f_i,$$
$$\varepsilon(q^h) = 1, \quad \varepsilon(e_i) = \varepsilon(f_i) = 0,$$
$$S(q^h) = q^{-h}, \quad S(e_i) = -e_i t_i, \quad S(f_i) = -t_i^{-1} f_i$$

によって定義することができ, $\mathbf{U}_q$ はホップ代数となる.

[Lusztig の教科書] とは, $\Delta$ の定義が $e_i$ と $f_i$ の入れ替えの分だけずれているので注意すること. $\Delta^{\mathrm{Lusztig}} = (\bar{\ } \otimes \bar{\ }) \circ (\vee \otimes \vee) \circ \Delta \circ \vee \circ \bar{\ }$ となっている. 下に導入する $\bar{\ }$ と $\vee$ の合成で共役になっている.

各 $i \in I$ 毎に $e_i, f_i, t_i$ で生成される部分環は $\mathbf{U}_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$ と同型である. (ただしウェイト格子としては, $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\alpha_i$ を取るものと約束する.) さらに $\Delta$ についても閉じている.

$\mathbf{U}_q$ の $\mathbb{Q}$-代数としての自己同型 **bar involution** $\bar{\ }$ を次で定義する:

$$\bar{q} = q^{-1}, \quad \overline{q^h} = q^{-h}, \quad \overline{e_i} = e_i, \quad \overline{f_i} = f_i. \tag{3.7}$$

$\mathbf{U}_q$ の $\mathbb{Q}(q_s)$-代数としての自己同型 $\vee$ と反自己同型 $*$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} &e_i^{\vee} = f_i, \quad f_i^{\vee} = e_i, \quad (q^h)^{\vee} = q^{-h}, \\ &e_i^* = e_i, \quad f_i^* = f_i, \quad (q^h)^* = q^{-h}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

$\xi \in Q = \bigoplus \mathbb{Z}\alpha_i$ に対する $\mathbf{U}_q$ の**ウェイト空間**を

$$(\mathbf{U}_q)_\xi = \{x \in \mathbf{U}_q \mid q^h x q^{-h} = q^{\langle h, \xi\rangle} x \quad \text{for any } h \in d^{-1}P^*\}$$

によって定義する.

$e_i$ で生成される部分代数を $\mathbf{U}_q^+$, $f_i$ で生成されるものを $\mathbf{U}_q^-$, $q^h$ で生成されるものを $\mathbf{U}_q^0$ であらわす. 次の三角分解が成り立つ.

**定理 3.9.** 積を与える次の写像は, $\mathbb{Q}(q_s)$-ベクトル空間の同型の同型になる.

$$\mathbf{U}_q^- \otimes_{\mathbb{Q}(q_s)} \mathbf{U}_q^0 \otimes_{\mathbb{Q}(q_s)} \mathbf{U}_q^+ \xrightarrow{\cong} \mathbf{U}_q; x \otimes t \otimes y \mapsto xty$$

$\mathbf{U}_q^{\pm}$ の定義には, カルタン・データを与えるだけで十分で, ルート・データは必要ないことを注意しておこう.

また $(\mathbf{U}_q^{\pm})_\xi = (\mathbf{U}_q)_\xi \cap \mathbf{U}_q^{\pm}$ とおく. $\pm\xi \in Q_+ = \bigoplus \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$ でなければ $(\mathbf{U}_q^{\pm})_\xi = 0$ となることに注意する.

3.2. **表現.** $\mathbf{U}_q$ の表現 $M$ が**ウェイト空間分解**を持つとは, 次の直和分解が成立するときをいう.

$$M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda \qquad M_\lambda \overset{\text{def.}}{=} \{m \in M \mid q^h m = q^{\langle h, \lambda\rangle} m \text{ for all } h \in d^{-1}P^*\}$$

直和因子 $M_\lambda$ で $0$ でないもののことをウェイトが $\lambda$ の**ウェイト空間**という.

$\mathbf{U}_q$ の表現 $M \neq 0$ が**最高ウェイト表現**であるとは, あるベクトル $m$ とウェイト $\lambda \in P$ とであって, 次の条件を満たすものが存在するときをいう:

$$m \in M_\lambda, \qquad M = \mathbf{U}_q \cdot m, \qquad e_i m = 0 \quad \text{for } i \in I.$$

このとき $\lambda$ を $M$ の**最高ウェイト** , $m$ を $M$ の**最高ウェイト・ベクトル**とよぶ. このとき $M$ はウェイト空間分解を持つことが容易に分かる. しかもそのウェイト $\mu$ は $\lambda$ よりも次の意味で小さい:

$$\mu \leq \lambda \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \lambda - \mu \in Q_+ = \sum \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i.$$

この順序 $\le$ をウェイトの空間 $P$ に定まる**支配的順序**という.

$\mathbf{U}_q$ の左イデアル $J$ を

$$J \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_i \mathbf{U}_q e_i + \sum_h \mathbf{U}_q (q(h) - q^{\langle h,\lambda\rangle})$$

で定義する. $\mathbf{U}_q/J$ を左からの掛け算によって $\mathbf{U}_q$ の表現と思ったものを**ヴァーマ加群**といい, $M(\lambda)$ で表わす. 1 の像 $v_\lambda$ を最高ウェイト・ベクトルにもつ最高ウェイト表現である. 次の性質は容易に示される:

- 最高ウェイト $\lambda$ をもつ任意の最高ウェイト表現は, ヴァーマ加群の商である.
- $\mathbf{U}_q^- \ni x \mapsto xv_\lambda \in M(\lambda)$ は $\mathbb{Q}(q_s)$-ベクトル空間の同型である.
- $M(\lambda)$ はただ一つの既約な商を持つ.

$\mathbf{U}_q$ のウェイト空間分解を持つ表現 $M$ が**可積分**であるとは, 任意のベクトル $m \in M$ と $i \in I$ に対して正の整数 $n$ が存在して $e_i^n m = 0 = f_i^n m$ が成立するときをいう.

**命題 3.10.** *$M$ を最高ウェイトが $\lambda$ の最高ウェイト・ベクトル $m$ をもつ最高ウェイト表現とする. $M$ が可積分であるための必要十分条件は, 次の二条件が成り立つことである:*

- *$\lambda$ は***支配的***である. すなわち $\langle h_i, \lambda\rangle \ge 0$ が任意の $i \in I$ について成り立つ.*
- *$f_i^{\langle h_i,\lambda\rangle+1} m = 0$ が任意の $i \in I$ について成り立つ.*

$V(\lambda)$ を $J$ と $f_i^{\langle h_i,\lambda\rangle+1}$ で生成される左イデアルで $\mathbf{U}_q$ を割ってできる最高ウェイト表現とし, $v_\lambda$ を 1 の像とする.

次に述べる $q = 1$ への特殊化と, カッツ・ムーディー・リー環の表現についての定理 (下の (2) の主張, [Kac の教科書, Cor. 10.4]) により, $V(\lambda)$ が既約であることが分かる.

**定理 3.11.** (1) *ヴァーマ加群 $M(\lambda)$ の既約商が可積分であるための必要十分条件は, $\lambda$ が支配的であることである.*

(2) *最高ウェイト表現 $M$ が可積分ならば自動的に既約である.*

(3) *$V(\lambda) \cong \mathbf{U}_q^- / \sum_{i\in I} \mathbf{U}_q^- f_i^{\langle h_i,\lambda\rangle+1}$ が成り立つ.*

$\mathbf{U}_q^-$ の bar involution $\overline{\phantom{x}}$ は, 上の (3) より自然に $V(\lambda)$ の $\overline{\phantom{x}}$ を誘導する. このとき

$$\overline{x \cdot v} = \overline{x} \cdot \overline{v} \qquad \text{for } x \in \mathbf{U}_q,\ v \in V(\lambda)$$

が成立する.

**定義 3.12.** 一般に表現 $M$ 上の **bar involution** とは, $\mathbb{Q}$-線型な対合 $\overline{\phantom{x}} : M \to M$ で上の性質を持つもののことをいう.

任意の可積分表現 $M$ で性質

- 任意の $m \in M$ に対して, ある $N$ が存在して $x \in (\mathbf{U}_q^+)_\xi$ $(|\xi| \ge N)$ は $xm = 0$ を満たす.

を持つものは完全可約で, 既約最高ウェイト加群の直和になることが, カッツ・ムーディー・リー環のときと同様に, (量子化された) カシミール元を用いることによって証明される. ([Lusztig の教科書, §6.2])

3.3. **integral form.** $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[q_s, q_s^{-1}]$ とし, $\mathbf{U}_q$ の **integral form** ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q$ を $e_i^{(n)}$, $f_i^{(n)}$, $q^h$ で生成される $\mathbf{A}$-部分代数として定義する. $\Delta$, $\overline{\phantom{x}}$, $*$ は ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q$ を保つ.

${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^\pm = \mathbf{U}_q^\pm \cap {}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q$, ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^0 = \mathbf{U}_q^0 \cap {}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q$ とおく. ウェイト空間の integral form も同様に定義する.

環準同型写像 $\mathbf{A} \to \mathbb{C}; q_s \mapsto 1$ があるので, $\mathbf{A}$ 上定義されたものは, $\otimes_{\mathbf{A}} \mathbb{C}$ を取ることによって $q = 1$ に特殊化することができる.

あとでは, この integral form をもっぱら使い, それが標準基底の理論で大切な役割を果たすのであるが, ここではもっと安直に特殊化できるものを使う. ここだけで用いられる記号であるが, $\mathbf{A}_1 \stackrel{\text{def.}}{=} \{ f(q_s) \in \mathbb{Q}(q_s) \mid f \text{ は } q_s = 1 \text{ で正則} \}$ とおく. これは局所環で極大イデアルは $(q-1)\mathbf{A}_1$ である. ${}_{\mathbf{A}_1}\mathbf{U}_q$, ${}_{\mathbf{A}_1}\mathbf{U}_q^\pm$ を対応する integral form とする.

**定理 3.13.** $({}_{\mathbf{A}_1}\mathbf{U}_q^{\pm})_\xi$ は有限階数の自由な $\mathbf{A}_1$-加群である．また，${}_{\mathbf{A}_1}\mathbf{U}_q^{\pm}$ の $q \mapsto 1$ への特殊化 ${}_{\mathbf{A}_1}\mathbf{U}_q^{\pm} \otimes_{\mathbf{A}_1} \mathbb{C}$ は，$\mathfrak{n}^{\pm}$ の普遍展開環 $\mathbf{U}(\mathfrak{n}^{\pm})$ と写像

$$\mathbf{U}(\mathfrak{n}^{\pm}) \ni e_i^{(n)}(or\ f_i^{(n)}) \to e_i^{(n)}(or\ f_i^{(n)}) \in {}_{\mathbf{A}_1}\mathbf{U}_q^{\pm} \otimes_{\mathbf{A}_1} \mathbb{C}$$

によって同型である．ただし左辺の $e_i^{(n)}$ は $e_i^n/n!$ で定める．

事実としては, ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q$ についても同じ結果が正しいことが, 標準基底の存在から分かる．もしくは, 有限型のときは PBW 基底からも分かる．しかし, PID である $\mathbf{A}_1$ (したがって $\mathbb{Q}[q_s, q_s^{-1}]$ でも同様である) に主張を弱めておけば, そのような苦労は必要なく, $({}_{\mathbf{A}_1}\mathbf{U}_q^{\pm})_\xi$ が有限階数の自由な $\mathbf{A}_1$-加群であることがただちに従う．([Hong-Kang, §§3.3-3.4], [谷崎の教科書, 定理 5.7] 参照)

また, 後半の主張は, 次のようにして示す．

- 準同型写像が存在することは, 量子セール関係式の $q = 1$ への特殊化が通常のセール関係式になっていることによる．また定義から全射である．
- 可積分最高ウェイト加群 $V(\lambda)$ について, 対応する integral form ${}_{\mathbf{A}_1}V(\lambda)$ を構成しする．
- カッツ・ムーディー・リー環については, 可積分最高ウェイト加群が

$$\overline{V}(\lambda) \cong \mathbf{U}(\mathfrak{n}^-)/\sum_{i\in I}\mathbf{U}(\mathfrak{n}^-)f_i^{\langle h_i,\lambda\rangle+1}$$

  となることが知られているので, $\overline{V}(\lambda)$ から特殊化 ${}_{\mathbf{A}_1}V(\lambda) \otimes_{\mathbf{A}_1} \mathbb{C}$ への全射線型写像が誘導される．
- ところが, $\overline{V}(\lambda)$ は既約だから, これは同型にならざるを得ない．
- $\lambda$ をどんどん大きくして, 普遍展開環についての主張を導く．

integral form ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q$ は他にも 1 の巾根への特殊化を定めるときにも用いられるが, ここでは触れない．また, あとで述べる標準基底の定義の際にも重要な役割を果たす．

## 4. 組み紐群の作用

この節では, $\mathbf{U}_q$ への組み紐群の自己同型としての作用を定義する. この結果は Lusztig によるが,

[Saito:1994] Y. Saito, *PBW basis of quantized universal enveloping algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 30 (1994), no. 2, 209–232.

に従って導入する. 組み紐群の定義関係式の証明は, Lusztig のものよりも筋道がすっきりしていると思うが, それでもかなり計算をする必要がある. ここでは, はしょるので, 興味のある方は原論文にあたってもらいたい.

また [Lusztig の教科書] の記号との対応は次で与えられる.

$$T_i = T''_{i,1}, \quad T_i^{-1} = T'_{i,-1}, \quad {}^{-} \circ T_i \circ {}^{-} = T''_{i,-1}, \quad {}^{-} \circ T_i^{-1} \circ {}^{-} = T'_{i,1}$$

$V$ が $\mathfrak{g}$ の可積分表現のときに, $r_i = \exp(e_i)\exp(-f_i)\exp(e_i)$ は, $V$ の線型変換を与え, ウェイト空間 $V_\mu$ をワイル群で移したウェイト空間 $V_{s_i\mu}$ に移すことを思い出そう. 組み紐群の作用素は, これの $q$-類似と考えることができる.

$V$ を $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ の可積分表現とし, $v \in V$ をウェイト $m$ のベクトルとするとき

$$T(v) = \exp_{q^{-1}}(q^{-1}et^{-1})\exp_{q^{-1}}(-f)\exp_{q^{-1}}(qet)q^{m(m+1)/2}v$$

とおく. ただし

$$\exp_{q^{-1}} X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{-k(k-1)}{2}} X^k}{[k]!}$$

とする. $V$ は可積分であるから, 和は有限和であることに注意しよう.

このように, 無限和なので $\mathbf{U}_q$ には入っていないが, 可積分表現への作用素としては定義できるような元は, 今後たびたび現れることになる.

演習問題 4.1. $(\exp_q x)^{-1} = \exp_{q^{-1}}(-x)$ を証明せよ.

**命題 4.2.** (1) $v$ がウェイト $m$ のとき

$$T(v) = \sum_{\substack{a,b,c\geq 0\\ -a+b-c=m}} (-1)^b q^{b-ac} e^{(a)} f^{(b)} e^{(c)} v$$

である.

(2) $V = V(n)$ のとき, $v_0$ を最高ウェイトベクトルで, $v_i = f^{(i)}v_0$ とすると $T(v_i) = (-1)^{n-i}q^{(n-i)(i+1)}v_{n-i}$ が成り立つ.

証明. 完全可役性から (1) も $V = V(n)$ のときに示せばよい. このときに (1),(2) を同時に示そう. まず(2.1) で見たように

$$f^{(r)}v_i = \begin{bmatrix} r+i \\ r \end{bmatrix} v_{i+r}, \qquad e^{(r)}v_i = \begin{bmatrix} n+r-i \\ r \end{bmatrix} v_{i-r}$$

に注意する. よって

$$\begin{aligned} &T(v_i) \\ &= \sum_{a,b,c\geq 0} (-1)^b q^{\frac{-a(a-1)}{2}} (q^{-1}et^{-1})^{(a)} q^{\frac{-b(b-1)}{2}} f^{(b)} q^{\frac{-c(c-1)}{2}} (qet)^{(c)} q^{\frac{(n-2i)(n-2i+1)}{2}} v_i \\ &= \sum_{a,b,c\geq 0} (-1)^b q^A e^{(a)} f^{(b)} e^{(c)} v_i \\ &= \sum_{a,b,c\geq 0} (-1)^b q^A \begin{bmatrix} n-i+c \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b+i-c \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-i+a-b+c \\ a \end{bmatrix} v_{i-a+b-c} \end{aligned}$$

となる. ただし

$$A = \frac{-a(3a-1)}{2} - \frac{b(b-1)}{2} + \frac{c(c+1)}{2} + 2a(b-c) + \frac{(n-2i)(n-2i+1)}{2} + (n-2i)(c-a)$$

である. (2) は, $N = -a+b-c$ を固定して上の式の $v_{i-a+b-c} = v_{i+N}$ の和を取ると

$$(-1)^{n-i}q^{(n-i)(i+1)}\delta_{N,n-2i}$$

となることに他ならない．これをチェックしよう．$N$ の他に $a$ を固定して (したがって $b-c=N+a$ も固定される), 次の和を計算する:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{b,c\geq 0\\ b-c=N+a}} (-1)^b q^{c(n-2i-N-a+1)-i(n-i+1)} \begin{bmatrix} n-i+c \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b+i-c \\ b \end{bmatrix} \\
&= \sum_{c:i\geq c\geq 0} (-1)^{b-c} q^{(-n+i-1)(i-c)-c(N+a+i)} \begin{bmatrix} -n+i-1 \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N+a+i \\ i-c \end{bmatrix} \quad \text{((1.6) より)} \\
&= (-1)^{N+a} \begin{bmatrix} -n+2i+N+a-1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{(命題 1.4 より)} \\
&= (-1)^{N+a+i} \begin{bmatrix} n-i-N-a \\ i \end{bmatrix} \quad \text{((1.6) より)} \\
&= (-1)^{N+a+i} \begin{bmatrix} n-i-N-a \\ n-2i-N-a \end{bmatrix} = (-1)^{n-i} \begin{bmatrix} -i-1 \\ n-2i-N-a \end{bmatrix} \quad \text{(****より)}
\end{aligned}$$

ここで

$$A = \frac{(n-2i)(n-2i+1)}{2} - \frac{(-a+b-c)(-a+b-c+1)}{2} + c(n-2i+c-b+1) - a(n-2i) - a(a-b+c) + b - c$$

に注意して, 上の式を用いて $v_{i+N}$ の係数を計算すると

$$\begin{aligned}
&(-1)^{n-i} q^B \sum_{a\geq 0} q^{-a(n-2i-N+1)} \begin{bmatrix} -i-1 \\ n-2i-N-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-i+a-b+c \\ a \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{n-i} q^{B-(n-2i-N)(n-i-N)} \\
&\qquad \times \sum_{a\geq 0} q^{a(i+1)+(n-2i-N-a)(n-i-N)} \begin{bmatrix} -i-1 \\ n-2i-N-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-i-N \\ a \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{n-i} q^{B-(n-2i-N)(n-i-N)} \begin{bmatrix} n-2i-N-1 \\ n-2i-N \end{bmatrix} \quad \text{(命題 1.4 より)} \\
&= (-1)^{n-i} q^{B-(n-2i-N)(n-i-N)} \delta_{n-2i-N,0}
\end{aligned}$$

となる．ただし

$$B = \frac{(n-2i)(n-2i+1)}{2} - \frac{N(N+1)}{2} + N + i(n-i+1)$$

である．$N = n-2i$ のとき, $B$ は $(n-i)(i+1)$ に等しいので (2) が示された．(1) は, $N = n-2i$ のときに $A = b - ac$ となることから従う． □

**命題 4.3.** *$V$ を $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ の可積分表現とし, $v \in V$ とするとき, 次の式が成り立つ.*
(1) $T(q^h v) = q^{-h} T(v)$
(2) $T(ev) = (-ft)T(v)$
(3) $T(fv) = (-t^{-1}e)T(v)$

証明．命題 4.2(2) のように $V = V(n)$, $v = v_i$ としてよい．(1) は, $v_i$, $v_{n-i}$ のウェイトがそれぞれ $n-2i$, $-n+2i$ であることから従う．(2) は,

$$\begin{aligned}
T(ev_i) &= [n+1-i]T(v_{i-1}) = (-1)^{n-i+1}[n+1-i]q^{(n-i+1)i} v_{n-i+1}, \\
-ftT(v_i) &= ft(-1)^{n-i+1} q^{(n-i)(i+1)} v_{n-i} \\
&= (-1)^{n-i+1} q^{(n-i)(i+1)+2i-n}[n+1-i] v_{n-i+1}
\end{aligned}$$

から従う．(3) も同様にチェックできる． □

$T$ はテンソル積とは, compatible でなく, 可積分表現 $M$, $N$ のテンソル積 $M \otimes N$ に働く $T$ は, $T \otimes T$ では与えられない．'intertwiner' を作るために作用素 $L$ を

$$L(x \otimes y) = \sum_n q^{n(n-1)/2} \prod_{a=1}^n (q^a - q^{-a}) e^{(n)} x \otimes f^{(n)} y$$

によって定義する．

**命題 4.4.** *$L$ は可逆で, 次が成立する.*

$$L^{-1} = (\overline{\phantom{x}} \otimes \overline{\phantom{x}}) \circ L \circ \overline{\phantom{x}}, \quad L \circ T(x \otimes y) = Tx \otimes Ty \qquad \textit{for } x \otimes y \in M \otimes N.$$

証明．$\Delta^{\mathrm{Lusztig}} = (\overline{\phantom{x}} \otimes \overline{\phantom{x}}) \circ (\vee \otimes \vee) \circ \Delta \circ \vee \circ \overline{\phantom{x}}$ であるから, $\Phi \overset{\text{def.}}{=} \vee \circ \overline{\phantom{x}}$ で [Lusztig の教科書, 5.3.4] の式 $T^{\bullet \otimes \bullet} \circ L^{\mathrm{Lusztig}} = T \otimes^{\mathrm{Lusztig}} T$ の共役を取って, $\Phi \circ T \circ \Phi = T^{-1}$ に注意すると, $(T^{\bullet \otimes \bullet})^{-1} \circ (\Phi \otimes \Phi)(L^{\mathrm{Lusztig}}) = T^{-1} \otimes T^{-1}$ よって $L = (\Phi \otimes \Phi)(L^{\mathrm{Lusztig}})$ として結論を得る． □

次に一般の $\mathfrak{g}$ の場合に戻る. $V$ を $\mathbf{U}_q$ の可積分表現とする. 各 $i$ 毎に $\mathbf{U}_{q_i}(\mathfrak{sl}_2) \to \mathbf{U}_q$ を通じて, $V$ を $\mathbf{U}_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$ の表現と考えることにより, 上の作用素 $T$ を定義することができる. これを $T_i$ で表わす. また, $S$, $S'$ が可積分表現 $V$ に働く作用素で $S$ が可逆のときに, $\mathrm{Ad}(S)(S') = SS'S^{-1}$ によって $\mathrm{Ad}(S)(S')$ を定める.

**定理 4.5.** (1) $x \in \mathbf{U}_q$ に対して, $\mathrm{Ad}(T_i)(x)$ は $\mathbf{U}_q$ の元で実現される. すなわち, ある $x' \in \mathbf{U}_q$ が存在して,

$$T_i(xv) = x'T_i(v) \quad \textit{for } v \in V$$

が, 任意の可積分表現 $V$ とそのベクトル $v \in V$ について成り立つ. しかもそのような $x'$ はただ一つである.

(2) 上の写像 $\mathrm{Ad}(T_i)\colon x \mapsto x'$ は, $\mathbf{U}_q$ の自己同型写像である.

(3) $\mathrm{Ad}(T_i)\colon x \mapsto x'$ は生成元に対して次の式で与えられる:

$$\begin{aligned} q^{h_j} &\mapsto q^{s_i h_j}, \quad e_i \mapsto -f_i t_i, \quad f_i \mapsto -t_i^{-1} e_i, \\ e_j &\mapsto \sum_{r+s=-a_{ij}} (-1)^s q_i^{-s} e_i^{(r)} e_j e_i^{(s)} \quad (i \neq j), \\ f_j &\mapsto \sum_{r+s=-a_{ij}} (-1)^r q_i^{r} f_i^{(r)} f_j f_i^{(s)} \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

このアプローチでは, $\mathfrak{sl}_2$ の場合に定義を与えれば, '自然に' $\mathrm{Ad}(T_i)(f_j)$ が定まってしまう. $\mathrm{Ad}(T_i)$ の定義を上で与えると考えてもよいが, それよりはこのアプローチの方が見易いであろう.

証明. まず一意性を示す. $x'$ と $x''$ が条件を満たすとすると, $(x'-x'')T_i(v) = 0$ が任意の可積分表現 $V$ と $v \in V$ について成り立つことになる. $T_i$ が可逆であることに注意すると, $x'-x''$ は任意の可積分表現に 0 で働くことになる. よって***により $x' = x''$ である. また, $x_1$, $x_2 \in \mathbf{U}_q$ に対して, 対応する元 $x_1'$, $x_2' \in \mathbf{U}_q$ が示されていたとすると, $ax_1 + bx_2$ と $x_1x_2$ に対応する元は, それぞれ $ax_1' + bx_2'$, $x_1'x_2'$ で与えられる. よって (1) は $\mathbf{U}_q$ の生成元について示せば十分であり, またそれが示されれば (2) は, 自動的に従う.

$x = e_i$, $f_i$ について対応する $x'$ が存在し, (3) の式で与えられることは, すでに命題 4.3 で示されている. また $x = q^{h_j}$ についてもウェイトの関係を見れば, (3) の式で与えられることは明らかである. 残った $x = e_j$, $f_j$ $(i \neq j)$ の場合を示すために若干の準備をする. □

$A$ をホップ代数とするとき, $(a_1 \otimes a_2) \cdot y = a_1 y S(a_2)$ によって, $A$ に $A \otimes A$-加群の構造を入れ, さらに $\Delta$ によって $A$-加群の構造を入れる. これを $\mathrm{ad}(x)y$ で表わす. すなわち

$$\mathrm{ad}(x)y = \sum x_i y S(x_i'), \qquad (\Delta x = \sum x_i \otimes x_i')$$

となる. $\mathrm{ad}\colon A \to \mathrm{End}_A(A)$ は, 環準同型である. $A = \mathbf{U}_q$ のときに生成元について, その行き先を定めると

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(q^{h_i})(x) &= q^{h_i} x q^{-h_i}, \\ \mathrm{ad}(e_i)(x) = e_i x t_i - x e_i t_i, &\quad \mathrm{ad}(f_i)(x) = f_i x - t_i x t_i^{-1} f_i \end{aligned}$$

となる. 帰納法により

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(f_i^{(m)})(x) &= \sum_{r+s=m} (-1)^r q_i^{r(1-m)} f_i^{(s)} t_i^r x t_i^{-r} f_i^{(r)} \\ \mathrm{ad}(e_i^{(m)})(x) &= \sum_{r+s=m} (-1)^r q_i^{r(m-1)} e_i^{(s)} x e_i^{(r)} t_i^m \end{aligned}$$

が証明される. また $*$ を(3.8) の反自己同型とするとき, $\mathrm{ad}^*(x)(y) = (\mathrm{ad}(x)(y^*))^*$ によって定める. $\mathrm{ad}^*(x)$ は $\mathbf{U}_q$ の準同型であり, $\mathrm{ad}^*\colon \mathbf{U}_q \to \mathrm{End}_{\mathbf{U}_q} \mathbf{U}_q$ は, 環準同型である. 生成元に対しては

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}^*(q^{h_i})(u) &= q^{h_i} u q^{-h_i}, \\ \mathrm{ad}^*(e_i)(u) = t_i^{-1} u e_i - t_i^{-1} e_i u, &\quad \mathrm{ad}^*(f_i)(u) = u f_i - f_i t_i u t_i^{-1} \end{aligned} \tag{4.6}$$

が示される．上の式より

$$\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(x) = \sum_{r+s=m} (-1)^r q_i^{r(1-m)} f_i^{(r)} t_i^r x t_i^{-r} f_i^{(s)}$$
$$\mathrm{ad}^*(e_i^{(m)})(x) = \sum_{r+s=m} (-1)^r q_i^{r(m-1)} t_i^{-m} e_i^{(r)} x e_i^{(s)} \tag{4.7}$$

が成り立つ．特別な場合の次の二つの式はあとでよく使われる:

$$\mathrm{ad}(f_i^{(m)})(f_j) = \sum_{r+s=m} (-1)^r q_i^{r(-a_{ij}+1-m)} f_i^{(s)} f_j f_i^{(r)},$$
$$\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j) = \sum_{r+s=m} (-1)^r q_i^{r(-a_{ij}+1-m)} f_i^{(r)} f_j f_i^{(s)}. \tag{4.8}$$

量子セール関係式(3.5) は, $\mathrm{ad}(f_i^{(-a_{ij}+1)})(f_j) = 0$, もしくは $\mathrm{ad}^*(f_i^{(-a_{ij}+1)})(f_j) = 0$ と書き換えられることに注意しよう．

**補題 4.9.** $i \neq j$ とする．$V = \bigoplus_{k=0}^{-a_{ij}} \mathbb{Q}(q)\,\mathrm{ad}^*(f_i^{(k)})(f_j)$ とおく．$\mathrm{ad}^*$ を通じて $V$ は $\mathbf{U}_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$ の既約表現になり, その最高ウェイト・ベクトルは $f_j$ で, 最高ウェイトは $-a_{ij}$ である．特に

$$\mathrm{ad}^*(e_i^{(k)})\left(\mathrm{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j)\right) = \mathrm{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j)$$

が成り立つ．

証明．$\mathrm{ad}^*$ が環準同型であること, $\mathrm{ad}^*(e_i)(f_j) = 0$ となることから, 主張は容易にチェックできる． □

定理 4.5 の証明の続きに入る．可積分表現 $V$ に働く作用素 $T_i'$ を

$$T_i' = \exp_{q_i^{-1}}(-f_i) \exp_{q_i^{-1}}(q_i e_i t_i)$$

によって定義する．$T_i'$ は $T_i$ の定義の真ん中の二項である:

$$T_i v = \exp_{q_i^{-1}}(q_i^{-1} e_i t_i^{-1}) T_i' q_i^{m(m+1)} v, \qquad (m = \langle h_i, \mathrm{wt}(v)\rangle)$$

定理 4.5(3) の $f_j$ の式は, $\mathrm{Ad}(T_i)(f_j) = \mathrm{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j)$ に他ならないことを注意しよう．

**補題 4.10.** $i \neq j$ とする．

$$\mathrm{Ad}(T_i')(f_j t_j^{-1}) = q_i^{-a_{ij}(a_{ij}-1)/2}\, \mathrm{Ad}\left(\exp_{q_i}(-q_i^{-1} e_i t_i^{-1})\right) \left(\mathrm{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j) t_j^{-1}\right)$$

が成り立つ．

証明．まず $[q_i e_i t_i, f_j t_j^{-1}] = 0$ に注意して

$$\mathrm{Ad}\left(\exp_{q_i^{-1}}(q_i e_i t_i)\right)(f_j t_j^{-1}) = f_j t_j^{-1}$$

である．よって

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ad}(T_i')(f_j t_j^{-1}) \\
&= \mathrm{Ad}\left(\exp_{q_i^{-1}}(-f_i)\right)(f_j t_j^{-1}) \\
&= \sum_{k,l\geq 0} (-1)^l q_i^{-l(l-1)/2} f_i^{(l)} f_j t_j^{-1} q_i^{k(k-1)/2} f_i^{(k)} && \text{(Exercise 4.1 より)} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{t} (-1)^{t-k} q_i^{-\frac{t(t-1)}{2} + k(t-1+a_{ij})} f_i^{(t-k)} f_j f_i^{(k)} t_j^{-1} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} q_i^{\frac{t(t-1)}{2} + t a_{ij}}\, \mathrm{ad}^*(f_i^{(t)})(f_j) t_j^{-1}
\end{aligned}$$

となる．最後の式の和は, $q$-セール関係式によって $\sum_{t=0}^{-a_{ij}}$ と置き換えることができる．

一方

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ad}\left(\exp_{q_i}(-q_i^{-1} e_i t_i^{-1})\right)\left(\mathrm{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j)\, t_j^{-1}\right) \\
&= \sum_{k,l\geq 0} (-1)^k q_i^{k(k-1)/2} (q_i^{-1} e_i t_i^{-1})^{(k)}\, \mathrm{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j)\, t_j^{-1} q_i^{-l(l-1)/2} (q_i^{-1} e_i t_i^{-1})^{(l)} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{t} q_i^{\frac{t(t+1)}{2} + k(t-1)} t_i^{-k} e_i^{(k)}\, \mathrm{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j)\, e_i^{(t-k)} t_j^{-1} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} q_i^{\frac{t(t+1)}{2} + k(t-1)}\, \mathrm{ad}^*(e_i^{(t)})\left(\mathrm{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j)\right) t_j^{-1} && \text{((4.7) より)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{t=0}^{-a_{ij}} q_i^{\frac{t(t+1)}{2}} \operatorname{ad}^*(f_i^{(-a_{ij}-t)})(f_j)t_j^{-1} \qquad \text{(補題 4.9 より)}$$

である. $-a_{ij}-t$ を $t$ で置き換えて上の式と比較すれば結論を得る. □

*定理 4.5 の証明の続き.* 可積分表現 $V$ に働く作用素 $q_i^{h_i(h_i+1)/2}$ を

$$q_i^{h_i(h_i+1)/2}v = q_i^{m(m+1)/2}v, \qquad \langle \mathrm{wt}\, v, h_i\rangle = m$$

によって定義する. すると

$$q_i^{h_i(h_i+1)/2} f_j q_i^{-h_i(h_i+1)/2} v = q_i^A f_j v$$

で

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\langle \mathrm{wt}\, v - \alpha_j, h_i\rangle(\langle \mathrm{wt}\, v-\alpha_j, h_i\rangle + 1) - \frac{1}{2}\langle \mathrm{wt}\, v, h_i\rangle(\langle \mathrm{wt}\, v, h_i\rangle + 1) \\ &= \frac{1}{2}a_{ij}(a_{ij}-1) - a_{ij}\langle \mathrm{wt}\, v, h_i\rangle \end{aligned}$$

である. よって

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ad}(T_i)(f_j t_j^{-1} t_i^{a_{ij}}) \\ &= \operatorname{Ad}(\exp_{q_i^{-1}}(q_i^{-1}e_i t_i^{-1})T_i')(q_i^{h_i(h_i+1)} f_j t_j^{-1} t_i^{a_{ij}} q_i^{-h_i(h_i+1)}) \\ &= q_i^{a_{ij}(a_{ij}-1)/2} \operatorname{Ad}(\exp_{q_i^{-1}}(q_i^{-1}e_i t_i^{-1})T_i')(f_j t_j^{-1}) \\ &= \operatorname{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j)t_j^{-1} \qquad \text{(補題 4.10 と演習問題 4.1 より)} \end{aligned}$$

を得る. 一方

$$\operatorname{Ad}(T_i)(f_j t_j^{-1} t_i^{a_{ij}}) = \operatorname{Ad}(T_i)(f_j) \operatorname{Ad}(T_i)(t_j^{-1} t_i^{a_{ij}}) = \operatorname{Ad}(T_i)(f_j)t_j^{-1}$$

であるから $\operatorname{Ad}(T_i)(f_j) = \operatorname{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j)$ が示された.

$\mathbf{U}_q$ の対合 $\vee$ を思い出そう. $T_i$ を $\mathbf{U}_q$ の元の形式的な級数と考え, 各項に $\vee$ を適用したものを $T_i^\vee$ とおく. すなわち

$$T_i^\vee = \exp_{q_i^{-1}}(q_i^{-1} f_i t_i) \exp_{q_i^{-1}}(-e_i) \exp_{q_i^{-1}}(q_i f_i t_i^{-1}) q_i^{-h_i(-h_i+1)}$$

である. 可積分表現に作用する作用素としては, well-defined である. このとき

$$T_i^\vee(v) = (-q_i)^{-\langle \mathrm{wt}\, v, h_i\rangle} T_i(v)$$

が成り立つことをみよう. これは $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, $V = V(n)$ のときに証明すればよい. このとき $\varphi\colon V(n) \to V(n)$ を $v_i \mapsto v_{n-i}$ で定義すると, 通常の表現と $\vee$ を通じた表現を繋絡する. すなわち $\varphi(xv) = x^\vee \varphi(v)$ が成り立つ. よって $T_i^\vee = \varphi \circ T_i \circ \varphi$ が満たされる. 命題 4.2(2) を用いると

$$T_i^\vee(v_k) = (-1)^k q_i^{k(n-k+1)} v_{n-k} = (-q_i)^{-n+2k}(-1)^{n-k} q_i^{(n-k)(k+1)} v_{n-k}$$

となるから上の主張が示された.

これを用いると

$$T_i(e_j v) = T_i(f_j^\vee v) = (-q_i)^{\langle \mathrm{wt}\, v + \alpha_j, h_i\rangle} T_i^\vee(f_j^\vee v) = (-q_i)^{\langle \mathrm{wt}\, v+\alpha_j, h_i\rangle}(T_i f_j)^\vee v$$

となる. $(T_i f_j)^\vee$ は, 形式的な $T_i f_i$ の各項に $\vee$ を適用したものである. 上に証明した $T_i f_i = \operatorname{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j) T_i$ により,

$$\begin{aligned} &(-q_i)^{\langle \mathrm{wt}\, v+\alpha_j, h_i\rangle}(T_i f_j)^\vee v = (-q_i)^{\langle \mathrm{wt}\, v+\alpha_j, h_i\rangle} \left(\operatorname{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j)\right)^\vee T_i^\vee v \\ &= \sum_{r+s=-a_{ij}} (-1)^s q_i^{-s} e_i^{(r)} e_j e_i^{(s)} T_i(v) \end{aligned}$$

これが定理 4.5(3) の $e_j$ の式である. □

次の命題は, 定理 4.5(3) の $f_j$ の式の一般化であり, あとで使われる.

**命題 4.11.** $\operatorname{Ad}(T_i)(\operatorname{ad}(f_i^{(m)})(f_j)) = \operatorname{ad}^*(f_i^{(-a_{ij}-m)})(f_j)$

証明. まず $x \in \mathbf{U}_q$ に対し

$$\begin{aligned} \operatorname{Ad}(T_i)(\operatorname{ad}(f_i)(x)) &= \operatorname{Ad}(T_i)(f_i x - t_i x t_i^{-1} f_i) \\ &= -t_i^{-1} e_i \operatorname{Ad}(T_i)(x) + t_i^{-1} \operatorname{Ad}(T_i)(x) e_i = \operatorname{ad}^*(e_i)(\operatorname{Ad}(T_i)(x)) \end{aligned}$$

に注意する. したがって

$$\begin{aligned} \operatorname{Ad}(T_i)(\operatorname{ad}(f_i^{(m)})(f_j)) &= \operatorname{ad}^*(e_i^{(m)}) \operatorname{Ad}(T_i)(f_j) \\ &= \operatorname{ad}^*(e_i^{(m)}) \operatorname{ad}^*(f_i^{(-a_{ij})})(f_j) \quad \text{(定理 4.5(3) より)} \\ &= \operatorname{ad}^*(f_i^{(-a_{ij}-m)})(f_j) \end{aligned}$$

と結論が示される. □

$m = -a_{ij}$ とおいて次を得る．

**系 4.12.** $\mathrm{Ad}(T_i^{-1})(f_j) = \mathrm{ad}(f_i^{(-a_{ij})})(f_j) = \sum_{r+s=-a_{ij}} (-1)^r q_i^r f_i^{(s)} f_j f_i^{(r)}$

$i \neq j$ とする．$a_{ij}a_{ji} = 0, 1, 2, 3, {}^{\geq}4$ に応じて，$h(i,j) = 2, 3, 4, 6, \infty$ と定める．

**命題 4.13.** $i \neq j$ とする．$h(i,j) < \infty$ のとき次が成り立つ．

$$\mathrm{Ad}(\underbrace{\cdots T_i T_j}_{h(i,j)-1\text{ 個}})(f_i) = \begin{cases} f_i & h(i,j)\text{ が偶数のとき} \\ f_j & h(i,j)\text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

これは場合分けをして命題 4.11 を用いて具体的に計算を実行することより証明される．

証明．(a) $a_{ij} = a_{ji} = 0$ のとき．定理 4.5(3) より

$$\mathrm{Ad}(T_j)(f_i) = f_i, \quad \mathrm{Ad}(T_i)(f_j) = f_j$$

だから正しい．

残りの場合は，必要ならば $i$ と $j$ を入れ替えて $a_{ji} = -1$ であると約束する．$a_{ij} = -1, -2, -3$ に従い，場合分けで証明する．まずは，どの場合も

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(f_i)(f_j) &= f_i f_j - q_i^{-a_{ij}} f_j f_i = f_i f_j - q_j f_j f_i = \mathrm{ad}^*(f_j)(f_i), \\ \mathrm{ad}^*(f_i)(f_j) &= f_j f_i - q_i^{-a_{ij}} f_i f_j = f_j f_i - q_j f_i f_j = \mathrm{ad}(f_j)(f_i), \end{aligned} \tag{4.14}$$

が成り立つことを注意しよう．

(b) $a_{ij} = a_{ji} = -1$ のとき．定理 4.5(3) と (4.14) と系 4.12 より

$$\mathrm{Ad}(T_j)(f_i) = \mathrm{ad}^*(f_j)(f_i) = \mathrm{ad}(f_i)(f_j) = \mathrm{Ad}(T_i^{-1})(f_j)$$

だから $\mathrm{Ad}(T_i T_j)(f_i) = f_j$ である．また，$i$ と $j$ が対称であることに注意して $\mathrm{Ad}(T_j T_i)(f_j) = f_i$ も成り立つ．

(c) $a_{ij} = -2$, $a_{ji} = -1$ のとき．

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(T_i T_j)(f_i) &= \mathrm{Ad}(T_i)(\mathrm{ad}^*(f_j)(f_i)) = \mathrm{Ad}(T_i)(\mathrm{ad}(f_i) f_j) && (\text{定理 4.5(3) と (4.14) より}) \\ &= \mathrm{ad}^*(f_i)(f_j) = \mathrm{ad}(f_j)(f_i) && (\text{命題 4.11 と (4.14) より}) \\ &= \mathrm{Ad}(T_j^{-1})(f_i) && (\text{系 4.12 より}) \end{aligned}$$

よって $\mathrm{Ad}(T_j T_i T_j)(f_i) = f_i$ である．

次に $\mathrm{Ad}(T_i T_j T_i)(f_j) = f_j$ を示す．まず

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}^*(f_i^{(2)})(f_j) &= f_j f_i^{(2)} - q_i f_i f_j f_i + q_i^2 f_i^{(2)} f_j \\ &= \frac{1}{[2]_i} \left( f_j f_i^2 - (q_j + 1) f_i f_j f_i + q_j f_i^2 f_j \right) \quad (q_j = q_i^2 \text{ より}) \\ &= \frac{1}{[2]_i} \left( \mathrm{ad}(f_j)(f_i) \cdot f_i - f_i \cdot \mathrm{ad}(f_j)(f_i) \right) \end{aligned}$$

に注意する．

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(T_j T_i)(f_j) &= \mathrm{Ad}(T_j)(\mathrm{ad}^*(f_i^{(2)})(f_j)) && (\text{定理 4.5(3) より}) \\ &= \frac{1}{[2]_i} \mathrm{Ad}(T_j) \left( \mathrm{ad}(f_j)(f_i) \cdot f_i - f_i \cdot \mathrm{ad}(f_j)(f_i) \right) && (\text{上の注意より}) \\ &= \frac{1}{[2]_i} \left( f_i \cdot \mathrm{ad}^*(f_j)(f_i) - \mathrm{ad}^*(f_j)(f_i) \cdot f_i \right) && (\text{命題 4.11 より}) \\ &= \mathrm{ad}(f_i^{(2)})(f_j) && (\text{上の注意に} * \text{を適用}) \\ &= \mathrm{Ad}(T_i^{-1})(f_j) && (\text{系 4.12 より}) \end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{Ad}(T_i T_j T_i)(f_j) = f_j$ を得る．

(d) $a_{ij} = -3$, $a_{ji} = -1$ のとき．まず

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}^*(f_i^{(2)})(f_j) &= f_j f_i^{(2)} - q_i^2 f_i f_j f_i + q_i^4 f_i^{(2)} f_j \\ &= \frac{1}{[2]_i} \left( f_j f_i^2 - (q_j + q_i) f_i f_j f_i + q_i q_j f_i^2 f_j \right) \quad (q_j = q_i^3 \text{ より}) \\ &= \frac{1}{[2]_i} \left( \mathrm{ad}(f_j)(f_i) \cdot f_i - q_i f_i \cdot \mathrm{ad}(f_j)(f_i) \right) \end{aligned}$$

に注意しよう.

(4.15)
$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ad}(T_j)(\operatorname{ad}^*(f_i^{(2)})(f_j)) \\
&= \frac{1}{[2]_i}\operatorname{Ad}(T_j)\left(\operatorname{ad}(f_j)(f_i)\cdot f_i - q_i f_i \cdot \operatorname{ad}(f_j)(f_i)\right) && (\text{上の注意より}) \\
&= \frac{1}{[2]_i}\left(f_i \cdot \operatorname{ad}^*(f_j)(f_i) - q_i \operatorname{ad}^*(f_j)(f_i)\cdot f_i\right) && (\text{命題 } 4.11 \text{ より}) \\
&= \operatorname{ad}(f_i^{(2)})(f_j) && (\text{上の注意に} * \text{を適用})
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ad}(T_jT_iT_j)(f_i) &= \operatorname{Ad}(T_jT_i)(\operatorname{ad}^*(f_j)(f_i)) = \operatorname{Ad}(T_jT_i)(\operatorname{ad}(f_i)f_j) && (\text{定理 } 4.5(3) \text{ と} (4.14) \text{ より}) \\
&= \operatorname{Ad}(T_j)(\operatorname{ad}^*(f_i^{(2)})(f_j)) = \operatorname{ad}(f_i^{(2)})(f_j) && (\text{命題 } 4.11 \text{ と} (4.15) \text{ より})
\end{aligned}$$

一方で

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ad}(T_i^{-1}T_j^{-1})(f_i) &= \operatorname{Ad}(T_i^{-1})(\operatorname{ad}(f_j)(f_i)) = \operatorname{Ad}(T_i^{-1})(\operatorname{ad}^*(f_i)f_j) \\
&= \operatorname{ad}(f_i^{(2)})(f_j) && (\text{命題 } 4.11 \text{ より})
\end{aligned}$$

であるから, $\operatorname{Ad}(T_jT_iT_jT_iT_j)(f_i) = f_i$ を得る.

最後に $\operatorname{Ad}(T_iT_jT_iT_jT_i)(f_j) = f_j$ を示す. まず

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ad}^*(f_i^{(3)})(f_j) \\
&= f_jf_i^{(3)} - q_if_if_jf_i^{(2)} + q_i^2f_i^{(2)}f_jf_i - q_i^3f_i^{(3)}f_j \\
&= \frac{1}{[3]_i}\left(f_jf_i^{(2)}f_i - (q_i^3+q_i+q_i^{-1})f_if_jf_i^{(2)} + (q_i^4+q_i^2+1)f_i^{(2)}f_jf_i - q_i^3f_if_i^{(2)}f_j\right) \\
&= \frac{1}{[3]_i}\left(\operatorname{ad}^*(f_i^{(2)})(f_j)f_i - q_i^{-1}f_i\operatorname{ad}^*(f_i^{(2)})(f_j)\right)
\end{aligned}$$

に注意する.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ad}(T_jT_i)(f_j) \\
&= \operatorname{Ad}(T_j)(\operatorname{ad}^*(f_i^{(3)})(f_j)) && (\text{定理 } 4.5(3) \text{ より}) \\
&= \frac{1}{[3]_i}\operatorname{Ad}(T_j)\left(\operatorname{ad}^*(f_i^{(2)})(f_j)f_i - q_i^{-1}f_i\operatorname{ad}^*(f_i^{(2)})(f_j)\right) && (\text{上の注意より}) \\
&= \frac{1}{[3]_i}\left(\operatorname{ad}(f_i^{(2)})(f_j)\operatorname{ad}^*(f_j)(f_i) - q_i^{-1}\operatorname{ad}^*(f_j)(f_i)\operatorname{ad}(f_i^{(2)})(f_j)\right) && ((4.15) \text{ より}) \\
&= \frac{1}{[3]_i}\left(\operatorname{ad}(f_i^{(2)})(f_j)\operatorname{ad}(f_i)(f_j) - q_i^{-1}\operatorname{ad}(f_i)(f_j)\operatorname{ad}(f_i^{(2)})(f_j)\right) && ((4.14) \text{ より})
\end{aligned}$$

よって命題 4.11 により

$$\operatorname{Ad}(T_iT_jT_i)(f_j) = \frac{1}{[3]_i}\left(\operatorname{ad}^*(f_i)(f_j)\operatorname{ad}^*(f_i^{(2)})(f_j) - q_i^{-1}\operatorname{ad}^*(f_i^{(2)})(f_j)\operatorname{ad}^*(f_i)(f_j)\right)$$

あとは上と同様に $\operatorname{Ad}(T_j^{-1}T_i^{-1})(f_j)$ を計算して結論を得る. □

**定理 4.16** (組み紐群の関係式)**.** (1) $T_i$ は組み紐群の関係式を満たす. すなわち

$$\underbrace{T_iT_j\cdots}_{h(i,j)\text{ 個}} = \underbrace{T_jT_i\cdots}_{h(i,j)\text{ 個}}$$

が成り立つ.

(2) $\operatorname{Ad}T_i$ も組み紐群の関係式を満たす.

証明. $a_{ij} = a_{ji} = -1$ のときに示すが, 他の場合も証明は全く同様である.

(1) 組み紐群の関係式 $T_iT_jT_i = T_jT_iT_j$ は

(4.17)
$$T_j = \operatorname{Ad}(T_i)\operatorname{Ad}(T_j)(T_i)$$

と同値である. 命題 4.13 とそれに ∨ を適用したものを考えて

$$\operatorname{Ad}(T_i)\operatorname{Ad}(T_j)(f_i) = f_j, \qquad \operatorname{Ad}(T_i)\operatorname{Ad}(T_j)(e_i) = e_j$$

が成り立つ. また定理 4.5(3) より

$$\operatorname{Ad}(T_i)\operatorname{Ad}(T_j)(q^{h_i}) = q^{h_j}$$

もチェックできる. $T_i$ の定義式

$$T_i = \exp_{q_i^{-1}}(q_i^{-1}e_it_i^{-1})\exp_{q_i^{-1}}(-f_i)\exp_{q_i^{-1}}(q_ie_it_i)q_i^{h_i(h_i+1)/2}$$

に $\mathrm{Ad}(T_iT_j)$ を作用させて, 上の三つの関係式と $q_i = q_j$ を用いれば(4.17) が導かれる. $a_{ij} = a_{ji} = -1$ でない場合は $q_i = q_j$ は成り立たないが, $h(i,j)$ が偶数であることからこの式は必要なくなる.

(2) 組み紐群の関係式 $\mathrm{Ad}(T_i)\,\mathrm{Ad}(T_j)\,\mathrm{Ad}(T_i) = \mathrm{Ad}(T_j)\,\mathrm{Ad}(T_i)\,\mathrm{Ad}(T_j)$ は, $T_iT_jT_i = T_jT_iT_j$ から直ちに従う. □

これ以降 $\mathrm{Ad}(T_i)$ を $\mathbf{U}_q$ の環自己同型と考え, 単に $T_i$ で表わすことにする. あとのために $T_i^{-1}$ の式も書き留めておく. $T_i^{-1}$ は生成元に対して次の式で与えられる:

$$\begin{aligned}
&q^{h_j} \mapsto q^{s_ih_j}, \quad e_i \mapsto -t_i^{-1}f_i, \quad f_i \mapsto -e_it_i, \\
&e_j \mapsto \sum_{r+s=-a_{ij}} (-1)^r q_i^{-r} e_i^{(r)} e_j e_i^{(s)} \quad (i \neq j), \\
&f_j \mapsto \sum_{r+s=-a_{ij}} (-1)^s q_i^{s} f_i^{(r)} f_j f_i^{(s)} \quad (i \neq j).
\end{aligned}$$

最後の式は, 系 4.12 に他ならない. 定理 4.5 の証明の最後の議論を用いて, $T_i^{-1}(e_j)$ の式がこの式から従う. その他の式は容易にチェックできる. 定理 4.5 の式と見比べると, 次の関係式が成り立つことが分かるであろう.

**命題 4.18.**

$$* \circ T_i \circ * = T_i^{-1}, \qquad {}^{-} \circ \vee \circ T_i \circ \vee \circ {}^{-} = T_i^{-1}$$

以上により組み紐群が $\mathbf{U}_q$ に自己同型として作用することが証明された. よく知られた事実として, ワイル群の元 $w \in W$ が与えられたときに, その最短表示を $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_N}$ を取り, 対応する組み紐群の元 $T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_N}$ は最短表示の取り方によらないことが知られている. (文献??) そこでワイル群の元 $w$ に対応する組み紐群の作用素を $T_w$ で表わすことにする.

$\mathbf{U}_q^-$ を箙の表現の Ringel-Hall 代数として実現したとき, $T_i$ は頂点 $i$ に関する鏡映関手 (reflection functor) に対応する. ディンキン箙の直既約表現は, 正ルートと対応し, 頂点 $i$ に対応する単純表現 $S_i$ に鏡映関手を次々に適用することで得られることが知られているので (Gabriel, Bernstein-Gelfand-Ponomarev), $T_w(f_i)$ は直既約表現に対応することが分かる.

## 5. 有限型の $\mathbf{U}_q^-$ に対する PBW 基底

この節では $\mathfrak{g}$ は有限次元の複素単純リー環であると約束する.

5.1. $\mathbf{U}(\mathfrak{n}^-)$ の **PBW (Poincaré-Birkhoff-Witt) 基底**を復習しよう (例えば [谷崎の教科書, 定理 1.24] 参照):

**定理 5.1.** *$\mathfrak{n}^-$ の基底を $\{x_\alpha\}$ とし, 添え字集合 $\{\alpha\}$ には全順序を入れておく. このとき $x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\cdots x_{\alpha_r}$ $(\alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_r)$ は $\mathbf{U}(\mathfrak{n}^-)$ の基底を与える. ただし $r=0$ のときは上の元は $1$ であると約束する.*

定理 3.13 により, $\mathbf{U}_q^-$ を $q=1$ に特殊化すると $\mathbf{U}(\mathfrak{n}^-)$ が得られるのだから, 上の PBW 基底を $\mathbf{U}_q^-$ に '持ち上げ' られないか? と考えるのは, 自然なことである. $\mathbf{U}_q^-$ は $\mathbf{U}(\mathfrak{n}^-)$ の $q$-変形であって, $\mathfrak{n}^-$ の $q$-変形は定められていないが, ルート空間分解 $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+}\mathfrak{g}_\alpha$ を思い出して, $\mathfrak{g}_\alpha$ に '属する' ようなベクトル ('ルート・ベクトル' とよぼう) を構成する.

正ルートは, 単純ルートにワイル群の元を施して得られるのであるから, ルート・ベクトルは $f_i$ に $T_w$ を施して定義するのは自然であろう. 先ずは, これが $\mathbf{U}_q^-$ に入っていることを確かめる.

**命題 5.2.** *$w\in W$ とし, $w(\alpha_i)$ は正ルートであるとする. このとき $T_w(f_i)\in\mathbf{U}_q^-$ である. また $w(\alpha_i)$ が単純ルート $\alpha_j$ のときは $T_w(f_i)=f_j$ となる.*

証明. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ のときは証明することは何もない. 次に $\mathfrak{g}$ は rank が 2 であるとし, $I=\{i,j\}$ とする. 場合分けで具体的に計算することによってチェックできる.

(a) $a_{ij}=a_{ji}=0$ のとき. $s_j(\alpha_i)=\alpha_i$, $T_j(f_i)=f_i$ だからチェックする必要はない.

(b) $a_{ij}=a_{ji}=-1$ のとき. $w=s_j$ で $s_j(\alpha_i)=\alpha_i+\alpha_j$ のときと, $w=s_is_j$ で $s_is_j(\alpha_i)=\alpha_j$ のときを調べればよい. 命題 4.13 で計算したように

$$T_j(f_i)=\mathrm{ad}^*(f_j)(f_i),\qquad T_iT_j(f_i)=f_j$$

であるから主張は成立する.

(c) $a_{ij}=-2$, $a_{ji}=-1$ のとき. $i$ と $j$ を入れ替えたものも調べなくてはいけないので, 次の 6 つの場合を考える必要がある:

$$s_j(\alpha_i)=\alpha_i+\alpha_j,\quad s_is_j(\alpha_i)=\alpha_i+\alpha_j,\quad s_js_is_j(\alpha_i)=\alpha_i,$$
$$s_i(\alpha_j)=2\alpha_i+\alpha_j,\quad s_js_i(\alpha_j)=2\alpha_i+\alpha_j,\quad s_is_js_i(\alpha_j)=\alpha_j$$

命題 4.13 の計算から, 対応する $\mathbf{U}_q^-$ の元は

$$T_j(f_i)=\mathrm{ad}^*(f_j)(f_i),\quad T_iT_j(f_i)=\mathrm{ad}^*(f_i)(f_j),\quad T_jT_iT_j(f_i)=f_i,$$
$$T_i(f_j)=\mathrm{ad}^*(f_i^{(2)})(f_j),\quad T_jT_i(f_j)=\mathrm{ad}(f_i^{(2)})(f_j),\quad T_iT_jT_i(f_j)=f_j$$

で与えられるので主張は成立する.

(d) $a_{ij}=-3$, $a_{ji}=-1$ のとき. 上と同様に命題 4.13 の計算から従う.

次に $\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}\ge 2$ のときを考える. $l(w)$ に関する帰納法で証明する. $l(w)=0$ のとき, すなわち $w=e$ のときは証明すべきことはない. $l(w)>0$ とし, $l(ws_j)=l(w)-1$ となる $j\in I$ を取る. 仮定から $i\ne j$ である. 事実 (???) より次を満たすように $w=w'w''$ と分解できる:

(1) $w''$ は $s_i$ と $s_j$ で生成される部分群に属する.
(2) $l(w)=l(w')+l(w'')$
(3) $l(w's_i)=l(w')+1$, $l(w's_j)=l(w')+1$

上で述べ (て計算を略し) たことにより, $T_{w''}(f_i)\in\mathbf{U}_q^-$ である. また $w\ne w'$ だから $l(w)>l(w')$ であり, 帰納法の仮定から $T_{w'}(f_i), T_{w'}(f_j)\in\mathbf{U}_q^-$ である. (条件 (3) より $w'(\alpha_i), w'(\alpha_j)\in\Delta^+$ に注意する.) したがって $T_w(f_i)=T_{w'}T_{w''}(f_i)\in\mathbf{U}_q^-$ が成り立つ.

次に後半の主張をチェックする. $w(\alpha_i)=\alpha_k$ であるときに $w''(\alpha_i)=\alpha_j$ または $\alpha_i$ であることを示せば, 上と同様の議論によって主張が従う. $w''(\alpha_i)=a\alpha_i+b\alpha_j$ $(a,b\in\mathbb{Z}_{\ge 0})$ とすると

$$w\alpha_i = aw'\alpha_i + bw'\alpha_j$$

となるが, $w'\alpha_i$, $w'\alpha_j$ が正ルートであったことに注意すると, $a$ または $b$ が $0$ でなければ, $w\alpha_i$ が単純ルート $\alpha_k$ であることに反する. □

$w_0 \in W$ を最長元とする．その最短表示 $w_0 = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_\nu}$ を取って固定する．$(\nu = l(w_0))$ $\mathbf{h} = (i_1, i_2, \dots, i_\nu) \in I^\nu$ を最短表示を指定するベクトルとする．(あとで最短表示を取り替えたときに, $\mathbf{h}$ を取り替える.) このときよく知られた事実 (???) により

$$\{\alpha_{i_1}, s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \dots, s_{i_1} \cdots s_{i_{\nu-1}}(\alpha_{i_\nu})\} \tag{5.3}$$

は, 正ルートの全体 $\Delta^+$ となる．また, このとき左にあるものが小さいとして, $\Delta^+$ に全順序が定まっていることに注意しよう．正ルート $\alpha = s_{i_1} \cdots s_{i_{p-1}}(\alpha_{i_p})$ $(p = 1, \dots, \nu)$ に対応する**ルート・ベクトル**を

$$(T_{i_1} \cdots T_{i_{p-1}})(f_{i_p})$$

によって定義する．命題 5.2 により, これは $\mathbf{U}_q^-$ に入っている．また, $\alpha = \alpha_j$ のときは $f_j$ となっていることにも注意する．$f_\alpha$ のウェイトは確かに $-\alpha$ に等しい．ただし, ルート・ベクトルは, あくまで $w_0$ の最短表示の取り方に依存することに注意しよう．実際 rank 2 の場合に, 最短表示を取り替えるとどう変わるかをあとで見る．

ルート・ベクトルを最短表示から決まる自然な順序によって掛けて単項式を作る．すなわち, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_\nu) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\nu$ に対して

$$L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = f_{i_1}^{(c_1)} T_{i_1}(f_{i_2}^{(c_2)}) \cdots (T_{i_1} \cdots T_{i_{\nu-1}})(f_{i_\nu}^{(c_\nu)})$$

とおく．これが, この講義の主人公である．

**定理 5.4.** $\mathbf{h}$ を固定する．$\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \mid \mathbf{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\nu\}$ は $\mathbf{U}_q^-$ の $\mathbb{Q}(q)$-ベクトル空間としての基底である．

証明. $p$ に関する上からの帰納法で $c_1 = \cdots = c_p = 0$ を満たす元の全体が一次独立であることを示す．$p = \nu$ のときは, $L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = 1$ であり, 正しい．次に $\mathbf{c}$ が $c_1 = \cdots = c_{p-1} = 0$ を満たすとき

$$L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = (T_{i_1} \cdots T_{i_{p-1}})(f_{i_p}^{(c_p)}) \times L(\mathbf{c}', \mathbf{h})$$

と分解する．ただし $\mathbf{c}'$ は $\mathbf{c}$ の $c_p$ を 0 で置き換えたものある．すると

$$(T_{i_p}^{-1} \cdots T_{i_1}^{-1}) L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = \frac{1}{[c_1]_i^!} (-e_{i_p} t_{i_p})^{c_1} \times (T_{i_p}^{-1} \cdots T_{i_1}^{-1}) L(\mathbf{c}', \mathbf{h})$$

積写像が $\mathbf{U}_q^{\geq 0} \otimes \mathbf{U}_q^- \xrightarrow{\cong} \mathbf{U}_q$ と同型を与えていたことを思い出すと (定理 3.9), $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$ の一次独立性は $\{L(\mathbf{c}', \mathbf{h})\}$ の一次独立性, すなわち帰納法の仮定から従う．よって $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \mid \mathbf{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\nu\}$ は一次独立であることが示された．

$\mathbf{U}_q^-$ の各ウェイト空間の次元を考えると, 定理 5.1 により, $L(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ のうちの与えられたウェイトを持つものの個数に一致するので, 基底になっていることも分かる． □

**定義 5.5.** $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \mid \mathbf{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\nu\}$ を $\mathbf{U}_q^-$ の **PBW 基底**と呼ぶ．

ワイル群の最長元 $w_0$ の最短表示の取り方 $\mathbf{h}$ に二重に依存していることに注意しよう．まず, ルート・ベクトルが最短表示の取り方に依存し, さらにルートベクトルを掛ける順番も取り方に依存しているからである．

上の結果では $\mathbb{Q}(q_s)$-ベクトル空間としての基底になっていることを示したが, 以下では, この PBW 基底が $\mathbf{U}_q^-$ のいろいろな integral form に対して基底になっていることを調べていく．

その前に, PBW 基底とテンソル積の関係を注意しておこう．各 $i \in I$ に対して命題 4.4 の $L$ を取って $L_i$ と書く．ワイル群の元 $w$ の最短表示 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_p}$ をとる．$\mathbf{h} = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_p) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^p$ として,

$$L(\mathbf{c}, \mathbf{h})^+ = e_{i_1}^{(c_1)} T_{i_1}(e_{i_2}^{(c_2)}) \cdots (T_{i_1} \cdots T_{i_{p-1}})(e_{i_p}^{(c_p)}),$$
$$L(\mathbf{c}, \mathbf{h})^- = f_{i_1}^{(c_1)} T_{i_1}(f_{i_2}^{(c_2)}) \cdots (T_{i_1} \cdots T_{i_{p-1}})(f_{i_p}^{(c_p)})$$

と, $(i_1, \dots, i_p)$ は最長元の最短表示とは違うかもしれないが, PBW 基底のときと混同した記法を用いる．このとき命題 4.4 を何回も使えば, 次が従う．

**補題 5.6.**

$$
\begin{aligned}
&T_w = T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_p}\\
&= \sum_{\mathbf{c}} \prod_{k=1}^{p} \left\{ (-1)^{c_k} q^{-c_k(c_k-1)/2} \prod_{a=1}^{c_k} (q_{i_k}^{a} - q_{i_k}^{-a}) \right\} L(\mathbf{c},\mathbf{h})^+ \otimes L(\mathbf{c},\mathbf{h})^- \circ (T_w \otimes T_w)
\end{aligned}
$$

途中の式は

$$
L_{i_1}^{-1}(T_{i_1}\otimes T_{i_1})(L_{i_2}^{-1})\,(T_{i_1}T_{i_2}\otimes T_{i_1}T_{i_2})\,(L_{i_3}^{-1})\cdots \left(T_{i_1}\cdots T_{i_{p-1}}\otimes T_{i_1}\cdots T_{i_{p-1}}\right)(L_{i_p}^{-1})\circ (T_w\otimes T_w).
$$

### 5.2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ の PBW 基底.

$$
\begin{aligned}
f_{12} &= T_1(f_2) = f_2 f_1 - q f_1 f_2,\\
f'_{12} &= T_2(f_1) = f_1 f_2 - q f_2 f_1
\end{aligned}
$$

とおく. PBW 基底は, 最短表示の取り方に対応して, それぞれ

$$
\left\{ L(\mathbf{c},\mathbf{h}) = f_1^{(c_1)} f_{12}^{(c_2)} f_2^{(c_3)} \,\middle|\, c_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}, \quad \left\{ L(\mathbf{c}',\mathbf{h}') = f_2^{(c'_1)} f_{12}'^{(c'_2)} f_1^{(c'_3)} \,\middle|\, c'_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}
$$

となる. ($\mathbf{h} = (1,2,1)$, $\mathbf{h}' = (2,1,2)$) 二つの基底の関係を調べるために, 補題を準備する.

**補題 5.7.**

$$
\begin{aligned}
f_2^{(l)} f_1^{(m)} f_2^{(n)} &= \sum_{k=0}^{l} q^{(l-k)(m-k)} \begin{bmatrix} l-k+n \\ l-k \end{bmatrix} f_1^{(m-k)} f_{12}^{(k)} f_2^{(l-k+n)}\\
f_1^{(l)} f_2^{(m)} f_1^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} q^{(m-k)(n-k)} \begin{bmatrix} n-k+l \\ n-k \end{bmatrix} f_1^{(n-k+l)} f_{12}^{(k)} f_1^{(m-k)}
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

証明は, 帰納法による (面倒な) 計算である.

証明. ルート・ベクトルの間の交換関係を計算しよう. まず

$$
f_{12} f_2 = q f_2 f_{12} \tag{5.9}
$$

に注意しよう. 実際, これは両辺を計算して比較すれば, $q$-Serre 関係式 $f_2^2 f_1 - (q+q^{-1}) f_2 f_1 f_2 + f_1 f_2^2 = 0$ から正しいことが分かる. 次に

$$
f_2^{(l)} f_1 = q^l f_1 f_2^{(l)} + f_{12} f_2^{(l-1)} \tag{5.10}
$$

を帰納法で示す. $l=1$ のときは, $f_{12}$ の定義に他ならない. $l$ で上の式が正しいとすると,

$$
\begin{aligned}
[l+1] f_2^{(l+1)} f_1 &= f_2 f_2^{(l)} f_1 = q^l f_2 f_1 f_2^{(l)} + f_2 f_{12} f_2^{(l-1)} && \text{(帰納法の仮定より)}\\
&= q^l (f_{12} + q f_1 f_2) f_2^{(l)} + q^{-1} f_{12} f_2 f_2^{(l-1)} && \text{((5.9) より)}\\
&= q^{l+1}[l+1] f_1 f_2^{(l+1)} + f_{12} f_2^{(l)} (q^l + q^{-1}[l])
\end{aligned}
$$

となるから $q^l + q^{-1}[l] = [l+1]$ より, $l+1$ でも正しい. さらに

$$
f_2^{(l)} f_1^{(m)} = \sum_k q^{(l-k)(m-k)} f_1^{(m-k)} f_{12}^{(k)} f_2^{(l-k)} \tag{5.11}
$$

を帰納法で示す. ただし, $n<0$ のとき $f_i^{(n)}$ は $0$ であると約束する. $m=1$ のときは(5.10) に他ならない. $m$ で(5.11) が正しいとすると

$$
\begin{aligned}
&[m+1] f_2^{(l)} f_1^{(m+1)} = f_2^{(l)} f_1^{(m)} f_1\\
&= \sum_k q^{(l-k)(m-k)} f_1^{(m-k)} f_{12}^{(k)} f_2^{(l-k)} f_1 && \text{(帰納法の仮定より)}\\
&= \sum_k q^{(l-k)(m-k)} f_1^{(m-k)} f_{12}^{(k)} \left( q^{l-k} f_1 f_2^{(l-k)} + f_{12} f_2^{(l-k-1)} \right) && \text{((5.10) より)}\\
&= \sum_k q^{(l-k)(m+1-k)-k} [m-k+1] f_1^{(m-k+1)} f_{12}^{(k)} f_2^{(l-k)}\\
&\qquad + q^{(l-k)(m-k)} [k+1] f_1^{(m-k)} f_{12}^{(k)} f_2^{(l-k-1)}\\
&= \sum_k f_1^{(m+1-k)} f_{12}^{(k)} f_2^{(l-k)} \times \Big( q^{(l-k)(m+1-k)-k} [m-k+1]\\
&\qquad + q^{(l-k+1)(m+1-k)} [k] \Big) && \text{(番号の付け替え)}
\end{aligned}
$$

となり, 最後の項を書き直せば $m+1$ でも正しい. (5.11) から次が従う. □

次に $\mathbf{A}_0 \overset{\text{def.}}{=} \{f(q_s) \in \mathbb{Q}(q_s) \mid f$ は $q_s = 0$ で正則 $\}$ とおく．これは局所環で極大イデアルは $q\mathbf{A}_0$ である．

**命題 5.12.** (1) $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$ と $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}')\}$ で生成される $\mathbf{U}_q^-$ の $\mathbb{Z}[q] = \mathbf{A}_0 \cap \mathbf{A}$-部分加群は等しい．これを $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ で表わす．

(2) $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$ と $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}')\}$ が $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)/q\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ に誘導する $\mathbb{Z}$-基底は等しい．

(3) *PBW* 基底 $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$, $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}')\}$ はそれぞれ ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^-$ の $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-基底となる．

証明．まず (1) と (2) を同時に示す．

$$\mathcal{B}(\infty) = \{f_2^{(l)} f_1^{(m)} f_2^{(n)} \mid m \geq l + n\} \cup \{f_1^{(l)} f_2^{(m)} f_1^{(n)} \mid m \geq l + n\}$$

とおく．(5.8) より，$m = l + n$ のときは $f_2^{(l)} f_1^{(m)} f_2^{(n)} = f_1^{(l)} f_2^{(m)} f_1^{(n)}$ となり，それ以外の元はすべて相異なることに注意しておく．$\mathcal{B}(\infty)$ で生成される $\mathbb{Z}[q]$-部分加群 $\mathcal{L}'_{\mathbb{Z}}(\infty)$ を考え，これが $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$ の生成する $\mathbb{Z}[q]$-部分加群と等しく，また誘導される $\mathcal{L}'_{\mathbb{Z}}(\infty)/q\mathcal{L}'_{\mathbb{Z}}(\infty)$ の $\mathbb{Z}$-基底が $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$ の定める基底と同じことをチェックする．$1 \leftrightarrow 2$ の対称性から，(1),(2) が従う．

(5.8) の係数は

$$\begin{aligned}
q^{(l-k)(m-k)} \begin{bmatrix} l-k+n \\ l-k \end{bmatrix} &\in q^{(l-k)(m-k-n)}(1 + q\mathbb{Z}[q]), \\
q^{(m-k)(n-k)} \begin{bmatrix} n-k+l \\ n-k \end{bmatrix} &\in q^{(n-k)(m-k-l)}(1 + q\mathbb{Z}[q])
\end{aligned}$$

となる．上の式で $l \geq k$, $m \geq l + n$, 下の式で $n \geq k$, $m \geq l + n$ のときを考えると，それぞれ $\delta_{kl} + q\mathbb{Z}[q]$, $\delta_{kn} + q\mathbb{Z}[q]$ となる．よって

$$\begin{aligned}
f_2^{(l)} f_1^{(m)} f_2^{(n)} &= f_1^{(m-l)} f_{12}^{(l)} f_2^{(n)} + \sum_{k=0}^{l-1} a_k f_1^{(m-k)} f_{12}^{(k)} f_2^{(l-k+n)} \quad (a_k \in q\mathbb{Z}[q]), \\
f_1^{(l)} f_2^{(m)} f_1^{(n)} &= f_1^{(l)} f_{12}^{(n)} f_1^{(m-n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a'_k f_1^{(n-k+l)} f_{12}^{(k)} f_1^{(m-k)} \quad (a'_k \in q\mathbb{Z}[q])
\end{aligned}$$

となる．それぞれの式で $\sum$ に現れる項は，$f_1$ のべきが第一項よりも必ず大きいことに注意しよう．したがって $\mathcal{B}(\infty)$ の元を，$\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$ の一次結合で書いたとき，係数のなす行列は (しかるべき順序に関し) 上三角行列で対角成分が 1, その他の成分が $q\mathbb{Z}[q]$ に属する．これから主張は従う．

(3) $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$ の生成する $\mathbf{A}$ 加群は，$\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ の生成する $\mathbf{A}$ に他ならない．よって $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}')\}$ の生成する $\mathbf{A}$ 加群とも等しい．これが $f_i^{(n)}$ $(i = 1, 2)$ の左からの掛け算で不変であることを示せばよい．これは，$i = 1$ のときは $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$ の生成する $\mathbf{A}$ 加群と考えて正しく，$i = 2$ のときは $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}')\}$ の生成する $\mathbf{A}$ 加群と考えて正しい． □

(2) の $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)/q\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ の基底 $\mathcal{B}(\infty) \bmod q\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ が，あとでてくる**結晶基底**に他ならない．また，証明の途中にでてきた $\mathcal{B}(\infty)$ は**標準基底**に他ならない．

証明の途中ででてきたように $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \mid \mathbf{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\nu}\}$ と $\mathcal{B}(\infty)$ の間には一対一対応があり，同様に $\{L(\mathbf{c}', \mathbf{h}') \mid \mathbf{c}' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\nu}\}$ と $\mathcal{B}(\infty)$ の間にも一対一対応がある．したがって，$\mathbf{c} \leftrightarrow \mathbf{c}'$ という一対一対応があることになる．これを具体的に求めると

$$c'_1 = c_2 + c_3 - \min(c_1, c_3), \quad c'_2 = \min(c_1, c_3), \quad c'_3 = c_1 + c_2 - \min(c_1, c_3)$$

となる．このような表示式で表わされる対応を**区分的線型対応**という．

5.3. **その他の場合．** $\mathfrak{g}$ を一般の複素単純リー環として，ワイル群の最長元 $w_0$ の最短表示 $\mathbf{h}$, $\mathbf{h}'$ を取る．このとき，$\mathbf{h}$, $\mathbf{h}'$ は組み紐群の関係式を何回か繰り返して移り合うことがしられている．(???) よって次が成り立つ．

**命題 5.13.** *命題 5.12 の主張が, $\mathfrak{g}$ のディンキン図式から取った 2 点に対応する階数 2 のリー環に対して正しいと仮定する. このとき, $\mathfrak{g}$ 自身についても命題 5.12 の主張が正しい. 特に $\mathfrak{g}$ が $ADE$ 型のときは主張が正しい.*

階数 2 で残ったのは, $A_1 + A_1$ の場合は自明に成立するので, $B_2$, $G_2$ の場合であるが, 実は, $A_2$ の命題 5.12 と同じ主張が成り立つことが知られている. $B_2$ の場合は, $A_2$ の場合と同様に, 標準基底を具体的に求めることにより, Xi によって示された [Xi:1999]. $G_2$ の場合は, PBW 基底と標準基底の間の基底の変換行列が, 上三角行列で対角成分が 1 で, 対角成分以外の成分が $q_s\mathbb{Z}[q_s]$ に属することを示すことができる. しかし, ここでは PBW 基底を用いて標準基底の存在を証明したいので, 標準基底の存在を用いないで証明したい. ($G_2$ の場合に標準基底を具体的に求めることは, かなりたいへんであると思われる.)

ここでは, 命題 5.12 のうちの (3) のみを主張する. これは, [Lusztig:1990] で証明された. $B_2$ 型のときは, ルート・ベクトルの交換関係を計算することによって示され, $G_2$ 型のときは, シュバレー群に関する Kostant の計算をまねることによって示されたのだが, のちに [Xi:1999] によって, $B_2$ のときと (少なくとも形式的には) 同じ方法で示されたので, まとめてそちらの方法を (計算を省略して) 紹介する.

[Lusztig:1990] G. Lusztig, *Quantum groups at roots of* 1, Geom. Dedicata **35** (1990), 89–114.
[Xi:1995] N. Xi, *On the PBW bases of the quantum group $U_v(G_2)$*, Algebra Colloq. **2** (1995), 355–362.
[Xi:1999] ———, *Canonical basis for type $B_2$*, Jour. of Alg. **218** (1999), 8–21.

まず, ワイル群の最長元 $w_0$ の最短表示 $\mathbf{h}$ を取る. $B_2$, $G_2$ のときはちょうど二通りあるが, そのいずれかを取る. (5.3) によって $\Delta^+$ に番号を

$$\beta_1 = \alpha_{i_1} < \beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}) < \cdots < \beta_\nu = s_{i_1} \cdots s_{i_{\nu-1}}(\alpha_{i_\nu})$$

と付ける. そして各正ルート $\beta_k$ に対するルート・ベクトル $f_{\beta_k}$ を前のようにして定め, PBW 基底 $L(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ を定義する.

このとき次が成立する.

**補題 5.14.** *$k < l$ とする. このとき*

$$f_{\beta_l}^{(m)} f_{\beta_k}^{(n)} - q^{mn(\beta_k,\beta_l)} f_{\beta_k}^{(n)} f_{\beta_l}^{(m)} = \sum_{\mathbf{c}} a_{\mathbf{c}} L(\mathbf{c}, \mathbf{h})$$

*によって $a_{\mathbf{c}}$ を定めると, $a_{\mathbf{c}} \in \mathbf{A}$ であり, さらに $a_{\mathbf{c}} \neq 0$ となるのは, 次の性質をみたす $\mathbf{c}$ のみである:*

$$c_i = 0 \ \textit{for}\ i < k \ \textit{or}\ i > l, \quad c_k < n, \quad c_l < m.$$

この命題は, ルート・ベクトル $f_{\beta_k}$, $f_{\beta_l}$ が順序を '間違って' $f_{\beta_l}^{(m)} f_{\beta_k}^{(n)}$ として現れたときに, 順序を正すことができると, 主張するものである. さらに $\mathbf{c}$ に関する条件は, $L(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ に現れるルートベクトルが, $\beta_k$ と $\beta_l$ の間にあるということを主張しているのである. これは, $G_2$ 型のときは, かなり面倒な計算であるが, すべてのルートベクトルの組について 'ほぼ具体的に' チェックできる. [Xi:1995].

**命題 5.15.** *PBW 基底 $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$ は ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^-$ の $\mathbf{A}$-基底になる.*

一つの最短表示 $\mathbf{h}$ について証明すれば, もう一つの最短表示 $\mathbf{h}'$ に対応する PBW 基底は $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})^*\}$ となるから, 同じ主張が成り立つことを注意しておく.

証明. $L(\mathbf{d}, \mathbf{h})$ で, $\mathbf{A}$ 上張られる部分加群を $U$ とおく. $L(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ の定義から $U$ は $f_{i_1}^{(n)}$ の左からの掛け算で不変である. もう一つの単純ルートは, 最後のルート $\beta_\nu$ として現れる. 先の補題を帰納的に用いることにより $f_{\beta_\nu}^{(n)} L(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ を $\{L(\mathbf{d}, \mathbf{h})\}$ の $\mathbf{A}$-係数の線型結合で表わせることが従うので, $U$ は $f_{\beta_\nu}^{(n)}$ の左からの掛け算でも不変である. よって $U$ は ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^-$ に一致する. □

$\mathbf{U}_q^-$ を箙の表現の Ringel-Hall 代数として実現したとき, PBW 基底は各表現 (の同型類) に対応する自然な基底である. ルート・ベクトルは前節の最後に説明したように, 直既約表現に対応している. また, 正ルートの集合に入った全順序(5.3) は, 箙の表現論においては $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(M_\beta, M_{\beta'}) = 0$

for $\beta < \beta'$ という性質に対応する. この性質は, ‘directed’ とよばれ, ディンキン箙の表現のアーベル圏について成立する顕著な性質である. アファイン・ディンキン箙については, この性質をもつような全順序は存在しない.

## 6. 双線型形式

この節の目的は $\mathbf{U}_q^-$ に双線型形式 $(\ ,\ )$ を定義し, PBW 基底が直交基底になっていることを見ることである. PBW 基底の定義以外は, 一般の $\mathfrak{g}$ で構わない. 詳しく文献をチェックしたわけではないが, 直交性は少なくとも次の論文で指摘されている.

[Kirillov-Reshetikhin] A.N. Kirillov and N. Reshetikhin, *q-Weyl group and a mutliplicative formula for universal R-matrices*, Comm. Math. Phys. **134** (1990), 421–431.

実は, 箙の表現論では $(\ ,\ )$ が, そもそも PBW 基底が直交基底になるように定義される. それに比べると, 以下の代数的な計算は面倒で非常に複雑で, 少なくとも私には, 箙の表現論を知らないで, このような計算を思いつくとは考えにくいのであるが.....

6.1. **定義.** ${}'\mathbf{U}_q^-$ を $f_i$ $(i \in I)$ を生成元とする $\mathbb{Q}(q)$-自由結合代数 (非可換多項式環) として, まずここに $(\ ,\ )$ を定義して, これが $\mathbf{U}_q^-$ に落ちることを見るという, やや間接的な方法によって $(\ ,\ )$ を定義する.

${}'\mathbf{U}_q^-$ に $\mathrm{wt}(f_{i_1} \cdots f_{i_r}) = -\alpha_{i_1} - \cdots - \alpha_{i_r}$ によって, ウェイトを $\mathbf{U}_q^-$ と同様に定める. ${}'\mathbf{U}_q^- \otimes {}'\mathbf{U}_q^-$ に積構造を

$$(x_1 \otimes x_2) \cdot (x_1' \otimes x_2') = q^{-(\mathrm{wt}\, x_2, \mathrm{wt}\, x_1')} x_1 x_1' \otimes x_2 x_2'$$

によって定義する. ただし $x_1, x_2, x_1', x_2'$ は同次な元である. $\mathrm{wt}(x+y) = \mathrm{wt}\, x + \mathrm{wt}\, y$ に注意すれば, 積は結合律を満たす.

環準同型 $r\colon {}'\mathbf{U}_q^- \to {}'\mathbf{U}_q^- \otimes {}'\mathbf{U}_q^-$ を $r(f_i) = f_i \otimes 1 + 1 \otimes f_i$ によって定義する.

この定義は, 余積 $\Delta$ の定義とよく似ている. 実際, 命題 3.6 の式で, $\Delta$ を ${}'\mathbf{U}_q^- \otimes \mathbf{U}_q^0$ に定義すると,

$$\Delta(x) = \sum x_1 q(-\nu^{-1}\, \mathrm{wt}\, x_2) \otimes x_2, \qquad r(x) = \sum x_1 \otimes x_2 \tag{6.1}$$

が成立する. ただし, $\nu^{-1}$ は, $\nu^{-1}(\alpha_i) = (\alpha_i, \alpha_i) h_i/2$ で定義される写像である. 余積 $\Delta$ が成分の入れ替えで対称になっていないのに対して, $r$ ではテンソル積の積の定義が対称になっていない. ここでは, $r$ は $\mathbf{U}_q^-$ で完結していて, あとの都合によいので, こちらを使うことにするが, 本質的には差がない.

**命題 6.2.** 次の性質を満たす ${}'\mathbf{U}_q^-$ 上の $\mathbb{Q}(q)$ に値を持つ双線型形式 $(\ ,\ )$ がただ一つ存在する.

(1) $(f_i, f_j) = \frac{\delta_{ij}}{1-q_i^2}$
(2) $(x, y'y'') = (r(x), y' \otimes y'')$
(3) $(xx', y'') = (x \otimes x', r(y''))$

ただし, ${}'\mathbf{U}_q^- \otimes {}'\mathbf{U}_q^-$ 上の双線型形式は $(x_1 \otimes x_2, x_1' \otimes x_2') = (x_1, x_1')(x_2, x_2')$ によって定める. さらにこの双線型形式は対称である.

証明. ウェイトが $\nu$ の同次元の全体からなるウェイト空間を $({}'\mathbf{U}_q^-)_\nu$ とおく. 定義から $r$ は線型写像 $({}'\mathbf{U}_q^-)_{\nu+\nu'} \to ({}'\mathbf{U}_q^-)_\nu \otimes ({}'\mathbf{U}_q^-)_{\nu'}$ を定めるが, その転置写像 $({}'\mathbf{U}_q^-)_\nu^* \otimes ({}'\mathbf{U}_q^-)_{\nu'}^* \to ({}'\mathbf{U}_q^-)_{\nu+\nu'}^*$ によって $\bigoplus_\nu ({}'\mathbf{U}_q^-)_\nu^*$ に積を定める. 容易にチェックできる性質 $(r \otimes 1) r = (1 \otimes r) r$ によって, この積は結合律を満たす.

$\xi_i \in ({}'\mathbf{U}_q^-)_{\alpha_i}^*$ を $\langle \xi_i, f_i \rangle = \frac{1}{1-q_i^2}$ によって定義する. このとき環準同型 $\phi\colon {}'\mathbf{U}_q^- \to \bigoplus_\nu ({}'\mathbf{U}_q^-)_\nu^*$ が $\phi(f_i) = \xi_i$ によって定まる. このとき

$$(x, y) = \langle \phi(y), x \rangle$$

と定義する. (1), (2) は定め方から明らかに成立する. (3) を $\mathrm{wt}\, y''$ に関する帰納法でチェックしよう. 以下, でてくる ${}'\mathbf{U}_q^-$ の元はすべて同次であるとする. まず, $\mathrm{wt}\, x \neq \mathrm{wt}\, y$ のときは $(x, y) = 0$ であることに注意しよう. これは $\phi$ がウェイトを保つことから明らかである. $\mathrm{wt}\, y'' = f_i$ のとき, $x = f_i$, $x' = 1$ もしくは $x = 1$, $x' = f_i$ と仮定してよいが, このとき (3) が成立する. 次に $y'' = yy'$ で $y$, $y'$ については (3) が成立していると仮定する. すると

$$(xx', yy') = \langle \phi(yy'), xx' \rangle = \langle \phi(y)\phi(y'), xx' \rangle = \langle \phi(y) \otimes \phi(y'), r(xx') \rangle$$

となる. ただし最後の等号は, $\bigoplus_\nu ({}'\mathbf{U}_q^-)_\nu^*$ の積の定め方から従う. $r(x) = \sum x_1 \otimes x_2$, $r(x') = \sum x_1' \otimes x_2'$ とすると $r(xx') = \sum q^{-(\mathrm{wt}\, x_2, \mathrm{wt}\, x_1')} x_1 x_1' \otimes x_2 x_2'$ である. したがって上の式は

$$\begin{aligned} &\sum q^{-(\mathrm{wt}\, x_2, \mathrm{wt}\, x_1')} (x_1 x_1', y)(x_2 x_2', y') \\ = &\sum q^{-(\mathrm{wt}\, x_2, \mathrm{wt}\, x_1')} (x_1 \otimes x_1', r(y))(x_2 \otimes x_2', r(y')) \end{aligned}$$

に等しい．ここで $y, y'$ について (3) が成立していることを用いた．さらに $r(y) = \sum y_1 \otimes y_2$, $r(y') = \sum y'_1 \otimes y'_2$ とすると，上は

$$\sum q^{-(\mathrm{wt}\, x_2, \mathrm{wt}\, x'_1)}(x_1, y_1)(x'_1, y_2)(x_2, y'_1)(x'_2, y'_2)$$

に等しい．一方

$$(x \otimes x', r(yy')) = \sum q^{-(\mathrm{wt}\, y_2, \mathrm{wt}\, y'_1)}(x_1, y_1)(x'_1, y_2)(x_2, y'_1)(x'_2, y'_2)$$

である．二つの式は，ともに $\mathrm{wt}\, x_2 = \mathrm{wt}\, y'_1$, $\mathrm{wt}\, x'_1 = \mathrm{wt}\, y_2$ が成立していなければ 0 なので，相等しい．これで (3) が示された．

性質を満たす ( , ) がただ一つであることは明らかである．(実際には (1),(2) だけで十分である．) 対称であることは，そこからの帰結である． □

次の二つの式は帰納法でチェックできるので，演習としておこう．

$$r(f_i^{(p)}) = \sum_{t+s=p} q_i^{-ts} f_i^{(t)} \otimes f_i^{(s)},$$

(6.3)

$$(f_i^{(p)}, f_i^{(p)}) = \prod_{s=1}^{p} \frac{1}{1 - q_i^{2s}} = \frac{(-1)^p q_i^{-\frac{p(p+1)}{2}}}{(q_i - q_i^{-1})^p [p]_i^!}$$

**補題 6.4.** $m \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} &r(\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)) \\ &\quad = 1 \otimes \mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j) + \sum_{k=0}^{m} \prod_{h=0}^{k-1} (1 - q_i^{2h+2(1-m-a_{ij})}) q_i^{-k(m-k)} \mathrm{ad}^*(f_i^{(m-k)})(f_j) \otimes f_i^{(k)} \end{aligned}$$

が成り立つ．

証明．

$$\begin{aligned} 左辺 &= \sum_{p+p'=m} (-1)^p q_i^{p(1-a_{ij}-m)} r(f_i^{(p)} f_j f_i^{(p')}) \\ &= \sum_{\substack{t+s=p \\ t'+s'=p' \\ p+p'=m}} (-1)^{s+t} q_i^{(s+t)(1-a_{ij}-m)-ts-t's'} (f_i^{(t)} \otimes f_i^{(s)})(1 \otimes f_j + f_j \otimes 1)(f_i^{(t')} \otimes f_i^{(s')}) \\ &= \sum_{t+s+t'+s'=m} (-1)^{s+t} q_i^{(s+t)(1-a_{ij}-m)-ts-t's'} \{ q^{-(s\alpha_i+\alpha_j, t'\alpha_i)} f_i^{(t)} f_i^{(t')} \otimes f_i^{(s)} f_j f_i^{(s')} \\ &\qquad + q^{-(s\alpha_i, \alpha_j + t'\alpha_i)} f_i^{(t)} f_j f_i^{(t')} \otimes f_i^{(s)} f_i^{(s')} \} \end{aligned}$$

となる．和の中身を二つに分けると，第一項は

$$\sum_{t+s+t'+s'=m} (-1)^{m-s'-t'} q_i^{-s(t+t')+(m-s')(1-a_{ij}-m)-t'(1-t-t')} \begin{bmatrix} t+t' \\ t \end{bmatrix}_{q_i} \times f_i^{(t+t')} \otimes f_i^{(s)} f_j f_i^{(s')}$$

となる．***により $t + t' = 0$ のときだけ 0 でなく，よって，これは

$$1 \otimes \mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)$$

に等しい．次に第二項は，

$$\sum_{t+s+t'+s'=m} (-1)^{s+t} q_i^{-t'(s+s')+(t+2s)(1-a_{ij}-m)+s(s+s'-1)} \begin{bmatrix} s+s' \\ s \end{bmatrix}_{q_i} \times f_i^{(t)} f_j f_i^{(t')} \otimes f_i^{(s+s')}$$

となる．$s + s' = k$ とおいて命題 1.2 を用いれば，

$$\sum_{k=0}^{m} \prod_{h=0}^{k-1} (1 - q_i^{2h+2(1-m-a_{ij})}) \sum_{t+t'=m-k} (-1)^t q_i^{t(1-a_{ij}-m)-t'k} f_i^{(t)} f_j f_i^{(t')} \otimes f_i^{(k)}$$

となるので，結論が示された． □

**命題 6.5.**

$$r(\mathrm{ad}^*(f_i^{(1-a_{ij})})(f_j)) = 1 \otimes \mathrm{ad}^*(f_i^{(1-a_{ij})})(f_j) + \mathrm{ad}^*(f_i^{(1-a_{ij})})(f_j) \otimes 1$$

証明．先の補題で $m = 1 - a_{ij}$ のときには第二項は，$k = 0$ のとき以外は 0 になる． □

**系 6.6.** $r$ は環準同型 $\mathbf{U}_q^- \to \mathbf{U}_q^- \otimes \mathbf{U}_q^-$ を誘導する．

以後, 誘導された環準同型も同じ記号 $r$ で表わす.

**命題 6.7.** 双線型形式 ( , ) は $\mathbf{U}_q^-$ 上に落ち, それは先の性質 *(1),(2),(3)* によって特徴づけられる.

証明. $\mathrm{ad}^*(f_i^{(1-a_{ij})})(f_j)$ が ( , ) の根基に入っていることをチェックすればよい. ウェイトの関係から

$$(\mathrm{ad}^*(f_i^{(1-a_{ij})})(f_j), f_i^{(p)} f_j f_i^{(p')}) = 0$$

を $p+p'=1-a_{ij}$ のときに示せばよいが, これは性質 (2) と上の命題から容易に従う. □

以後は, ( , ) によって $\mathbf{U}_q^-$ 上の双線型形式を表わすことにする.

**補題 6.8.** $r(x^*)^{*\otimes *} = t\circ r(x)$ が成り立つ. ただし $t$ は成分の入れ替えである.

証明.

$$\begin{aligned}((x_1'^* \otimes x_2'^*)(x_1^* \otimes x_2^*))^{*\otimes *} &= q^{-(\mathrm{wt}\, x_2', \mathrm{wt}\, x_1)}(x_1'^* x_1^* \otimes x_2'^* x_2^*)^{*\otimes *} \\ &= q^{-(\mathrm{wt}\, x_2', \mathrm{wt}\, x_1)} x_1 x_1' \otimes x_2 x_2'\end{aligned}$$

に注意すれば, $x=1$, $f_i$ のときに示せばよいが, これは明らかである. □

**補題 6.9.** $(x,y)=(x^*,y^*)$

証明. $(x^*,y^*)$ が命題 6.2 の条件 (1),(2),(3) を満たすことを示せばよい. (1) は明らか. (2) は

$$\begin{aligned}(x^*,(y'y'')^*) &= (r(x^*), y''^* \otimes y'^*) = (t\circ r(x)^{*\otimes *}, y''^*\otimes y'^*) \quad (\text{補題 6.8 より}) \\ &= (r(x)^{*\otimes *}, y'^* \otimes y''^*)\end{aligned}$$

とチェックできる. (3) は ( , ) の対称性から従う. □

6.2. **作用素 $_ir$, $r_i$ と $\mathbf{U}_q^-$ の直交分解.** $\mathbb{Q}(q)$-線型写像 $_ir\colon \mathbf{U}_q^- \to \mathbf{U}_q^-$, $r_i\colon \mathbf{U}_q^- \to \mathbf{U}_q^-$ を

$$r(x) = f_i \otimes {_ir}(x) + \cdots = r_i(x)\otimes f_i + \cdots$$

によって定義する. ただし $\cdots$ の部分は, ($x$ は同次として) それぞれテンソル積の第一成分, 第二成分のウェイトが $-\alpha_i$ でないものである. 定め方から

$$(f_i y, x) = (f_i,f_i)(y, {_ir}(x)), \qquad (y f_i, x) = (f_i, f_i)(y, r_i(x)) \tag{6.10}$$

が成り立つ. また

$${_ir}(1)=0, \quad {_ir}(f_j)=\delta_{ij}, \qquad r_i(1)=0, \quad r_i(f_j)=\delta_{ij}, \tag{6.11}$$

$${_ir}(xx') = q^{(\mathrm{wt}\, x, \alpha_i)} x\, {_ir}(x') + {_ir}(x)x', \quad r_i(xx') = q^{(\mathrm{wt}\, x', \alpha_i)} r_i(x)x' + x r_i(x') \tag{6.12}$$

が定義と $r$ が環準同型であることから成り立つ. 補題 6.8 により $r_i = *\circ {_ir}\circ *$ が成り立つ.

**補題 6.13.** $x\in \mathbf{U}_q^-$ について次が成り立つ.

$$e_i x - x e_i = \frac{r_i(x) t_i - t_i^{-1} {_ir}(x)}{q_i - q_i^{-1}}$$

証明. $x'$, $x'' \in \mathbf{U}_q^-$ について上の式が成立しているとしよう. すると

$$\begin{aligned}e_i(x'x'') - (x'x'')e_i &= x' e_i x'' + \frac{r_i(x')t_i - t_i^{-1}{_ir}(x')}{q_i - q_i^{-1}} x'' - x'x''e_i \\ &= x' \frac{r_i(x'')t_i - t_i^{-1}{_ir}(x'')}{q_i - q_i^{-1}} + \frac{r_i(x')t_i - t_i^{-1}{_ir}(x')}{q_i - q_i^{-1}} x'' \\ &= \frac{(x' r_i(x'') + r_i(x') q^{(\mathrm{wt}\, x'', \alpha_i)} x'')t_i - t_i^{-1}(q^{(\mathrm{wt}\, x', \alpha_i)} x'\, {_ir}(x'') + {_ir}(x')x'')}{q_i - q_i^{-1}}\end{aligned}$$

となるから, (6.12) より $x = x'x''$ についても上の式が成立することが容易にチェックできる. したがって $x=1$, $f_j$ のときに上の式が成り立つことをチェックすればよいが, これは(6.11) から正しい. □

${}_ir$ は, 柏原が $\mathbf{U}_q^-$ に結晶基底を定義する際に使われた. §8 で紹介する.
あとで使う補題を証明しておく.

**補題 6.14.** $\bigcap_{i\in I}\operatorname{Ker}{}_ir = \mathbb{Q}(q_s)1 = \bigcap_{i\in I}\operatorname{Ker} r_i$.

証明. $\operatorname{Ker}{}_ir$ についての主張だけを示せば, $*$ を適用して $\operatorname{Ker} r_i$ についても主張が従うことに注意する.

$x \in \bigcap \operatorname{Ker}{}_ir \cap (\mathbf{U}_q^-)_\xi$ とし, ウェイト $\xi$ の長さ ($|\xi| = \sum_i |\xi_i|$ for $\xi = \sum \xi_i\alpha_i$) に関する帰納法で示す.

$|\xi| = 1$ のとき, $x = cf_i$ ($c \in \mathbb{Q}(q_s)$, $i \in I$) と書ける. ${}_ir(x) = 0$ から $c = 0$ が従う.

$|\xi| > 1$ のとき, ${}_ir\circ r_j = r_j\circ{}_ir$ が, 補題 6.13 の証明と同様に示される. したがって帰納法の仮定により $r_j(x) = 0$ が任意の $j \in I$ について成り立つ. 補題 6.13 により $[e_i, x] = 0$ がすべての $i \in I$ について成り立つ. このとき任意の既約最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ に対して $e_ixv_\lambda = xe_iv_\lambda = 0$ であり, ウェイトの関係から $xv_\lambda \notin \mathbb{Q}(q_s)v_\lambda$ であるから, $xv_\lambda = 0$ となる. $\lambda$ を十分大きく取れば, $x = 0$ となる. □

**定理 6.15.** $(\ ,\ )$ は $\mathbf{U}_q$ 上非退化である.

証明. $x \in (\mathbf{U}_q^-)_\xi$ が $(x, (\mathbf{U}_q^-)_\xi) = 0$ を満たすとき, $x = 0$ を示す. 上と同様に $|\xi|$ に関する帰納法で示す. $\xi = 0$ のときは明らかに正しい. (6.10)(と $(f_i, f_i) \neq 0$ より), ${}_ir(x)$ も内積の根基に属す. 帰納法の仮定により ${}_ir(x) = 0$ がすべての $i$ について成り立つ. よって, 先の補題より $x = 0$ である. □

**定義 6.16.** $\mathbf{U}_q^-[i]$ (resp. ${}^*\mathbf{U}_q^-[i]$) を $\operatorname{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)$ (resp. $\operatorname{ad}(f_i^{(m)})(f_j)$) ($i \neq j$, $0 \leq m \leq -a_{ij}$) によって生成される $\mathbf{U}_q^-$ の部分環とする. 定義から $*(\mathbf{U}_q^-[i]) = {}^*\mathbf{U}_q^-[i]$ である.

**定理 6.17.** (1) $\mathbf{U}_q^-[i] = \{x \in \mathbf{U}_q^- \mid T_i^{-1}(x) \in \mathbf{U}_q^-\} = \operatorname{Ker}{}_ir$, ${}^*\mathbf{U}_q^-[i] = \{x \in \mathbf{U}_q^- \mid T_i(x) \in \mathbf{U}_q^-\} = \operatorname{Ker} r_i$ が成り立つ.

(2) $\mathbf{U}_q^- = \bigoplus_{n\geq 0} f_i^n\mathbf{U}_q^-[i] = \bigoplus_{n\geq 0} {}^*\mathbf{U}_q^-[i]f_i^n$ と直和分解する.

${}^*\mathbf{U}_q^-[i]$ に関する主張は $\mathbf{U}_q^-[i]$ に関する主張に $*$ を適用して得られるので, $\mathbf{U}_q^-[i]$ に関するものを証明すればよい. いくつかの補題を準備したあとで証明する.

まず命題 4.11 により $\mathbf{U}_q^-[i] \subset \{x \in \mathbf{U}_q^- \mid T_i^{-1}(x) \in \mathbf{U}_q^-\}$ である.

**補題 6.18.**

$$\mathbf{U}_q^- = \sum_{n\geq 0} f_i^n\mathbf{U}_q^-[i].$$

証明. (4.6) より

$$\begin{aligned}\operatorname{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)f_i &= \operatorname{ad}^*(f_i)\left(\operatorname{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)\right) + f_it_i\operatorname{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)t_i^{-1}\\ &= [m+1]_i\operatorname{ad}^*(f_i^{(m+1)})(f_j) + q_i^{\langle h_i, m\alpha_i+\alpha_j\rangle}f_i\operatorname{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)\end{aligned}$$

が成り立つ. つまり $f_i$ をどんどん左に持っていくことができる. これより結論が従う. □

**補題 6.19.** $\{x \in \mathbf{U}_q^- \mid T_i^{-1}(x) \in \mathbf{U}_q^-\} \subset \operatorname{Ker}{}_ir$ が成り立つ.

証明. $x \in \mathbf{U}_q^- \cap T_i(\mathbf{U}_q^-)$ とする. 補題 6.18 と $\mathbf{U}_q^-[i] \subset \mathbf{U}_q^- \cap T_i(\mathbf{U}_q^-)$ により

$$\frac{r_i(x)}{q_i - q_i^{-1}} = \sum_{n\geq 0} f_i^nT_i(u_n), \qquad \frac{{}_ir(x)}{q_i - q_i^{-1}} = \sum_{n\geq 0} f_i^nT_i(v_n),$$

となる $u_n, v_n \in \mathbf{U}_q^-$ が存在する. 補題 6.13 の両辺に $T_i^{-1}$ を適用すると

$$-t_i^{-1}f_iT_i^{-1}(x) + T_i^{-1}(x)t_i^{-1}f_i = \sum(-e_it_i)^nu_nt_i^{-1} - t_i(-e_it_i)^nv_n$$

仮定より, 左辺は $t_i^{-1}\mathbf{U}_q^-$ に属する. 一方, 右辺は $\sum_n e_i^nt_i^{n-1}\mathbf{U}_q^- + e_i^nt_i^{n+1}\mathbf{U}_q^-$ に属する. 三角分解(定理 3.9) により, $u_n = 0$ ($n > 0$), $v_n = 0$ ($n \geq 0$) である. 特に, ${}_ir(x) = 0$ である. □

定理 *6.17* の証明. 補題 6.18 の分解において $\mathbf{U}_q^-[i] \subset \{x \in \mathbf{U}_q^- \mid T_i^{-1}(x) \in \mathbf{U}_q^-\} \subset \mathrm{Ker}\, {}_ir$ に注意すると, $\mathbf{U}_q^- = \sum_{n\geq 0} f_i^n \mathrm{Ker}\, {}_ir$ となる. これが直和分解であることを示せば十分である. $0 = \sum_{n\geq 0} f_i^n x_n$ ($x_n \in \mathbf{U}_q^-[i]$) として, $x_n = 0$ が $n > n_0$ について成り立っているときに $x_{n_0} = 0$ であることを帰納法で示す. $n_0 = 0$ のときは明らかである. この式に ${}_ir$ を適用すると,

$$0 = \sum_{n>0} [n]_i q_i^{n-1} f_i^{n-1} x_n$$

が従う. 帰納法の仮定により $x_{n_0} = 0$ が示される. □

**命題 6.20.** 双線型形式 ( , ) に関して $\mathbf{U}_q^-$ は

$$\mathbf{U}_q^- = \mathbf{U}_q^-[i] \oplus f_i \mathbf{U}_q^- = {}^*\mathbf{U}_q^-[i] \oplus \mathbf{U}_q^- f_i$$

と直交分解する.

証明. 直和分解していることは補題 6.18 から従う. ( , ) に関して直交していることは, 定理 6.17(1) と (6.10) により成り立つ. □

6.3. **PBW 基底の直交性.** 以上の準備のもと, この節の主定理を述べる.

**定理 6.21.** (1) $x, y \in \mathbf{U}_q^-[i]$ のとき $(x, y) = (T_i^{-1}(x), T_i^{-1}(y))$ が成り立つ.

(2) $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\nu$ について

$$(L(\mathbf{c}, \mathbf{h}), L(\mathbf{c}', \mathbf{h})) = \prod_{p=1}^{\nu} (f_{i_p}^{(c_p)}, f_{i_p}^{(c'_p)}) = \prod_{p=1}^{\nu} \delta_{c_p, c'_p} \prod_{d=1}^{c_p} \frac{1}{1 - q_{i_p}^{2d}}$$

が成り立つ. 特に $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}'$ のときは $(L(\mathbf{c}, \mathbf{h}), L(\mathbf{c}', \mathbf{h})) = 0$ である. また ( , ) は非退化である.

定理 6.21(1) の証明は, 初等的ではあるが計算が複雑なのでここでは省略することにする.
(2) は, (1) と定理 6.17(1), (6.10, 6.12) および (6.3) から導かれる.
応用を述べる.
$L(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ は互いに直交し, $(L(\mathbf{c}, \mathbf{h}), L(\mathbf{c}, \mathbf{h}))$ は 0 でないから次が分かる.

**系 6.22.** ( , ) は非退化である.

$\mathbf{A}_0 \overset{\text{def.}}{=} \{f(q_s) \in \mathbb{Q}(q_s) \mid f$ は $q_s = 0$ で正則$\}$ を思いだそう. これは局所環で極大イデアルは $q\mathbf{A}_0$ である.

**命題 6.23.** $\mathbf{U}_q^-$ の部分集合 $\mathcal{L}(\infty)$ を

$$\mathcal{L}(\infty) = \left\{ x \in \mathbf{U}_q^- \,\middle|\, (x, x) \in \mathbf{A}_0 \right\}$$

で定義する.

(1) $\mathcal{L}(\infty)$ は, $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \mid \mathbf{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\nu\}$ を基底とする $\mathbf{U}_q^-$ の部分 $\mathbf{A}_0$-加群である.

(2) $x \in {}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^-$ が $(x, x) - 1 \in q_s \mathbf{A}_0$ を満たすと, ある $\mathbf{c}$ が存在して $x \equiv \pm L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \mod q_s \mathcal{L}(\infty)$ となる.

証明. (1) $x \in \mathbf{U}_q^-$ を $x = \sum a_{\mathbf{c}} L(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ ($a_{\mathbf{c}} \in \mathbb{Q}(q)$) と書く. すべての $\mathbf{c}$ に対して

$$a_{\mathbf{c}} = p_{\mathbf{c}} q_s^{-t} + q_s \text{ について高次の項}, \qquad p_{\mathbf{c}} \in \mathbb{Q}$$

となる $t \in \mathbb{Z}$ のうち最小のものを取り, それも $t$ で表わす. 取り方から少なくとも一つの $\mathbf{c}$ については $p_{\mathbf{c}} \neq 0$ である. このとき

$$(x, x) \equiv q_s^{-2t} \sum_{\mathbf{c}} p_{\mathbf{c}}^2 \mod q_s^{-2t+1} \mathbf{A}_0$$

である. $\sum_{\mathbf{c}} p_{\mathbf{c}}^2 \neq 0$ に注意して, $(x, x) \in \mathbf{A}_0$ となる必要十分条件は $t \leq 0$ である. これは $a_{\mathbf{c}} \in \mathbf{A}_0$ と同値であり, (1) が従う.

(2) 上に加えてさらに $x \in {}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^-$, $(x, x) \equiv 1 \mod q_s \mathbf{A}_0$ とすると, $t = 0$ で $\sum_{\mathbf{c}} p_{\mathbf{c}}^2 = 1$ である. ところが $x \in {}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^-$ であれば $p_{\mathbf{c}}$ は整数であるから, 一つを除きすべて 0 で, その一つは $\pm 1$ である. これは (2) の主張に他ならない. □

$\mathcal{L}(\infty)$ の定義は内積だけで書かれているから, 特に $L(\mathbf{c},\mathbf{h})$ の生成する部分 $\mathbf{A}_0$-加群が, 最短表示 $\mathbf{h}$ の取り方に依存しないことが分かったわけである. これは, $\mathfrak{g}$ が $ADE$ 型のときに命題 5.12,5.13 で示された結果 (の弱い形) に他ならない. なお, この証明には $\{L(\mathbf{c},\mathbf{h})\}$ が**概正規直交基底**でこと, すなわち,

$$(L(\mathbf{c},\mathbf{h}),L(\mathbf{d},\mathbf{h}))-\delta_{\mathbf{c},\mathbf{d}}\in q\mathbf{A}_0$$

であることしか使われていないことに注意しよう. また

$$\widetilde{\mathcal{B}}(\infty) \bmod q_s\mathcal{L}(\infty) \overset{\text{def.}}{=} \{\pm L(\mathbf{c},\mathbf{h}) \bmod q_s\mathcal{L}(\infty) \mid \mathbf{c}\in\mathbb{Z}^{\nu}_{\geq 0}\}\subset \mathcal{L}(\infty)/q_s\mathcal{L}(\infty)$$

も (2) の主張により, $\mathbf{h}$ の取り方に依存しないことが従う. しかし, この議論では符号の umibiguity を消して $\{L(\mathbf{c},\mathbf{h}) \bmod q_s\mathcal{L}(\infty)\}$ が $\mathbf{h}$ に依存しないことは証明できない.

定理 6.21(1) の証明に入ろう. まず

(6.24) $$(\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j),\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j))=(\mathrm{ad}(f_i^{(-a_{ij}-m)})(f_j),\mathrm{ad}(f_i^{(-a_{ij}-m)})(f_j))$$

を示す. $T_i^{-1}(\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j))=\mathrm{ad}(f_i^{(-a_{ij}-m)})(f_j)$ であるから (命題 4.11), これは定理 6.21(1) の特別な場合である.

左辺を計算すると

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j), f_jf_i^{(m)}) && (\text{命題 6.20 より})\\
&= (r(\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)), f_j\otimes f_i^{(m)})\\
&= \prod_{h=0}^{m-1}(1-q_i^{2h+2-2m-2a_{ij}})\,(f_i^{(m)},f_i^{(m)})(f_j,f_j) && (\text{補題 6.4 より})\\
&= q_i^{-m(m+a_{ij})}\begin{bmatrix}-a_{ij}\\ m\end{bmatrix}_i(f_j,f_j) && ((6.3)\text{ より})
\end{aligned}$$

となる. 同様に右辺も計算すると, 同じ答になるので上の式が示された.

定理 6.21(1) は, $y=1$ のときは明らかに正しいので, ある $y$ とすべての $x$ について正しければ, $\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)y$ $(m\leq -a_{ij})$ とすべての $x$ についても正しいことを言えばよい. そこで ${}_ir$ の拡張として ${}_{ti,j,si}r$ を

$$r(x)=\sum_{t+s\leq -a_{ij}} f_i^{(t)}f_jf_i^{(s)}\otimes {}_{ti,j,si}r(x)+\cdots$$

で定義する. $q$-Serre 関係式は, $t+s=1-a_{ij}$ の項に関するものなので, $t+s\leq -a_{ij}$ のときは, $f_i^{(t)}f_jf_i^{(s)}$ は一次独立であり, ${}_{ti,j,si}r(x)$ は well-defined である. $t$ または $s$ が 0 のときは, ${}_{j,si}r(x)$, ${}_{ti,j}r(x)$ と略記することにする. すると

$$\begin{aligned}
&(x,\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)y)\\
&= (r(x),\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)\otimes y)\\
&= \sum_{t+s=m}({}_{ti,j,si}r(x),y)(f_i^{(t)}f_jf_i^{(s)},\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)) && (\text{ウェイトの関係から})\\
&= ({}_{j,mi}r(x),y)(f_jf_i^{(m)},\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)) && (\text{命題 6.20 より})\\
&= ({}_{j,mi}r(x),y)(\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j),\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)) && (\text{命題 6.20 より})
\end{aligned}$$

となる. 同様に

$$\begin{aligned}
&(T_i^{-1}(x),T_i^{-1}(\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)y))=(T_i^{-1}(x),\mathrm{ad}(f_i^{(-a_{ij}-m)})(f_j)T_i^{-1}(y))\\
&=({}_{(-a_{ij}-m)i,j}r\circ T_i^{-1}(x),T_i^{-1}(y))(\mathrm{ad}^{(-a_{ij}-m)})(f_j),\mathrm{ad}^{(-a_{ij}-m)})(f_j))
\end{aligned}$$

であるから, (6.24) と合わせると, もしも

(6.25) $$({}_{j,mi}r(x),y)=(T_i\circ{}_{(-a_{ij}-m)i,j}r\circ T_i^{-1}(x),y)$$

が示されれば, 「$y$ について定理 6.21(1) が正しければ, $\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)y$ $(m\leq -a_{ij})$ についても正しい」が従うことになる.

これを示すために, 少し準備をする. ${}_{ni}r$, $r_{ni}$ を

$$r(x)=f_i^{(n)}\otimes{}_{ni}r(x)+\cdots=r_{ni}(x)\otimes f_i^{(n)}+\cdots$$

によって定義する. このとき

(6.26) $$\underbrace{{}_ir\circ\cdots\circ{}_ir}_{n\text{ 回}}(x)=q_i^{n(n-1)/2}{}_{ni}r(x)$$

が成り立つことを証明しよう. $x=1$ のときは両辺 0 なので正しい. $x$ で正しいときに $xf_i$ でも正しいことを $n$ に関する帰納法で示す. $n=1$ のときは自明に正しい. 右辺について

$${}_{ni}r(xf_i)={}_{ni}r(x)f_i+[n]_iq^{(\mathrm{wt}\,x+(n-1)\alpha_i,\alpha_i)}{}_{(n-1)i}r(x)$$

が成り立つ．実際

$$\begin{aligned} r(xf_i) = r(x)r(f_i) &= \left(f_i^{(n)} \otimes {}_{ni}r(x) + f_i^{(n-1)} \otimes {}_{(n-1)i}r(x) + \cdots\right)(1 \otimes f_i + f_i \otimes 1) \\ &= f_i^{(n)} \otimes \left({}_{ni}r(x)f_i + [n]_i q^{(\mathrm{wt}\,{}_{(n-1)i}r(x),\alpha_i)}{}_{(n-1)i}r(x)\right) + \cdots \end{aligned}$$

より正しい．一方, (6.26) の左辺について

$$\underbrace{{}_ir \circ \cdots \circ {}_ir}_{n\text{ 回}}(xf_i) = \underbrace{{}_ir \circ \cdots \circ {}_ir}_{n\text{ 回}}(x)f_i + [n]_i q^{(\alpha_i,\mathrm{wt}\,x+(n-1)\alpha_i)} \underbrace{{}_ir \circ \cdots \circ {}_ir}_{n-1\text{ 回}}(x)$$

が成り立つことが $n$ に関する帰納法で容易に示される．この式は, 上の ${}_{ni}r$ の満たす漸化式と同じ形をしているので, 帰納法によって主張が導かれる．

次に

$$ {}_{ni}r({}^*\mathbf{U}_q^-[i]) \subset {}^*\mathbf{U}_q^-[i] \tag{6.27}$$

を示す．$*$ を適用して $r_{ni}(\mathbf{U}_q^-[i]) \subset \mathbf{U}_q^-[i]$ を示せばよい．(6.26) により, $n=1$ のときに示せば十分である．$\mathbf{U}_q^-[i]$ は $\mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)$ で生成される部分代数であるから, $x = \mathrm{ad}^*(f_i^{(m)})(f_j)$ のときに示せば十分であるが, これは補題 6.4 により正しい．

${}^i\pi$ を命題 6.20 の直交分解に関する直交射影 $\mathbf{U}_q^- \to \mathbf{U}_q^-[i]$ とする．このとき $x \in \mathbf{U}_q^-[i]$, $m \geq 1$ にたいして

$${}^i\pi(xf_i^m) = \frac{(-1)^m q^{m(\mathrm{wt}\,x,\alpha_i)} q_i^{-m(3m+1)/2}}{(q_i - q_i^{-1})^m} T_i \circ {}_{mi}r \circ T_i^{-1}(x) \tag{6.28}$$

を帰納法で示そう．まず(6.27) から右辺は $\mathbf{U}_q^-[i]$ に属していることを注意しておく．$m=1$ のとき $r_i(T_i^{-1}(x)) = 0$ であるから, 補題 6.13 により,

$$e_i T_i^{-1}(x) - T_i^{-1}(x)e_i = -\frac{t_i^{-1}\,{}_ir(T_i^{-1}(x))}{q_i - q_i^{-1}}$$

が成り立つ．両辺に $T_i$ を適用すると

$$-f_i t_i x + x f_i t_i = -\frac{t_i T_i \circ {}_ir \circ T_i^{-1}(x)}{q_i - q_i^{-1}}$$

となる．右から $t_i^{-1}$ を掛けて $f_i t_i x t_i^{-1} \in f_i \mathbf{U}_q^- = \mathrm{Ker}\,{}^i\pi$ に注意すれば, (6.28) の $m=1$ のときを得る．次に $m$ で正しいとすると

$$\begin{aligned} {}^i\pi(xf_i^{m+1}) &= {}^i\pi({}^i\pi(xf_i^m)f_i) && ({}^i\pi\text{ の定義より}) \\ &= -\frac{q^{(\mathrm{wt}\,x-m\alpha_i,\alpha_i)}q_i^{-2}}{q_i - q_i^{-1}} T_i \circ {}_ir \circ T_i^{-1}\left({}^i\pi(xf_i^m)\right) && ((6.28)\text{ の } m=1 \text{ より}) \\ &= \frac{(-1)^{m+1}q^{(m+1)(\mathrm{wt}\,x,\alpha_i)}q_i^{-2m-2-m(3m+1)/2}}{(q_i - q_i^{-1})^{m+1}} T_i \circ {}_ir \circ {}_{mi}r \circ T_i^{-1}(x) \\ & && (\text{帰納法の仮定より}) \end{aligned}$$

であるから(6.26) から $m+1$ でも(6.28) が成り立つことが分かる．

以上の準備のもとにいよいよ(6.25) を示す．

$$T_i^{-1} \circ {}_i\pi \circ {}_{j,mi}r(x) = {}_{(-a_{ij}-m)i,j}r \circ T_i^{-1}(x) \tag{6.29}$$

を示せばよい．$x=1$ のときは両辺ともに 0 で正しい．$x$ で正しいときに, $x\,\mathrm{ad}^*(f_i^{(s)})(f_k)$ $(0 \leq s \leq -a_{ik})$ でも正しいことを証明すればよい．

まず $k=j$ のときに示す．$x' = \mathrm{ad}^*(f_i^{(s)})(f_j)$ とおいて

$$\begin{aligned} &r(xx') = r(x)r(x') \\ &= (f_j f_i^{(m)} \otimes {}_{j,mi}r(x) + 1 \otimes x + \cdots) \times (\text{補題 6.4 の右辺}) \end{aligned}$$

を展開して

$$\begin{aligned} &{}_{j,mi}r(xx') \\ &= {}_{j,mi}r(x)x' + q^{(\mathrm{wt}\,x,s\alpha_i+\alpha_j)} \prod_{h=0}^{s-m-1}(1 - q_i^{2h+2(1-m-a_{ij})})q_i^{-s(m-s)}xf_i^{(s-m)} \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} &{}_i\pi \circ {}_{j,mi}r(xx') \\ &= {}_i\pi \circ {}_{j,mi}r(x)x' + q^{(\mathrm{wt}\,x,s\alpha_i+\alpha_j)}q_i^{-s(m-s)} \prod_{h=0}^{s-m-1}(1 - q_i^{2h+2(1-m-a_{ij})})\,{}_i\pi(xf_i^{(s-m)}) \\ &= {}_i\pi \circ {}_{j,mi}r(x)x' + A\,T_i \circ {}_{(s-m)i}r \circ T_i^{-1}(x) \qquad ((6.28)\text{ より}) \end{aligned}$$

となる. ($s<m$ のときは第二項はないと約束する.) ただし

$$\begin{aligned}A=&\ q^{(\mathrm{wt}\,x,s\alpha_i+\alpha_j)}q_i^{-s(m-s)}\prod_{h=0}^{s-m-1}(1-q_i^{2h+2(1-m-a_{ij})})\\&\qquad\qquad\times\frac{(-1)^{s-m}q^{(s-m)(\mathrm{wt}\,x,\alpha_i)}q_i^{-(s-m)(3(s-m)+1)/2}}{(q_i-q_i^{-1})^{s-m}[s-m]_i^!}\\&=q^{(\mathrm{wt}\,x,s\alpha_i+\alpha_j)}q_i^{(s-m)(-a_{ij}-2s)}\begin{bmatrix}-a_{ij}-m\\s-m\end{bmatrix}_i\end{aligned}$$

である.

一方,

$$\begin{aligned}&r(T_i^{-1}(xx'))=r(T_i^{-1}(x))\,r(\mathrm{ad}(f_i^{(-a_{ij}-m)})(f_j))\\&=\Big(1\otimes T_i^{-1}(x)+f_i^{(s-m)}\otimes{}_{(s-m)i}r(T_i^{-1}(x))+f_i^{(-a_{ij}-m)}f_j\otimes{}_{(-a_{ij}-m)i,j}r(T_i^{-1}(x))\\&\qquad+\cdots\Big)\times\Big(\text{補題 6.4 の右辺に }*\otimes*\text{ を適用して成分を入れ替えたもの}\Big)\end{aligned}$$

を展開して ($s\le m$ のときは真ん中の項はないものと約束する),

$$\begin{aligned}&{}_{(-a_{ij}-m)i,j}r\circ T_i^{-1}(xx')\\&={}_{(-a_{ij}-m)i,j}r(x)\,\mathrm{ad}(f_i^{(-a_{ij}-s)})(f_j)\\&\qquad+q^{(\mathrm{wt}\,T_i^{-1}(x)+(s-m)\alpha_i,(-a_{ij}-s)\alpha_i+\alpha_j)}\begin{bmatrix}-a_{ij}-m\\s-m\end{bmatrix}_i{}_{(s-m)i}r(T_i^{-1}(x))\end{aligned}$$

となる. ($s<m$ のときは第二項はないと約束する.) 第二項の $q$ のべきを計算すると

$$(\mathrm{wt}\,x,s\alpha_i+\alpha_j)+(s-m)(-a_{ij}-2s)\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}$$

となるので, 上の計算と比較して(6.29) が $x\,\mathrm{ad}^*(f_i^{(s)})(f_j)$ について示された.

次に $k\neq j$ のときを示す. この場合は, 上よりもずっと簡単で

$$\begin{aligned}{}_{j,mi}r(x\,\mathrm{ad}^*(f_i^{(s)})(f_k))&={}_{j,mi}r(x)\times\mathrm{ad}^*(f_i^{(s)})(f_k),\\{}_{(-a_{ij}-m)i,j}r\circ T_i^{-1}(x\,\mathrm{ad}^*(f_i^{(s)})(f_k))&={}_{(-a_{ij}-m)i,j}r\circ T_i^{-1}(x)\times T_i^{-1}(\mathrm{ad}^*(f_i^{(s)})(f_k))\end{aligned}$$

が成り立ち, 主張はすぐに示される.

## 7. 有限型の $\mathbf{U}_q^-$ に対する標準基底

この節の目的は, 標準基底と呼ばれる $\mathbf{U}_q^-$ の基底を構成することである. §5で定義したPBW基底を用いて作る. しばらくワイル群の最長元 $w_0$ の最短表示 $\mathbf{h} = (i_1, \dots, i_\nu)$ は固定しておく.

7.1. **bar involution の上三角性.** $\mathbf{U}_q$ の bar involution $\overline{\phantom{x}}$ (3.7) を思い出そう. $\mathbf{U}_q^-$ は保たれ,

$$\overline{q} = q^{-1}, \quad \overline{f_i} = f_i.$$

で与えられる.

この節の最初の主結果は次である.

**定理 7.1.** *$\overline{\phantom{x}}$ は, PBW 基底に関して行列表示したとき, 辞書式順序に関して上三角行列で, 対角成分は 1 である.*

ここで辞書式順序は次のように定義される:

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_\nu) < \mathbf{d} = (d_1, \dots, d_\nu)$$
$$\iff \text{ある } p = 0, 1, \dots, \nu \text{ が存在して } c_1 = d_1, \dots, c_{p-1} = d_{p-1},\ c_p < d_p \text{ となる}$$

Lusztig は, Ringel-Hall 代数の構成を幾何学化した. 箙の表現の同型類の代わりに, 箙の表現に対応した線型空間に一般線型群の作用を考え, 同型類を軌道と対応させる. このとき Ringel-Hall 代数は, 群の作用に関して同変な構成可能層の導来圏を使って再構成される. PBW 基底は, 軌道の上の定数層に対応し, bar involution は, Grothendieck-Verdier 双対に対応する. また, 全順序は軌道の包含関係と compatible である. このとき, 上三角性は自明に成立する.

証明の準備のため $\bar{T}_i = \overline{\phantom{x}} \circ T_i \circ \overline{\phantom{x}}$ とおく. また

$$c(m) = q^{-m(m+3)/2}(q - q^{-1})(q^2 - q^{-2}) \cdots (q^m - q^{-m})$$

とおく.

演習問題 7.2.

$$\sum_{m=0}^{j} c(m) q^{m(j-h)} \begin{bmatrix} j \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m+h \\ m \end{bmatrix} = q^{-2j(h+1)}$$

次の補題は, $T_i$ と $\bar{T}_i$ の 'intertwiner' を与える:

**補題 7.3.** *$V$ を $\mathbf{U}_q$ の可積分表現とする. このとき $V$ から $V$ への線型写像 $\Pi$ を*

$$\Pi(v) = \sum_{m \ge 0} \overline{c(m)_i} f_i^{(m)} e_i^{(m)} t_i^m v$$

*で定義する. 和の項は有限個を除き 0 であるので well-defined である. さらに $V$ は定義 3.12 の意味で bar involution $\overline{\phantom{x}}$ を持つとする. すなわち $\mathbb{Q}$-線型写像 $\overline{\phantom{x}} : V \to V$ で $\overline{\overline{x}} = x$, $\overline{(xv)} = (\overline{x})(\overline{v})$ ($x \in \mathbf{U}_q$, $v \in V$) を満たすようなものが定義されているとする.*

(1) *$T_i = \Pi \circ \bar{T}_i$ が成り立つ.*

(2) *$x \in \mathbf{U}_q$, $v \in V$ に対し $T_i(x)\Pi(v) = \Pi(\bar{T}_i(x)v)$ が成り立つ.*

(3) *$v \in V$ が $e_i v = 0$ を満たすとき $T_i(x)v \equiv \bar{T}_i(x)v \mod f_i V$ が成り立つ.*

証明. (1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときに示せばよい. したがって $V = \bigoplus_{m=0}^n f^{(m)} v_0$ で $ev_0 = 0$, $tv_0 = q^n v_0$, $\overline{v_0} = v_0$ であるとしてよい. 命題 4.2 により

$$T(f^{(m)} v_0) = (-1)^{n-m} q^{(n-m)(m+1)} f^{(n-m)} v_0$$

である. 一方

$$\begin{aligned} \Pi \circ \bar{T}_i &= \Pi\left((-1)^{n-m} q^{-(n-m)(m+1)} f^{(n-m)} v_0\right) \\ &= (-1)^{n-m} q^{-(n-m)(m+1)} \sum_{l \ge 0} \overline{c(l)} f^{(l)} e^{(l)} q^{l(2m-n)} f^{(n-m)} v_0 \\ &= (-1)^{n-m} q^{-(n-m)(m+1)} \sum_{l=0}^{n-m} \overline{c(l)} q^{l(2m-n)} \begin{bmatrix} n-m \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m+l \\ l \end{bmatrix} f^{(n-m)} v_0 \end{aligned}$$

であるから, 演習問題 7.2 により主張を得る.

(2) $x \in \mathbf{U}_q$, $v' \in V$ のとき

$$\begin{aligned} T_i(x)\mathit{\Pi} \circ \bar{T}_i(v') &= T_i(x)T_i(v') && ((1) \text{ より}) \\ &= T_i(xv') = \mathit{\Pi} \circ \bar{T}_i(xv') && ((1) \text{ より}) \\ &= \mathit{\Pi}\left(\bar{T}_i(x)\bar{T}_i(v')\right) \end{aligned}$$

であるから, $v = \bar{T}_i(v')$ とおいて結論を得る.

(3) 定義から $\mathit{\Pi}(v) \equiv v \mod f_i V$ に注意する. よって

$$\begin{aligned} T_i(x)v &= T_i(x)\mathit{\Pi} v && (\text{仮定 } e_i v = 0 \text{ より}) \\ &= \mathit{\Pi}(\bar{T}_i(x)v) && ((2) \text{ より}) \\ &\equiv \bar{T}_i(x)v \mod f_i V && (\text{上の注意より}) \end{aligned}$$

と主張が従う. □

支配的ウェイト $\lambda = \sum \lambda_j \Lambda_j \in P_+$ に対して $V = V(\lambda) = \mathbf{U}_q^- / \sum_j f_j^{\lambda_j+1}$ を可積分最高ウェイト表現とするとき, $\mathbf{U}_q^-$ の bar involution が自然に $V$ に誘導され, 命題の仮定の条件を満たすことに注意しよう.

命題 6.20 の直交分解に関する直交射影を

$${}^i\pi \colon \mathbf{U}_q^- \to \mathbf{U}_q^-[i], \qquad \pi^i \colon \mathbf{U}_q^- \to {}^*\mathbf{U}_q^-[i]$$

とする.

**命題 7.4.** $x \in {}^*\mathbf{U}_q^-[i]$ のとき

$$T_i \circ \pi^i(\overline{x}) = {}^i\pi(\overline{T_i(x)})$$

が成立する.

証明. $y = T_i(x) \in \mathbf{U}_q^-[i]$ とおく. $\overline{x} = \pi^i(\overline{x}) + x' f_i$ によって, $x' \in \mathbf{U}_q^-$ を定義する. $V(\lambda)$ を可積分最高ウェイト表現, $v_\lambda$ を最高ウェイト・ベクトルとするとき,

$$\begin{aligned} {}^i\pi(\overline{y})v_\lambda &\equiv \overline{y}v_\lambda = \bar{T}_i(\overline{x})v_\lambda \equiv T_i(\overline{x})v_\lambda && (\text{補題 7.3(3) より}) \\ &= \left(T_i \circ \pi^i(\overline{x}) + T_i(x')(-t_i^{-1}e_i)\right) v_\lambda = T_i \circ \pi^i(\overline{x}) v_\lambda \end{aligned}$$

となる. ただし $\equiv$ は, すべて $\mod f_i V$ で考えた. よって $T_i \circ \pi^i(\overline{x}) - {}^i\pi(\overline{T_i(x)}) \in f_i \mathbf{U}_q^- + \sum_j \mathbf{U}_q^- f_j^{\lambda_j+1}$ である. $\lambda_j$ を十分に大きくとれば, $T_i \circ \pi^i(\overline{x}) - {}^i\pi(\overline{T_i(x)}) \in f_i \mathbf{U}_q^-$ ということになる. ところがこれは, $\mathbf{U}_q^-[i]$ に属しているのだから, 0 でなければならない. □

定理 *7.1* の証明. 主張は

$$\overline{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})} = L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) + \sum_{\mathbf{d} > \mathbf{c}} a_{\mathbf{d}} L(\mathbf{d}, \mathbf{h}), \qquad (a_{\mathbf{d}} \in \mathbb{Q}(q)) \tag{7.5}$$

に他ならない. これを $c_{p+1} = c_{p+2} = \cdots = c_\nu = 0$ となる $p$ に関する帰納法で証明する. $p = 0$ のときは証明することはない. まず $c_1 = 0$ と仮定する. このとき $L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \in \mathbf{U}_q^-[i_1]$ であり, $T_{i_1}^{-1} L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = f_{i_2}^{(c_2)} T_{i_2}(f_{i_3}^{(c_3)}) \cdots \in {}^*\mathbf{U}_q^-[i_1]$ である. したがって上の命題から

$$\overline{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})} = \overline{T_{i_1}\left(f_{i_2}^{(c_2)} T_{i_2}(f_{i_3}^{(c_3)}) \cdots\right)} \equiv T_{i_1} \circ \pi^{i_1}\left(\overline{f_{i_2}^{(c_2)} T_{i_2}(f_{i_3}^{(c_3)}) \cdots}\right) \mod f_{i_1} \mathbf{U}_q^-$$

となる. そこで

$$\mathbf{c}' = (c_2, c_3, \ldots, c_\nu, 0), \qquad \mathbf{h}' = (i_2, i_3, \ldots, i_\nu, \iota(i_1))$$

とおく. ただし $\iota$ は $w_0 \alpha_i = -\alpha_{\iota(i)}$ で定義される $I$ の involution である. ($w_0 = s_{i_2} \cdots s_{i_\nu} s_{\iota(i_1)}$ は最短表示である.) 帰納法の仮定から

$$\overline{L(\mathbf{c}', \mathbf{h}')} = L(\mathbf{c}', \mathbf{h}') + \sum_{\mathbf{d}' > \mathbf{c}'} a_{\mathbf{d}'} L(\mathbf{d}', \mathbf{h}')$$

となる. $\mathbf{d}' = (d_2, d_3, \dots, d_\nu, d_1)$ と表示すると, 命題 5.2 により

$$\begin{aligned}L(\mathbf{d}', \mathbf{h}') &= f_{i_2}^{(d_2)} T_{i_2}(f_{i_3}^{(d_3)}) \cdots (T_{i_2} \cdots T_{i_{\nu-1}})(f_{i_\nu}^{(d_\nu)}) \times (T_{i_2} \cdots T_{i_{\nu-1}} T_{i_\nu})(f_j^{(d_1)}) \\ &= f_{i_2}^{(d_2)} T_{i_2}(f_{i_3}^{(d_3)}) \cdots (T_{i_2} \cdots T_{i_{\nu-1}})(f_{i_\nu}^{(d_\nu)}) \times f_{i_1}^{(d_1)}\end{aligned}$$

である. したがって $d_1 \neq 0$ ならば $L(\mathbf{d}', \mathbf{h}') \in \mathbf{U}_q^- f_{i_1}$ で, $\pi^{i_1} L(\mathbf{d}', \mathbf{h}') = 0$ となる. また $d_1 = 0$ ならば $L(\mathbf{d}', \mathbf{h}') \in {}^*\mathbf{U}_q^-[i]$ であるから, $\pi^{i_1} L(\mathbf{d}', \mathbf{h}') = L(\mathbf{d}', \mathbf{h}')$ となる. よって

$$\overline{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})} \equiv T_{i_1} L(\mathbf{c}', \mathbf{h}') + \sum_{\substack{\mathbf{d}' > \mathbf{c}' \\ d_1 = 0}} a_{\mathbf{d}'} T_{i_1} L(\mathbf{d}', \mathbf{h}') \bmod f_{i_1} \mathbf{U}_q^-$$

となる. $\mathbf{d}' = (d_2, d_3, \dots, d_\nu, 0)$ にたいして $\mathbf{d} = (0, d_2, d_3, \dots, d_\nu)$ とおくと, $T_{i_1} L(\mathbf{d}', \mathbf{h}') = L(\mathbf{d}, \mathbf{h})$ であり, また $\mathbf{d}' > \mathbf{c}'$ は $\mathbf{d} > \mathbf{c}$ と同値である. したがって上の式の右辺は

$$L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) + \sum_{\substack{\mathbf{d} > \mathbf{c} \\ d_1 = 0}} a_{\mathbf{d}'} L(\mathbf{d}, \mathbf{h})$$

とおきかえられる. $f_{i_1} \mathbf{U}_q^-$ の部分は $L(\mathbf{d}, \mathbf{h})$ で $d_1 > 0$ となるものの一次結合で書ける. この $\mathbf{d}$ は $\mathbf{c}$ よりも辞書式順序で大きい. 結局(7.5) が成り立つことが分かった.

次に $c_1 > 0$ とする. $\mathbf{c}'$ を $c_1$ を 0 で置き換えてできるベクトルとすると, $L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = f_{i_1}^{(c_1)} L(\mathbf{c}', \mathbf{h})$ となる. $L(\mathbf{c}', \mathbf{h})$ については主張が成立しているから

$$\overline{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})} = f_{i_1}^{(c_1)} \overline{L(\mathbf{c}', \mathbf{h})} = L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) + f_{i_1}^{(c_1)} \sum_{\mathbf{d}' > \mathbf{c}'} a_{\mathbf{d}'} L(\mathbf{d}', \mathbf{h})$$

となる. $\mathbf{d}'$ に対して $\mathbf{d}$ を $d_1'$ を $c_1$ だけ増やしたベクトルとすれば, $\mathbf{d} > \mathbf{c}$ となるから, (7.5) がやはり成り立つ. □

7.2. **標準基底の定義.** さて, PBW 基底は ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^-$ の $\mathbf{A}$-基底であったから, $\bar{\ }$ の表現行列の成分は, $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[q_s, q_s^{-1}]$ に属する. 次の定理の証明には, これ (もしくは成分が $\mathbb{Q}[q_s, q_s^{-1}]$ に入ることでもよい) が必要である. アファインのときには, 対応する性質の証明が未解決なので, この点を強調した.

**定理 7.6.** 次を満たす $\{b(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \mid \mathbf{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^\nu\}$ がただ一つ存在する.

$$\begin{aligned}&\overline{b(\mathbf{c}, \mathbf{h})} = b(\mathbf{c}, \mathbf{h}), \\ &L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = b(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + \sum_{\mathbf{d} > \mathbf{c}} a_{\mathbf{d}} b(\mathbf{d}, \mathbf{h}), \qquad (a_{\mathbf{d}} \in q_s \mathbb{Z}[q_s])\end{aligned}$$

証明. 各ウェイト空間ごとに構成する. $\mathbf{c}$ について辞書式順序 $>$ に関する上からの帰納法で証明する. 各ウェイト空間に有限個の $\mathbf{c}$ しか関係しないから, $\mathbf{c}$ よりも大きい $\mathbf{d}$ については $b(\mathbf{d}, \mathbf{h})$ がすでに構成されているとしてよい. 定理 7.1 より

$$L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) - \overline{L(\mathbf{c}, \mathbf{h})} = \sum_{\mathbf{d} > \mathbf{c}} b_{\mathbf{d}} L(\mathbf{d}, \mathbf{h}) = \sum_{\mathbf{d} > \mathbf{c}} p_{\mathbf{d}} b(\mathbf{d}, \mathbf{h})$$

である. ただし二番目の等号では, 帰納法の仮定を用いた. 左辺に $\bar{\ }$ を適用すると, $-1$ 倍される. $\overline{b(\mathbf{d}, \mathbf{h})} = b(\mathbf{d}, \mathbf{h})$ であるから $\sum_{\mathbf{d} > \mathbf{c}} (p_{\mathbf{d}} + \overline{p_{\mathbf{d}}}) b(\mathbf{d}, \mathbf{h}) = 0$ である. ところが上の条件から $\{b(\mathbf{d}, \mathbf{h})\}$ は一次独立であるから $p_{\mathbf{d}} + \overline{p_{\mathbf{d}}} = 0$ である. $q_s$ のべきの係数を考えると

$$p_{\mathbf{d}} = \cdots - a_2 q_s^{-2} - a_1 q_s^{-1} + a_1 q_s + a_2 q_s^2 + \cdots, \qquad a_i \in \mathbb{Z}$$

と定数項を中心に反対称になっているということである. そこで $a_{\mathbf{d}} = a_1 q_s + a_2 q_s^2 + \cdots$ とおくと,

$$a_{\mathbf{d}} \in q_s \mathbb{Z}[q_s], \qquad p_{\mathbf{d}} = a_{\mathbf{d}} - \overline{a_{\mathbf{d}}}$$

となる．実際, $a_{\mathbf{d}}$ はこの条件からただ一つに定まる．このとき $b(\mathbf{c},\mathbf{h}) = L(\mathbf{c},\mathbf{h}) - \sum_{\mathbf{d}} a_{\mathbf{d}} b(\mathbf{d},\mathbf{h})$ とおくと

$$\begin{aligned}\overline{b(\mathbf{c},\mathbf{h})} &= \overline{L(\mathbf{c},\mathbf{h})} - \sum_{\mathbf{d}} \overline{a_{\mathbf{d}}} b(\mathbf{d},\mathbf{h}) \\ &= L(\mathbf{c},\mathbf{h}) - \sum_{\mathbf{d}} (p_{\mathbf{d}} + \overline{a_{\mathbf{d}}}) b(\mathbf{d},\mathbf{h}) = b(\mathbf{c},\mathbf{h})\end{aligned}$$

と上の条件が満たされる．作り方から下の条件も満たされる．一意性も途中に注意したことから明らかであろう． □

このようにしてできた ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^-$ の $\mathbb{Z}[q_s, q_s^{-1}]$ 加群としての基底 $\{b(\mathbf{c},\mathbf{h})\}$ を**標準基底**と呼ぶ．

Lusztig による幾何学的構成では, 標準基底は軌道に対応した交叉コホモロジー複体に対応する．bar involution で不変なことは, 交叉コホモロジーでポアンカレ双対性が成り立つということに他ならない．また PBW 基底との変換行列の上三角性は, 交叉ホモロジーの定義に他ならない．

$ADE$ 型のときは, 命題 5.12(2) と命題 5.13 によって, $\{b(\mathbf{c},\mathbf{h})\}$ は, $\mathbf{h}$ の取り方によらない．ただし, $\mathbf{c}$ は $\mathbf{h}$ によって変わるので, 標準基底のパラメトリゼーションが変わると考えるとよい．$BCFG$ 型のときに同じ主張を証明するのはあきらめ, $\{\pm b(\mathbf{c},\mathbf{h})\}$ が $\mathbf{h}$ によらないことを §6 で定義された双線型形式 ( , ) を用いて示そう．

**定理 7.7.** 標準基底 $\{b(\mathbf{c},\mathbf{h})\}$ は, 概正規直交基底である．すなわち $(b(\mathbf{c},\mathbf{h}), b(\mathbf{d},\mathbf{h})) - \delta_{\mathbf{c},\mathbf{d}} \in q_s\mathbf{A}_0$ が成り立つ．

これは, PBW 基底 $\{L(\mathbf{c},\mathbf{h})\}$ が概正規直交基底であることと, 基底の変換行列が対角成分が 1 の上三角行列で, 対角成分以外が $q_s\mathbb{Z}[q_s]$ に入ることから明らかである．

**定理 7.8.** $x \in {}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^-$ が $(x,x) - 1 \in q_s\mathbf{A}_0$, $\overline{x} = x$ を満たすと, ある $\mathbf{c}$ が存在して $x = \pm b(\mathbf{c},\mathbf{h})$ となる．

証明．命題 6.23 の証明と同様にすればよい．$x = \sum a_{\mathbf{c}} b(\mathbf{c},\mathbf{h})$ と表わすと $a_{\mathbf{c}} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{A}_0 \cap \overline{\mathbf{A}_0} \cong \mathbb{Z}$ で $(x,x) - 1 \in q_s\mathbf{A}_0$ から, ある一つの $a_{\mathbf{c}}$ が $\pm 1$ で, 他の $a_{\mathbf{d}}$ はすべて 0 である． □

つまり標準基底は符号を無視すれば最短表示の取り方 $\mathbf{h}$ に依存しない．

$$\widetilde{\mathcal{B}}(\infty) = \{\pm b(\mathbf{c},\mathbf{h}) \mid \mathbf{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\nu}\}$$

とおく．また, $ADE$ 型のときには, $\mathcal{B}(\infty) = \{b(\mathbf{c},\mathbf{h})\}$ とおく．これも $\mathbf{h}$ の取り方に依存しない．上の特徴づけと補題 6.9 から $\widetilde{\mathcal{B}}(\infty)$ は $*$ で不変であることを注意しておこう．また, 次の補題から, $ADE$ 型のときは, $\mathcal{B}(\infty)$ も $*$ で保たれることが従う．

**補題 7.9.** $\mathbf{h} = (i_1, \dots, i_\nu)$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_\nu)$ に対して,

$$\mathbf{h}^* = (\iota(i_\nu), \iota(i_{\nu-1}), \dots, \iota(i_1)), \qquad \mathbf{c}^* \overset{\text{def.}}{=} (c_\nu, c_{\nu-1}, \dots, c_1)$$

と定める．ただし, ここで $\iota$ は $w_0(\alpha_i) = -\alpha_{\iota(i)}$ で定義される $I$ の *involution* である．このとき次が成り立つ．

$$L(\mathbf{c},\mathbf{h})^* = L(\mathbf{c}^*, \mathbf{h}^*)$$

証明．$w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_\nu}$ から,

$$s_{i_{p-1}} s_{i_{p-2}} \cdots s_{i_1} s_{\iota(i_\nu)} s_{\iota(i_{\nu-1})} \cdots s_{\iota(i_p)} = w_0$$

である．したがって命題 5.2 により

$$T_{i_{p-1}} T_{i_{p-2}} \cdots T_{i_1} T_{\iota(i_\nu)} T_{\iota(i_{\nu-1})} \cdots T_{\iota(i_{p+1})} (f_{\iota(i_p)}) = f_{i_p}$$

である．よって,

$$T_{\iota(i_\nu)} T_{\iota(i_{\nu-1})} \cdots T_{\iota(i_{p+1})} (f_{\iota(i_p)}) = T_{i_1}^{-1} T_{i_2}^{-1} \cdots T_{i_{p-1}}^{-1} (f_{i_p})$$

であり, 命題 4.18 により結論が示される． □

$BCDEFG$ のときは, $B_2$, $G_2$ について命題 5.12 がチェックできれば, $\mathcal{B}(\infty) = \{b(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$ が, $\mathbf{h}$ の取り方に依存しないことが分かって, 同じことが言える. すでに言ったように, この事実は $G_2$ 型のときは柏原の構成を使ってしか今のところ証明されていない.

$\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ を $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \mid \mathbf{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\nu}\}$ で生成される $\mathbf{A} \cap \mathbf{A}_0 = \mathbb{Z}[q_s]$-加群とする. 上の結果により, これは $\mathbf{h}$ の取り方には依存しない. 標準基底の定義から次の結果は明らかである.

**定理 7.10.** 自然な射影

$$\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty) \cap \overline{\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)} \to \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)/q_s\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$$

は $\mathbb{Z}$-加群の同型であり, $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)/q_s\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ の基底 $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \bmod q_s\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)\}$ を引き戻したものが $\{b(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$ である.

このようにして定義された

$$\widetilde{\mathcal{B}}(\infty) \bmod q_s\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty) = \{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \bmod q_s\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)\} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)/q_s\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$$

を**結晶基底**という. ただし, ここでは符号の umbiguity が残されている. 以下では, 紛れのない限り $\widetilde{\mathcal{B}}(\infty) \bmod q_s\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ は単に $\widetilde{\mathcal{B}}(\infty)$ で表す.

7.3. **標準基底と既約表現.** 次に標準基底が, 最高ウェイト有限次元表現 $V(\lambda)$ の基底に落ちることを見よう.

$b \in \widetilde{\mathcal{B}}(\infty)$ に対し, $\varepsilon_i(b)$, $\varepsilon_i^*(b) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$b \in f_i^{\varepsilon_i(b)}\mathbf{U}_q^- \setminus f_i^{\varepsilon_i(b)+1}\mathbf{U}_q^-, \qquad \varepsilon_i^*(b) = \varepsilon_i(b^*)$$

によって定義する. $w_0$ の最短表示 $\mathbf{h}$ を $i_1 = i$ となるように取ると, $b = \pm b(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ のとき, $\varepsilon_i(b) = c_1$ と与えられる. 実際,

$$b(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) + \sum_{\mathbf{d} > \mathbf{c}} b_{\mathbf{d}} L(\mathbf{d}, \mathbf{h}),$$
$$L(\mathbf{d}, \mathbf{h}) \in f_i^{d_1}\mathbf{U}_q^- \setminus f_i^{d_1+1}\mathbf{U}_q^-$$

と, 順序 $>$ の定め方から $d_1 \geq c_1$ であるから, これは正しい. $c_1$ は最短表示 $\mathbf{h}$ の取り方によって決まるが, 対応する標準基底の元 $b(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ に移ると, それは $\mathbf{h}$ によらないように定義が可能というわけである.

**定理 7.11.** (1) $\{b \in \widetilde{\mathcal{B}}(\infty) \mid \varepsilon_i(b) \geq n\}$ は $f_i^n\mathbf{U}_q^-$ の *signed base* である.

(2) $\{b \in \widetilde{\mathcal{B}}(\infty) \mid \varepsilon_i^*(b) \geq n\}$ は $\mathbf{U}_q^- f_i^n$ の *signed base* である.

(3) $\lambda$ を支配的ウェイトとするとき,

$$\widetilde{\mathcal{B}}(\lambda) \stackrel{\text{def.}}{=} \left\{ b \bmod \sum_i f_i^{\langle \lambda, h_i \rangle + 1} \,\middle|\, \varepsilon_i^*(b) \leq \langle \lambda, h_i \rangle \textit{ for all } i \in I \right\}$$

は $V(\lambda)$ の *signed base* になる.

$\mathfrak{g}$ が $ADE$ 型のときには, $\mathcal{B}(\lambda)$ を同様に定義して, 同じ主張が正しい.

証明. $i_1 = i$ となるような $w_0$ の最短表示 $\mathbf{h}$ を取ると $b = \pm b(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ のとき $\varepsilon_i(b) = c_1$ であった. 一方, $\{L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \mid c_1 \geq n\}$ が $f_i^n\mathbf{U}_q^-$ の基底になることは明らかである. よって PBW 基底と標準基底の変換行列の三角性より (1) が従う.

(2) は, (1) に $*$ を適用すればよい.

(3) は, (2) より正しい. □

(3) の結果により, 標準基底が, すべての有限次元最高ウェイト表現に 'compatible な' 基底になっていることが証明された.

**定理 7.12.** $b \in \widetilde{\mathcal{B}}(\infty)$ で $\varepsilon_i(b) = 0$ とする．このとき

$$f_i^{(n)} b \equiv b' \mod f_i^{n+1}\mathbf{U}_q^-$$

となる $b' \in \widetilde{\mathcal{B}}(\infty)$ がただ一つ存在する．この元は $\varepsilon_i(b') = n$ を満たす．さらにこの対応

$$\{b \in \widetilde{\mathcal{B}}(\infty) \mid \varepsilon_i(b) = 0\} \longrightarrow \{b' \in \widetilde{\mathcal{B}}(\infty) \mid \varepsilon_i(b') = n\}$$

は全単射である．

証明. $i_1 = i$ から始まる $w_0$ の最短表示 $\mathbf{h}$ を取り，固定する．$\pm b = b(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ と表わし，対応するPBW 基底の元 $L(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ を考える．このとき

$$\begin{aligned} f_i^{(n)} b(\mathbf{c}, \mathbf{h}) &= f_i^{(n)} \left[ L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) + \sum_{\mathbf{d} > \mathbf{c}} a_{\mathbf{d}} L(\mathbf{d}, \mathbf{h}) \right] = L(\mathbf{c}', \mathbf{h}) + \sum_{\mathbf{d} > \mathbf{c}} a_{\mathbf{d}} \begin{bmatrix} d_1 + n \\ n \end{bmatrix}_i L(\mathbf{d}', \mathbf{h}) \\ &= L(\mathbf{c}', \mathbf{h}) + \sum_{\mathbf{d} > \mathbf{c}} a_{\mathbf{d}} L(\mathbf{d}', \mathbf{h}) + \sum_{d_1 > 0} a_{\mathbf{d}} \left( \begin{bmatrix} d_1 + n \\ n \end{bmatrix}_i - 1 \right) L(\mathbf{d}', \mathbf{h}) \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$\mathbf{c}' = \mathbf{c} + (n, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{d}' = \mathbf{d} + (n, 0, \dots, 0)$ であり，最後の和は，$d_1 = 0$ となる項が 0 になることから，$\mathbf{d} > \mathbf{c}$ から $d_1 > 0$ に置き換えられた．右辺の最後の項を $y$ とし，標準基底で $y = \sum_{\mathbf{e}} c_{\mathbf{e}} b(\mathbf{e}, \mathbf{h})$ と表わす．上三角性より $e_1 > n$ であることに注意する．$c_{\mathbf{e}} = c_{\mathbf{e}}^+ + c_{\mathbf{e}}^0 + c_{\mathbf{e}}^-$ と $q_s\mathbb{Z}[q_s]$, $\mathbb{Z}$, $q_s^{-1}\mathbb{Z}[q_s^{-1}]$ に分けると，

$$f_i^{(n)} b(\mathbf{c}, \mathbf{h}) - \sum_{e_1 > n} \left( c_{\mathbf{e}}^0 + c_{\mathbf{e}}^- + \overline{c_{\mathbf{e}}^-} \right) b(\mathbf{e}, \mathbf{h}) = L(\mathbf{c}', \mathbf{h}) + \sum_{\mathbf{d} > \mathbf{c}} a_{\mathbf{d}} L(\mathbf{d}', \mathbf{h}) + \sum_{e_1 > n} \left( c_{\mathbf{e}}^+ - \overline{c_{\mathbf{e}}^-} \right) b(\mathbf{e}, \mathbf{h})$$

となり，左辺は $\overline{\phantom{x}}$ 不変で，右辺は $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ に属していて $q_s\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ に落とすと $b(\mathbf{c}', \mathbf{h}) \mod q_s\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ である．よって，この元は $b(\mathbf{c}', \mathbf{h})$ に他ならない．したがって

$$f_i^{(n)} b(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = b(\mathbf{c}', \mathbf{h}) + \sum_{e_1 > n} \left( c_{\mathbf{e}}^0 + c_{\mathbf{e}}^- + \overline{c_{\mathbf{e}}^-} \right) b(\mathbf{e}, \mathbf{h})$$

であり，$e_1 > n$ となる $b(\mathbf{e}, \mathbf{h})$ は $f_i^{n+1}\mathbf{U}_q^-$ に属するから第一の主張が示された．

第二の主張は，$\mathbf{c} \leftrightarrow \mathbf{c}' = \mathbf{c} + (n, 0, \dots, 0)$ が一対一対応であることの帰結である． □

上の全単射を合成して

$$\{b \in \widetilde{\mathcal{B}}(\infty) \mid \varepsilon_i(b) = n\} \xrightarrow{\cong} \{b' \in \widetilde{\mathcal{B}}(\infty) \mid \varepsilon_i(b') = 0\} \xrightarrow{\cong} \{b' \in \widetilde{\mathcal{B}}(\infty) \mid \varepsilon_i(b') = n+1\}$$

を $\widetilde{f}_i$ と定義する．逆写像を $\widetilde{e}_i$ と定義する．ただし $\varepsilon_i(b) = 0$ のときには，$\widetilde{e}_i(b) = 0$ と約束する．この約束により定義された写像 $\widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i \colon \widetilde{\mathcal{B}}(\infty) \to \widetilde{\mathcal{B}}(\infty) \sqcup \{0\}$ を**柏原作用素**という．

**定理 7.13.** 任意の元 $b \in \widetilde{\mathcal{B}}(\infty)$ は，$\widetilde{e}_i$ をつぎつぎに作用させることにより，$\pm 1$ まで持っていける．

証明. $b \neq \pm 1$ として構わない．補題 6.14 より，ある $i \in I$ が存在して $b \notin \operatorname{Ker}{}_i r$ である．このとき $i$ から始まる最短表示 $\mathbf{h}$ をとれば，$b = \pm L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) \mod q_s\mathcal{L}(\infty)$ で，$c_1 \neq 0$ である．$\widetilde{e}_i$ を作用させて，$c_1 = 0$ まで減らすことができる．これを繰り返すとウェイトがだんだん大きくなっていくことから，最後にはウェイト 0 となって，$\pm 1$ に行き着いて終わる． □

逆に言うと，$\widetilde{\mathcal{B}}(\infty) = \{\pm \widetilde{f}_{i_1} \cdots \widetilde{f}_{i_N} 1\}$ が分かった．

$i$ から始まる $w_0$ の最短表示 $\mathbf{h}$ を取ったとき，$b = \pm b(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ に対しては，柏原作用素は単に $\mathbf{c}$ の第一成分を $\pm 1$ するものである．したがって，$i$ と異なる柏原作用素 $\widetilde{e}_j$, $\widetilde{f}_j$ を計算するには，対応 $b(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = \pm b(\mathbf{c}', \mathbf{h}')$ によって $j$ で始まる最短表示 $\mathbf{h}'$ に移り，$\mathbf{c}'$ の第一成分に $\pm 1$ して，そしてもとの $\mathbf{h}$ に戻る，という操作を行えばいいことになる．

しかし，これは「言うは易し，行うは難し」であって，実際にこの操作を explicit に書くには，新たな研究が必要である．

[1] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Tensor product multiplicites, canonical bases and totally positive varieties*, Invent. Math. **143** (2001), 77-128.

という論文があることだけ書いておいて, これ以上はいわない.

また支配的ウェイト $\lambda$ に対して, $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ を $\widetilde{\mathcal{B}}(\lambda)$ に制限し, $\widetilde{\mathcal{B}}(\lambda)$ の外に出るときは 0 と約束することによって, 写像 $\widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i \colon \widetilde{\mathcal{B}}(\lambda) \to \widetilde{\mathcal{B}}(\lambda) \sqcup \{0\}$ を定義する. (実際には, $L(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ を考えれば容易に分かるように, $\widetilde{e}_i$ で外に出ることはない.) 既約表現 $V(\lambda)$ の**柏原作用素**という.

このとき

$$\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \mathrm{wt}(b) \rangle$$

とおく. 定義と $\mathfrak{sl}_2$ の表現論から次が成立する.

$$\varepsilon_i(b) = \max\{n \mid \widetilde{e}_i^n b \neq 0\}, \quad \varphi_i(b) = \max\{n \mid \widetilde{f}_i^n b \neq 0\}. \tag{7.14}$$

## 8. 結晶構造

この節では, 柏原による $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ の定義を紹介する.

**8.1. 柏原による定義.** 定理 6.17 の直和分解によって $x \in \mathbf{U}_q^-$ を次のように表わす:

$$x = \sum_{n\geq 0} f_i^{(n)} x_n$$

このとき

$$\widetilde{f}_i(x) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{n\geq 0} f_i^{(n+1)} x_n, \qquad \widetilde{e}_i(x) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{n>0} f_i^{(n-1)} x_n$$

によって $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ を定義する. この定義には PBW 基底は必要ないことに注意する.

$i$ から始まる $w_0$ の最短表示 $\mathbf{h}$ を取り, PBW 基底の元

$$L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = f_i^{(c_1)} T_i(f_{i_2}^{(c_2)}) \cdots$$

を考える. これは, $f_i^{(c_1)} \mathbf{U}_q^-[i]$ に属する. よって

$$\widetilde{f}_i L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = L(\mathbf{c} + (1, 0, \dots, 0), \mathbf{h}), \qquad \widetilde{e}_i L(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & c_1 = 0 \text{ のとき} \\ L(\mathbf{c} - (1, 0, \dots, 0), \mathbf{h}) & c_1 > 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

が成立する.

このとき次は明らかであろう.

**定理 8.1.** (1) $\mathcal{L}(\infty)$ は, $\widetilde{f}_{i_1} \cdots \widetilde{f}_{i_N} 1$ で生成される $\mathbf{A}_0$-加群である.

(2) $\widetilde{\mathcal{B}}(\infty) = \{\pm \widetilde{f}_{i_1} \cdots \widetilde{f}_{i_N} 1 \bmod q_s \mathcal{L}(\infty)\} \subset \mathcal{L}(\infty)/q_s\mathcal{L}(\infty)$ が成立する. *($ADE$ 型のとき, $\pm$ をはずして正しい.)*

(3) $\widetilde{e}_i$ も, $\mathcal{L}(\infty)/q_s\mathcal{L}(\infty)$ の作用素として $\mathcal{B}(\infty)$ を保ち, $\widetilde{e}_i \widetilde{f}_i b = b$ が成り立つ.

(4) $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ は, 前節で構成されたものに一致する.

この定理の主張自体は, PBW 基底とは無関係であることに注意しよう. 柏原は, 上の結果を任意の対称化可能なカッツ・ムーディー・リー環について次のように証明した:

$$\mathcal{L}(\infty) \overset{\text{def.}}{=} \sum \mathbf{A}_0 \widetilde{f}_{i_1} \cdots \widetilde{f}_{i_N} 1,$$
$$\mathcal{B}(\infty) \overset{\text{def.}}{=} \{\widetilde{f}_{i_1} \cdots \widetilde{f}_{i_N} 1 \bmod q_s \mathcal{L}(\infty)\}$$

とおくときに, 次を示した.

- $\mathcal{L}(\infty) \otimes_{\mathbf{A}_0} \mathbb{Q}(q_s) \cong \mathbf{U}_q^-$ である.
- $\mathcal{B}(\infty)$ は, $\mathcal{L}(\infty)/q_s\mathcal{L}(\infty)$ の $\mathbb{Q}$-ベクトル空間としての基底である.
- $\widetilde{e}_i \colon \mathcal{B}(\infty) \to \mathcal{B}(\infty) \sqcup \{0\}$, $\widetilde{f}_i \colon \mathcal{B}(\infty) \to \mathcal{B}(\infty)$ が成り立つ. (後者は明らか)
- $\widetilde{e}_i \widetilde{f}_i = 1$.

同じ主張は, $\mathbf{A}_0$ を $\mathbf{A}_0 \cap \mathbf{A} = \mathbb{Z}[q_s]$ で置き換えても成立する. このとき対応する $\mathbb{Z}[q_s]$-加群を $\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ で表す.

また, 次も証明された.

**定理 8.2.** $*$ で $\mathcal{B}(\infty)$ は保たれる.

$B_2$, $G_2$ 型のときに, この性質を用いると, $w_0$ の二つの最短表示 $\mathbf{h}$, $\mathbf{h}'$ において $L(\mathbf{c}, \mathbf{h})^* = L(\mathbf{c}', \mathbf{h}')$ となることから, sign の umbiguity が消えて $b(\mathbf{c}, \mathbf{h}) = b(\mathbf{c}', \mathbf{h}')$ が従う. よって命題 5.12 が, この場合にも正しい. したがって命題 5.13 により, すべての有限型のときに $\{b(\mathbf{c}, \mathbf{h})\}$ が $\mathbf{h}$ の取り方によらないことも従う.

有限型のとき ($ADE$ 型でないときだけが問題) は, $\mathcal{B}(\infty)$ が PBW 基底から作られる $\{b(\mathbf{c},\mathbf{h})\}$ に一致することが, [Saito:1994] によって示された. ただし証明には, 上と同様に結晶基底の存在を用いているので, $\mathbf{h}$ の取り方によらないことを直接示しているわけではない.

柏原は, このように $q_s = 0$ における結晶基底をまず構成し, 次に

- 射影 ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^- \cap \mathcal{L}(\infty) \cap \overline{\mathcal{L}(\infty)} \to \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)/q_s\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}(\infty)$ は同型である

ことを証明し, **大域結晶基底**を結晶基底の逆像として定義した.

以下では, これらの事実を認めることにして, またアファイン・リー環のときにも同じことが成立することを用いることとする.

可積分表現についても, 上の $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ と同様の作用素を定義することができる. 実際 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときの表現論から, $M$ を可積分表現とするときに

$$M = \bigoplus_{0 \le n \le \langle h_i, \xi \rangle} f_i^{(n)} (\operatorname{Ker} e_i \cap M_\xi)$$

と書けるので, この分解を定理 6.17 の分解の代わりに使って定義する. $V(\lambda)$ を既約最高ウェイト表現とするとき, $\pi_\lambda \colon \mathbf{U}_q^- \to V(\lambda)$ と compatible な $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ が存在することが示された. これは上と同様の性質を持つ. 違う点は $\widetilde{f}_i(b) = 0$ となることがありうること, $b' = \widetilde{f}_i b \iff \widetilde{e}_i b' = b$ が, $b$, $b' \neq 0$ という仮定のもとでしか成立しないことである. ただし, $\mathcal{B}(\infty)$ の $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ と $\mathcal{B}(\lambda)$ の $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ が compatible であることは, 必ずしも自明ではなく, これ自体も結晶基底の存在の途中で証明される主張である.

また, 上の $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ は任意の可積分表現について適用できることを注意しておく. あとで使う次の事実を注意しておく.

**補題 8.3.** *$\varphi \colon M \to M'$ が $\mathbf{U}_q$-加群の準同型のとき, $\varphi$ は $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ と可換である.*

証明. $x \in M$ を $x = \sum f_i^{(n)} x_n$ $(e_i x_n = 0)$ と分解する. このとき $\widetilde{f}_i(x) = \sum f_i^{(n+1)} x_n$ であった. 一方, $\psi(x) = \sum f_i^{(n)} \psi(x_n)$ であって, $e_i \psi(x_n) = \psi(e_i x_n) = 0$ であるから, $\widetilde{f}_i \psi(x) = \sum f_i^{(n+1)} \psi(x_n) = \psi(\widetilde{f}_i x)$ である. □

柏原の証明の途中で大切な役割を果たすのが, 次のテンソル積の結晶基底である.

**定理 8.4.** *$M_1$, $M_2$ を可積分な $\mathbf{U}_q$ の表現とし, それぞれ上の性質を持つ結晶基底 $(\mathcal{L}_a, \mathcal{B}_a)$ $(a = 1, 2)$ を持つとする. $\varphi_i$, $\varepsilon_i$ を (7.14) によって定義する. このとき $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes_{\mathbf{A}_0} \mathcal{L}_2$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ とおくと, $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ は次の $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ によって, $M_1 \otimes M_2$ の結晶基底となる.*

$$\operatorname{wt}(b_1 \otimes b_2) = \operatorname{wt}(b_1) + \operatorname{wt}(b_2),$$

$$\widetilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \widetilde{e}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \ge \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \widetilde{e}_i b_2 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$\widetilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \widetilde{f}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \widetilde{f}_i b_2 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

*ここで $(b_1, b_2)$ を $b_1 \otimes b_2$ で表わし, $0 \otimes b_2$, $b_1 \otimes 0$ は $0$ であると解釈する. またこのとき次が成り立つ.*

$$\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - \operatorname{wt}_i(b_1)),$$
$$\varphi_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varphi_i(b_2), \varphi_i(b_1) + \operatorname{wt}_i(b_2)).$$

証明は, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときに確かめればよく, またそのときは明らかである.

## 8.2. **結晶の公理化.** 結晶基底の組み合わせ論的な性質を抽象化し, 結晶の定義を与える.

**定義 8.5.** §3.1 の意味のルート・データを固定する. 結晶 $\mathcal{B}$ とは, 集合 $\mathcal{B}$ と次の写像 $\operatorname{wt} \colon \mathcal{B} \to P$, $\varepsilon_i, \varphi_i \colon \mathcal{B} \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$, $\widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i \colon \mathcal{B} \to \mathcal{B} \sqcup \{0\}$ $(i \in I)$ の組で次の性質を満たすもののことをいう:

(8.6a) $\qquad \varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \operatorname{wt}(b) \rangle,$

(8.6b) $\mathrm{wt}(\widetilde{e}_i b) = \mathrm{wt}(b) + \alpha_i,\ \varepsilon_i(\widetilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1,\ \varphi_i(\widetilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1, \quad \text{if } \widetilde{e}_i b \in \mathcal{B},$

(8.6c) $\mathrm{wt}(\widetilde{f}_i b) = \mathrm{wt}(b) - \alpha_i,\ \varepsilon_i(\widetilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1,\ \varphi_i(\widetilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1, \quad \text{if } \widetilde{f}_i b \in \mathcal{B},$

(8.6d) $b' = \widetilde{f}_i b \Longleftrightarrow b = \widetilde{e}_i b' \quad \text{for } b,\, b' \in \mathcal{B},$

(8.6e) $\text{if } \varphi_i(b) = -\infty \text{ for } b \in \mathcal{B}, \text{ then } \widetilde{e}_i b = \widetilde{f}_i b = 0$

以後, $\widetilde{e}_i(0) = 0 = \widetilde{f}_i(0)$ と約束しておく.

**例 8.7.** (1) $\mathbf{U}_q^-$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\infty)$. ただし $\varphi_i(b)$ は, (8.6a) によって定義する.
(2) 支配的ウェイト $\lambda \in P^+$ に対する既約最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ の結晶基底
(3) 各 $i \in I$ に対して, 結晶 $\mathcal{B}_k$ を次で定義する:

$$\begin{gathered}\mathcal{B}_i = \{b_i(n) \mid n \in \mathbb{Z}\},\\ \mathrm{wt}(b_i(n)) = n\alpha_i, \quad \varphi_i(b_i(n)) = n, \quad \varepsilon_i(b_i(n)) = -n,\\ \varphi_j(b_i(n)) = \varepsilon_j(b_i(n)) = -\infty \quad (j \neq i),\\ \widetilde{e}_i(b_i(n)) = b_i(n+1), \quad \widetilde{f}_i(b_i(n)) = b_i(n-1),\\ \widetilde{e}_j(b_i(n)) = \widetilde{f}_j(b_i(n)) = 0 \quad (j \neq i).\end{gathered}$$

(4) ウェイト $\lambda \in P$ に対して, 結晶 $T_\lambda$ を次で定義する:

$$\begin{gathered}T_\lambda = \{t_\lambda\},\\ \mathrm{wt}(t_\lambda) = \lambda, \quad \varphi_i(t_\lambda) = \varepsilon_i(t_\lambda) = -\infty,\\ \widetilde{e}_i(t_\lambda) = \widetilde{f}_i(t_\lambda) = 0.\end{gathered}$$

(5) $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ を結晶とするとき, 定理 8.4 の規則で $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ に柏原作用素を定義すると, 結晶の公理を満たす. これを $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ の**テンソル積**といい, $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ で表わす.

演習問題 8.8. $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2) \otimes \mathcal{B}_3 \cong \mathcal{B}_1 \otimes (\mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3)$ を示せ. 以後, これを $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3$ で表わす.

(結晶の)**morphism** $\Psi\colon \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ とは, 写像 $\Psi\colon \mathcal{B}_1 \sqcup \{0\} \to \mathcal{B}_2 \sqcup \{0\}$ であって

- $\psi(0) = 0$
- $\psi$ は, wt, $\varepsilon_i$, $\varphi_i$ と可換
- $b$, $b' \in \mathcal{B}_1$, $\Psi(b)$, $\Psi(b') \in \mathcal{B}_2$ で $\widetilde{f}_i b = b'$ のとき, $\widetilde{f}_i \Psi(b) = \Psi(b')$

が成り立つものをいう. $\widetilde{f}_i b = 0$ または $\widetilde{e}_i b = 0$ のときは, $\widetilde{f}_i \Psi(b) = 0$, $\widetilde{e}_i \Psi(b) = 0$ となることを仮定していないことに注意しよう. この性質が成り立つときは, **strict morphism** であるという.

射 $\Psi\colon \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ が **embedding** であるとは, 写像 $\Psi\colon \mathcal{B}_1 \sqcup \{0\} \to \mathcal{B}_2 \sqcup \{0\}$ が単射であるときをいう.

我々は $\mathcal{B}(\lambda)$(正確には $\widetilde{\mathcal{B}}(\lambda)$ だけであるが) を $\mathcal{B}(\infty)$ の部分集合として定義したことを思い出そう. 結晶構造まで込めて考えると

$$\mathcal{B}(\lambda) \to \mathcal{B}(\infty) \otimes T_\lambda$$

は埋め込みである. 作り方から $\widetilde{e}_i$ と $\Psi$ は 0 になるときまで含めて可換であるが, $\widetilde{f}_i$ については可換でない. したがって strict morphism ではない.

$*$ を用いて $\mathcal{B}(\infty)$ に新しい結晶構造を

$$\widetilde{e}_i^* b \overset{\text{def.}}{=} (\widetilde{e}_i b^*)^*, \quad \widetilde{f}_i^* b \overset{\text{def.}}{=} (\widetilde{f}_i b^*)^*, \quad \varepsilon_i^*(b) \overset{\text{def.}}{=} \varepsilon_i(b^*), \quad \varphi_i^*(b) \overset{\text{def.}}{=} \varphi_i(b^*)$$

で定義する.

## 9. テンソル積の大域結晶基底

9.1. **準 $R$ 行列.** $\mathbf{U}_q$ はホップ代数であるから, 表現 $M$, $M'$ のテンソル積 $M \otimes M'$ はふたたび $\mathbf{U}_q$ の表現になる: $\Delta(x) = \sum x_{(0)} \otimes x_{(1)}$ と表わしたときに,

$$x(m \otimes m') = \sum x_{(0)} m \otimes x_{(1)} m'.$$

しかし $\Delta$ は余可換でない, すなわち成分の入れ替えに関して対称でないので, $M \otimes M'$ と $M' \otimes M$ は一般に同型になるとは限らない.

$\Delta'$ を $\Delta$ とテンソル積の成分の入れ替えの合成としたときに, **普遍 $R$ 行列**とは, $\mathbf{U}_q \otimes \mathbf{U}_q$ の可逆な元で $R^{-1}\Delta(x)R = \Delta'(x)$ がすべての $x \in \mathbf{U}_q$ について成立するものをいう. このような元が存在すれば, $R_{M',M} \colon M' \otimes M \ni m' \otimes m \mapsto R \cdot m \otimes m' \in M \otimes M'$ とおくと,

$$R_{M',M}\left(x(m' \otimes m)\right) = R\Delta(x)(m' \otimes m) = R\Delta'(x)R^{-1}R(m \otimes m') = \Delta(x)(m \otimes m')$$

となって, $R_{M',M}$ は $M' \otimes M$ と $M \times M'$ の間の intertwiner になる. Drinfeld は $\mathbf{U}_q$ を適当に完備化すれば普遍 $R$ 行列を持つことを証明した.

ここでは, [Lusztig の教科書] に従い, $\Delta$ と $\overline{\Delta}$ (i.e., $\overline{\Delta}(x) \overset{\text{def.}}{=} \overline{\Delta(\overline{x})}$) の間を結ぶ元として, **準 $R$ 行列**を導入する. この違いは本質的でないが, 次の節でテンソル積の標準基底を構成するときに, こちらの方が都合がよい.

**定理 9.1.** *$\{b\}$ を $\mathbf{U}_q^-$ の基底とし, ルート分解 $\mathbf{U}_q^- = \bigoplus_{-\xi \in Q_+} (\mathbf{U}_q^-)_{-\xi}$ と compatible であるものとする. 内積 ( , ) に関する双対基底を $\vee$ によって $\mathbf{U}_q^+$ の基底に移したものを $\{b^*\}$ とする. このとき*

$$\Theta_\xi = \prod_i (-1)_i^{\xi} q_i^{-\xi_i} \sum_{b : \mathrm{wt}(b) = -\xi} b^* \otimes b$$

*とおく. ただし $\xi = \sum \xi_i \alpha_i \in Q_+$ である. さらに $\Theta = \sum_\xi \Theta_\xi$ を, $\mathbf{U}_q^+ \otimes \mathbf{U}_q^-$ の自然な完備化*

$$\mathbf{U}_q^+ \widehat{\otimes} \mathbf{U}_q^- \overset{\text{def.}}{=} \bigoplus_{\xi \in Q} \prod_{\xi = \lambda + \mu} (\mathbf{U}_q^+)_\lambda \otimes (\mathbf{U}_q^-)_\mu$$

*の元として定義する. このとき $\Theta$ は可逆で, 次が成立する.*

$$\Theta^{-1} \Delta(x) \Theta = \overline{\Delta}(x) \quad \textit{for all } x \in \mathbf{U}_q.$$

*さらに $\Theta\overline{\Theta} = \overline{\Theta}\Theta = 1$ が成り立つ.*

基底の取り方に依存せずに $\Theta$ が決まることは線形代数から明らかであるが, $\mathfrak{g}$ が有限型のときには, PBW 基底 (の長さを正規化したもの) を用いて, 具体的に与えることができることを注意しておこう.

また, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときは, 命題 4.4 における $L$ が, 本質的に $\Theta$ に他ならない.

$\Theta$ は無限和を許しているので, どういう表現の間の intertwiner を与えうるかは, 注意が必要である. 今までに出てきた無限和 (命題 4.4 の $L$ や, 補題 7.3 の $\Pi$) は, 可積分表現について定義されたが, それは作用素が, まず $\mathbf{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ のときに定義し, それを $\mathbf{U}_{q_i}(\mathfrak{sl}_2) \to \mathbf{U}_q$ を通じて, $\mathbf{U}_q$ に定義する, という形をしていたからである. 今の場合は, いろいろな $i \in I$ についての $e_i$, $f_i$ が混ざっているので, 可積分というだけではうまく定義ができない. (実際, あとでアファインのときに, これを克服することが一つのポイントになることをみる.)

そこで, 表現に対する次の条件を考える:

- 任意の元 $m \in M$ に対して十分大きなウェイト $\xi_0$ が存在して, $\xi_0$ よりも大きい $\xi$ については, $x \in (\mathbf{U}_q^+)_\xi$ が $xm = 0$ を満たす.

最高ウェイト表現は, この条件を満たす. $M$ が上の条件を満たすか, もしくは $M'$ の双対がこの条件を満たすと仮定する. すると

$$\Theta_{M,M'} \colon M \otimes M' \to M \otimes M'; \quad \Theta_{M,M'}(m \otimes m') = \sum_\xi \Theta_\xi (m \otimes m')$$

は, 有限和になって well-defined である. 定義から次が成立する.

**命題 9.2.** $M$, $M'$ は上の条件を満たすとし, $M$, $M'$ は *bar involution* を持つと する. このとき $M\otimes M'$ 上の $\mathbb{Q}$-線型写像 $\overline{\phantom{x}}$ を $\overline{\phantom{x}} \overset{\text{def.}}{=} (\overline{\phantom{x}}\otimes\overline{\phantom{x}})\circ\Theta_{M,M'}$ で定義すると, *bar involution* である. すなわち次が成立する.

$$\overline{\overline{m\otimes m'}} = m\otimes m', \qquad \overline{x\cdot m\otimes m'} = \overline{x}\cdot\overline{m\otimes m'}, \qquad \textit{for } x\in\mathbf{U}_q,\ m\otimes m'\in M\otimes M'.$$

9.2. $\lambda$, $\mu$ を支配的なウェイトとし, テンソル積表現 $V(\lambda)\otimes V(-\mu)$ を考える. $V(\lambda)$ の最高ウェイトベクトルを $v_\lambda$, $V(-\mu)$ の最低ウェイトベクトルを $v_{-\mu}$ とする. すると, $V(\lambda)\otimes V(-\mu)$ は, $v_\lambda\otimes v_{-\mu}$ で生成され, 定義関係式は, $q^h(v_\lambda\otimes v_{-\mu}) = q^{\langle h,\lambda-\mu\rangle}(v_\lambda\otimes v_{-\mu})$, $e_i^{1+\langle h_i,\mu\rangle}(v_\lambda\otimes v_{-\mu}) = 0$, $f_i^{1+\langle h_i,\lambda\rangle}(v_\lambda\otimes v_{-\mu}) = 0$ である.

$V(\lambda)\otimes V(-\mu)$ に bar involution $\overline{\phantom{x}}$ を $\overline{x(v_\lambda\otimes v_{-\mu})} = \overline{x}(v_\lambda\otimes v_{-\mu})$ によって定義する. 上の定義関係式により, $\mathbf{U}_q$ の $\overline{\phantom{x}}$ が下に落ちると考えてもいいが, 前節のように準 $R$ 行列 $\Theta$ を用いて定義されたと考える. すると安直な各成分ごとの bar involution $\overline{x\otimes y} = \overline{x}\otimes\overline{y}$ とのずれが, $\Theta$ で与えられることになる. 大域結晶基底の元のテンソル積 $b\otimes b'$ ($b\in\mathcal{B}(\lambda)$, $b'\in\mathcal{B}(-\mu)$) は安直な bar involution で不変になるが, 本当の $\overline{\phantom{x}}$ で不変とは限らない. しかし $\Theta$ の定義 (定理 9.1) から次が分かる:

$$\overline{b\otimes b'} = b\otimes b' + \sum_{\substack{b_1:\mathrm{wt}(b_1)>\mathrm{wt}(b)\\ b_1':\mathrm{wt}(b_1')<\mathrm{wt}(b')}} a_{b_1,b_1'} b_1\otimes b_1' \qquad (a_{b_1,b_1'}\in\mathbb{Z}[q_s,q_s^{-1}]).$$

そこで, 基底のテンソル積 $\mathcal{B}(\lambda)\otimes\mathcal{B}(-\mu)$ に半順序 $b_1\otimes b_1' < b_2\otimes b_2'$ を

$$\mathrm{wt}\, b_1 + \mathrm{wt}\, b_2 = \mathrm{wt}\, b_1' + \mathrm{wt}\, b_2', \quad \mathrm{wt}\, b_1 > \mathrm{wt}\, b_2, \quad \mathrm{wt}\, b_1' < \mathrm{wt}\, b_2'$$

が成立するものとして定める. 上の主張は, bar involution の基底 $\mathcal{B}(\lambda)\otimes\mathcal{B}(-\mu)$ に関する表現行列が, この順序に関して対角成分が 1 であるような上三角行列であることを意味している. PBW 基底から標準基底を構成したときとまったく同様にして次が証明される.

**定理 9.3.** $V(\lambda)\otimes V(-\mu)$ 上の基底 $\{G(b\otimes b') \mid b\in\mathcal{B}(\lambda), b'\in\mathcal{B}(-\mu)\}$ で次の二つの性質を持つものがただ一つ存在する*:*
(A) $\overline{G(b\otimes b')} = G(b\otimes b')$
(B) $\mathcal{B}(\lambda)\otimes\mathcal{B}(-\mu)$ との基底の変換行列は*,* 対角成分が 1 の上三角行列で*,* 対角以外の成分は $q_s\mathbb{Z}[q_s]$ に属する*.*

テンソル積 $V(\lambda)\otimes V(-\mu)$ の結晶基底は, $\mathcal{L} \overset{\text{def.}}{=} \mathcal{L}(\lambda)\otimes\mathcal{L}(-\mu)$, $\mathcal{B}(\lambda)\times\mathcal{B}(-\mu)$ で与えられていた. このとき $G(b\otimes b')$ は, 対応する大域結晶基底である. すなわち $G(b\otimes b')$ と $b\otimes b'$ は $\mathcal{L}/q_s\mathcal{L}$ に落とせば同じである. これは上の作り方から明らかである.

また作り方から, 次もただちに従う.

$$G(b\otimes b') \equiv b\otimes b' \mod \bigoplus_{\xi\in Q_+\setminus\{0\}} V(\lambda)_{\mathrm{wt}(b)+\xi}\otimes V(-\mu)_{\mathrm{wt}(b)-\xi}. \tag{9.4}$$

9.3. **$\widetilde{\mathbf{U}}_q$ の結晶基底.** $\mathbf{U}_q^+$ は, $\mathbf{U}_q^-$ と同型であるから結晶基底を持つ. この節では両者を組み合わせて $\mathbf{U}_q$ 全体の結晶基底を作る. 実際には $\mathbf{U}_q$ のカルタン部分代数 $\mathbf{U}_q^0$ を取り替えてできる **modified quantum enveloping algebra** $\widetilde{\mathbf{U}}_q$ 上に結晶基底を構成する.

各ウェイト $\lambda\in P$ に対して $a_\lambda$ という元を導入し, $\bigoplus \mathbf{U}_q^-\otimes\mathbf{U}_q^+\otimes\mathbb{Q}(q)a_\lambda$ に積を次のようにして導入し, $\widetilde{\mathbf{U}}_q$ で表わす:

$$a_\lambda a_\mu = \delta_{\lambda\mu}a_\lambda, \quad e_i a_\lambda = a_{\lambda+\alpha_i}e_i, \quad f_i a_\lambda = a_{\lambda-\alpha_i}f_i,$$
$$(e_if_j - f_je_i)a_\lambda = \delta_{ij}\left[\langle h_i,\lambda\rangle\right]a_\lambda.$$

$\widetilde{\mathbf{U}}_q$ は環であるが, $1 = \sum_{\lambda\in P} a_\lambda$ は $\widetilde{\mathbf{U}}_q$ に入っていないので, 単位元は持たない.

$M$ を $\mathbf{U}_q$ の表現でウェイト分解を持つものとし, $a_\lambda$ をウェイト $\lambda$ のウェイト空間への射影として定義すると, 上の関係式が満たされる. $a_\lambda$ を, ウェイト分解を持つ任意の $\mathbf{U}_q$ の表現につ

いて定義される '普遍的な' 作用素と見ることもできるが, ここではより具体的な表示を用いた. また, $\mathbf{U}_q$ のカルタン部分代数は, 関係式

$$q^h a_\lambda = q^{\langle h,\lambda\rangle} a_\lambda$$

によって消されるので, $\mathbf{U}_q^- \otimes \mathbf{U}_q^+ \otimes \mathbb{Q}(q)a_\lambda$ と取り除いて定義されていることを注意しよう. 記号を簡単にするために以後は $\mathbf{U}_q^- \otimes \mathbf{U}_q^+ \otimes \mathbb{Q}(q)a_\lambda$ を $\mathbf{U}_q a_\lambda$ で表わす.

**定理 9.5.** $\widetilde{\mathbf{U}}_q$ *上に標準基底 (=大域結晶基底)$\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ で次の性質を持つものが構成できる.*

(1) $\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ *は分解* $\bigoplus \mathbf{U}_q a_\lambda$ *と compatible な分解* $\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q) = \bigsqcup \mathcal{B}(\mathbf{U}_q a_\lambda)$ *を持つ.*

(2) $\lambda, \mu \in P_+$ *とするとき* $\mathbf{U}_q$ *の表現の準同型* $\mathbf{U}_q a_{\lambda-\mu} \to V(\lambda)\otimes V(-\mu)$ *で* $a_{\lambda-\mu}$ *を* $v_\lambda \otimes v_{-\mu}$ *に送るものを* $\Phi(\lambda,\mu)$ *で表わすと,*

$$\Phi(\lambda,\mu)b = G(b_1 \otimes b_2) \ \textit{or}\ 0$$

*が, ある対* $(b_1,b_2) \in \mathcal{B}(\lambda)\times\mathcal{B}(-\mu)$ *に対して成立する. この対応* $b \mapsto (b_1,b_2)$ *によって*

$$\{b \in \mathcal{B}(\mathbf{U}_q a_{\lambda-\mu}) \mid \Phi(\lambda,\mu)b \neq 0\} \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}(\lambda)\otimes\mathcal{B}(-\mu)$$

*と同型になる.*

証明は, $\lambda, \lambda', \mu \in P_+$ に対して, 次の準同型の合成

$$V(\lambda+\lambda')\otimes V(-\lambda'-\mu) \xrightarrow{\subseteq} V(\lambda)\otimes V(\lambda')\otimes V(-\lambda')\otimes V(-\mu) \xrightarrow{\text{真ん中の二つの成分の pairing}} V(\lambda)\otimes V(-\mu)$$

によって, 定理 9.3 の標準基底が移っていることをチェックすることによる. (この部分で, この講義では認めた結晶基底のテンソル積に関する結果が本質的に使われる.) そのあとで, $\lambda' \to \infty$ という '極限' を取ればよい. $V(\lambda+\lambda')$ の極限が $\mathbf{U}_q^-$ になることに注意して結論をえる.

また, 誘導される

$$\mathcal{B}(\lambda+\lambda')\otimes\mathcal{B}(-\lambda'-\mu) \to \mathcal{B}(\lambda)\otimes\mathcal{B}(-\mu)$$

は, 補題 8.3 より結晶の strict morphism である. よって包含写像 $\mathcal{B}(\lambda)\otimes\mathcal{B}(-\mu) \to \mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ は strict になる. ここは, $\mathcal{B}(\lambda) \to \mathcal{B}(\infty)$ とは異なる点なので注意しよう. (後者の包含写像は, $\widetilde{f}_i$ とは可換でないのであった.)

構成から次が分かる.

**定理 9.6.** *結晶として次の同型がある.* $\mathcal{B}(\mathbf{U}_q a_\lambda) \cong \mathcal{B}(\infty)\otimes T_\lambda \otimes \mathcal{B}(-\infty)$.

また, 定理 7.11(3) の $\mathcal{B}(\lambda)$ の特徴付けにより, $b_1\otimes t_\lambda\otimes b_2$ に対する $b$ が $\Phi(\lambda,\mu)b \neq 0$ を満たす必要十分条件は, 次で与えられる:

$$\varepsilon_i^*(b_1) \le \langle h_i,\lambda\rangle \text{ かつ } \varphi_i^*(b_2) \le -\langle h_i,\mu\rangle \tag{9.7}$$

**例 9.8.** $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ とする. ウェイトの集合を $\mathbb{Z}$ と $\lambda \mapsto \langle\lambda,h\rangle$ によって同一視する. $\widetilde{\mathbf{U}}_q$ の大域結晶基底は

$$\begin{cases} f^{(m)}e^{(n)}a_k & k \ge m-n \text{ のとき}, \\ e^{(n)}f^{(m)}a_k & k \le m-n \text{ のとき} \end{cases}$$

で与えられる. ただし, $k = m-n$ のときは, 上と下は一致する.

9.4. $*$**-結晶構造.**

**定理 9.9** ([5, Th. 4.3.2])**.** $\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ は $*$ で不変である.

証明. しかるべく $\widetilde{\mathbf{U}}_q$ に内積を定義することができ, $\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ は概正規直交基底になる. したがって $\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ の元は定理 7.8 と同様の特徴付けを持つ. したがって $\widetilde{\mathcal{B}}(\widetilde{\mathbf{U}}_q) = \mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q) \sqcup -\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ は $*$ で不変であることが従う.

定理 9.6 によって $b = b_1 \otimes t_\lambda \otimes b_2$ と対応させると, (9.4) の意味 (正確には表現から $\widetilde{\mathbf{U}}_q$ に移行して) $b \equiv b_1 b_2 a_\lambda$ が成り立つ. すると

$$b^* \equiv a_{-\lambda} b_2^* b_1^* \equiv a_{-\lambda} b_1^* b_2^* = b_1^* b_2^* a_\mu \qquad \mu = -\lambda - \mathrm{wt}\, b_1 - \mathrm{wt}\, b_2$$

となるから, $b^*$ は $b_1^* \otimes t_{-\mu} \otimes b_2^*$ と対応する. 特に, 符号が保たれていることも分かった. □

$*$ を用いて $\mathcal{B}(\infty)$ のときと同様に $\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ に新しい結晶構造を定義する.

上の $b^*$ の式により, 次を得る.

**補題 9.10.**

$$\begin{gathered}
\varepsilon_i^*(b_1 \otimes t_\lambda \otimes b_2) = \max(\varepsilon_i^*(b_1), \varphi_i^*(b_2) + \langle h_i, \lambda\rangle),\\
\varphi_i^*(b_1 \otimes t_\lambda \otimes b_2) = \max(\varepsilon_i^*(b_1) - \langle h_i, \lambda\rangle, \varphi_i^*(b_2)),\\
\mathrm{wt}^*(b_1 \otimes t_\lambda \otimes b_2) = -\lambda,\\
\widetilde{e}_i^*(b_1 \otimes t_\lambda \otimes b_2) = \begin{cases} \widetilde{e}_i^* b_1 \otimes t_\lambda \otimes b_2 & \text{if } \varepsilon_i^*(b_1) \geq \varphi_i^*(b_2) + \langle h_i, \lambda\rangle \\ b_1 \otimes t_\lambda \otimes \widetilde{e}_i^* b_2 & \text{if } \varepsilon_i^*(b_1) < \varphi_i^*(b_2) + \langle h_i, \lambda\rangle \end{cases}\\
\widetilde{f}_i^*(b_1 \otimes t_\lambda \otimes b_2) = \begin{cases} \widetilde{f}_i^* b_1 \otimes t_\lambda \otimes b_2 & \text{if } \varepsilon_i^*(b_1) > \varphi_i^*(b_2) + \langle h_i, \lambda\rangle \\ b_1 \otimes t_\lambda \otimes \widetilde{f}_i^* b_2 & \text{if } \varepsilon_i^*(b_1) \leq \varphi_i^*(b_2) + \langle h_i, \lambda\rangle \end{cases}
\end{gathered}$$

**定理 9.11** ([5, Th. 5.1.1])**.** *$\widetilde{e}_i^*$, $\widetilde{f}_i^*$ は, $\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ の結晶構造 $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ について strict morphism である.*

## 10. Extremal ウェイト加群

[5] において柏原は, 結晶に対する extremal ベクトルの概念を定義した. これは, $\widetilde{\mathbf{U}}_q$ の結晶構造を理解するために重要な概念であり, [BN] の主結果は, extremal ベクトル (正確には extremal かつ $*$-extremal) を決定した, ということもできる.

**10.1. 結晶基底への Weyl 群作用.** 結晶 $\mathcal{B}$ が, **seminormal** であるとは, (7.14) が成り立つときをいう. $\mathcal{B}(\lambda)$ は seminormal である. このとき各 $i \in I$ に対して $S_i\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ を

$$S_i b = \begin{cases} \widetilde{f}_i^{\langle h_i, \mathrm{wt}\, b\rangle} b & \langle h_i, \mathrm{wt}\, b\rangle \geq 0 \text{ のとき} \\ \widetilde{e}_i^{-\langle h_i, \mathrm{wt}\, b\rangle} b & \langle h_i, \mathrm{wt}\, b\rangle \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義する. $S_i^2 = 1$, $\mathrm{wt}(S_i b) = s_i(\mathrm{wt}\, b)$ が成り立つ. ただし, $s_i$ は鏡映である. $\mathfrak{sl}_2$ の表現を考えると, $S_i$ が鏡映 $s_i$ による対称性を結晶のレベルで実現するものであることが分かるであろう. また, あとで $T_i$ との関係も述べる.

また, seminormal な結晶に対して

$$\widetilde{e}_i^{\max} b = \widetilde{e}_i^{\varepsilon_i(b)} b, \qquad \widetilde{f}_i^{\max} b = \widetilde{f}_i^{\varphi_i(b)} b$$

と定義する. すなわち, $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ を 0 にならないまで最大限に適用するということである.

seminormal な結晶 $\mathcal{B}$ が **normal** であるとは, 次の条件が成り立つときをいう:

- $I$ から二つの元からなる部分集合 $J = \{i, j\} \subset I$ であって, 対応する Lie 環 $\mathfrak{g}_J$ が有限次元であるものを取ってくる. このとき $\mathcal{B}$ を $\mathfrak{g}_J$ の結晶と思ったものが, $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}_J)$ の有限次元表現の結晶と同型になる.

定義から $\mathcal{B}(\lambda)$ は normal である. また normal な結晶のテンソル積は normal である.

**定理 10.1** ([5, Th. 7.2.2])**.** *$\mathcal{B}$ が normal な結晶であるとき, $\{S_i\}$ は組み紐群の関係式を満たす. よってワイル群 $W$ が $\mathcal{B}$ に作用する.*

証明は rank 2 のときにチェックすればよい. (rank 2 に reduce できるように, normal であるという条件を課したのである.)

ワイル群の元 $w \in W$ に対応する作用素を $S_w$ で表わすことにする.

**10.2. Extremal ベクトル.** まず表現の Extremal ベクトルを定義し, 次に結晶について定義を与える.

**定義 10.2.** 可積分表現 $M$ のウェイト $\lambda$ のベクトル $v$ が **extremal** であるとは, 任意の $w \in W$ と $i \in I$ に対して

$$\begin{cases} e_i T_w v = 0 & \langle h_i, w\lambda\rangle \geq 0 \text{ のとき} \\ f_i T_w v = 0 & \langle h_i, w\lambda\rangle \leq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{10.3}$$

が成り立つときをいう.

**例 10.4.** $V(\lambda)$ を最高ウェイトが $\lambda$ の可積分最高ウェイト表現とし, $v$ を最高ウェイトベクトルとする. 定義から, $V(\lambda)$ のウェイトは, $\lambda - Q_+$ に属する. 一方, カッツ・ムーディー・リー環の表現論でよく知られているように, ウェイトの集合はワイル群 $W$ の作用で不変である. したがって, ウェイトの集合は $\bigcap w(\lambda - Q_+)$ に属する. これは, ウェイトの集合が, $W\lambda$ の凸包に含まれることを意味する. 上の条件は, 対応するウェイト空間が 0 なので, ただちに従う. したがって $v$ は extremal である.

**補題 10.5.** *可積分表現 $M$ の extremal ベクトル $v$ を取り, ウェイトがウェイト $\lambda$ であるとする. このとき $S_w v$ を, $w$ の最短表示を取って帰納的に*

$$S_i S_w b = \begin{cases} f_i^{(\langle h_i, w\lambda\rangle)} S_w b & \textit{if } \langle h_i, w\lambda\rangle \geq 0, \\ e_i^{(-\langle h_i, w\lambda\rangle)} S_w b & \textit{if } \langle h_i, w\lambda\rangle \leq 0. \end{cases}$$

と定義する．このとき

$$S_w v = (-1)^{N_+^\vee} q^{-N_+} T_w v$$

が成立する．ただし，

$$N_+ = \sum_{\alpha\in\Delta_+\cap w^{-1}(\Delta_-)} \max\left((\alpha,\lambda),0\right), \qquad N_+^\vee = \sum_{\alpha\in\Delta_+\cap w^{-1}(\Delta_-)} \max((\frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)},\lambda),0).$$

である．特に $S_w v$ は $w$ の最短表示の取り方によらずに定まる．

証明．一般に $v\in M$ がウェイト $\lambda$ を持ち，$e_i v = 0$ (resp. $f_i v = 0$) を満たすと，

$$T_i v = (-q_i)^{\lambda_i} f_i^{(\lambda_i)} v \qquad \left(\text{resp. } T_i v = e_i^{(\lambda_i)} v\right),$$

が成立する．ただし，$\lambda_i = \langle h_i, \lambda\rangle$ である．(命題 4.2 参照) $w$ の最短表示を $w = s_{i_m} s_{i_{m-1}}\cdots s_{i_1}$ とすると，$v$, $T_{i_1}v$, … , $T_{i_m}\cdots T_{i_1} v$ のウェイトは，それぞれ

$$\lambda, \quad s_{i_1}\lambda, \quad \dots \quad , s_{i_m}\cdots s_{i_1}\lambda$$

となる．あとは，$\Delta_+\cap w^{-1}(\Delta_-) = \left\{ s_{i_1}\cdots s_{i_{k-1}}\alpha_{i_k} \;\middle|\; k = 1,\dots,m \right\}$，に注意して結論を得る． □

**補題 10.6.** *$v_1\in M_1$, $v_2\in M_2$ が extremal で，ウェイト $\lambda_1$, $\lambda_2$ が，次の意味で同じワイル・チェンバーに属するとする:*

$$\langle h_i, w\lambda_1\rangle \ge 0 \Longleftrightarrow \langle h_i, w\lambda_2\rangle \ge 0 \quad \textit{for all } i\in I,\ w\in W.$$

*このとき，$v_1\otimes v_2 \in M_1\otimes M_2$ も extremal である．*

証明．補題 5.6 により，$L(\mathbf{c},\mathbf{h})^\pm$ を使って次が成立する．

$$T_w(v_1\otimes v_2) = \sum_{\mathbf{c}} \prod_{k=1}^{p} \left\{ (-1)^{c_k} q^{-c_k(c_k-1)/2} \prod_{a=1}^{c_k} (q_{i_k}^{a} - q_{i_k}^{-a}) \right\} L(\mathbf{c},\mathbf{h})^+ T_w v_1 \otimes L(\mathbf{c},\mathbf{h})^- T_w v_2.$$

仮定から $\langle h_i, w(\lambda_1+\lambda_2)\rangle \ge 0$ であれば，$\langle h_i, w\lambda_1\rangle$, $\langle h_i, w\lambda_2\rangle$ は共に非負であり，例えば $L(\mathbf{c},\mathbf{h})^+ = e_{i_1}$, $L(\mathbf{c},\mathbf{h})^- = e_{i_1}$ (i.e., $\mathbf{c} = (1,0,\dots,0)$) を考えると，$L(\mathbf{c},\mathbf{h})^+ T_w v_1$ もしくは $L(\mathbf{c},\mathbf{h})^- T_w v_2$ のいずれかは 0 となる．一般の $\mathbf{c}$ についても同様で，$\mathbf{c}\ne 0$ であれば，いずれか一方は必ず 0 になる．従って $T_w(v_1\otimes v_2) = T_w v_1 \otimes T_w v_2$ が成り立つ．このとき結論は明らかである． □

**定義 10.7.** normal な結晶 $B$ のウェイト $\lambda$ のベクトル $b$ が **extremal** であるとは，任意の $w\in W$ と $i\in I$ に対して

$$\begin{cases} \widetilde{e}_i S_w b = 0 & \langle h_i, w\lambda\rangle \ge 0 \text{ のとき} \\ \widetilde{f}_i S_w b = 0 & \langle h_i, w\lambda\rangle \le 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つときをいう．

上と同様に可積分最高ウェイト加群の結晶基底の最高ウェイトベクトルは，extremal になる．

また，$(\mathcal{L},\mathcal{B})$ が可積分表現の結晶基底とし，extremal ベクトル $v$ の $\mathcal{L}/q_s\mathcal{L}$ における像が $\mathcal{B}$ に属しているとする．このとき補題 10.5 により，像は結晶の意味で extremal であり，さらに $S_w$ を apply したものは，補題 10.5 の意味での $S_w v$ を $\mathcal{L}/q_s\mathcal{L}$ に落としたものである．同じ記号を違う意味に使ったが，この意味で混同しても問題ないわけである．また，$T_w v$ も符号と $q$ の巾を除いて，結晶基底の元を与えることも同時に分かった．

次は補題 10.6 の結晶版である．

**補題 10.8.** *$b_1\in\mathcal{B}_1$, $b_2\in\mathcal{B}_2$ が normal な結晶の extremal なベクトルで，ウェイト $\lambda_1$, $\lambda_2$ が補題 10.6 と同様に同じワイル・チェンバーに属するとする．このとき $v_1\otimes v_2$ も extremal である．*

証明. extremal ウェイトの条件から $\langle h_i, w\lambda\rangle \geq 0$ (resp. $\langle h_i, w\lambda\rangle \leq 0$ のとき $\varepsilon_i(S_w b) = 0$ (resp. $\varphi_i(S_w b) = 0$ ) である. したがって結晶の公理(8.6a) により

$$\varepsilon_i(S_w b) = \max(0, -\langle h_i, w\lambda\rangle), \qquad \varphi_i(S_w b) = \max(0, \langle h_i, w\lambda\rangle) \tag{10.9}$$

が成立する. 実際, この式が任意の $w$, $i$ について成り立つことが, $b$ が extremal であることと同値である. このとき一般的に成り立つ性質 ($\widetilde{f}_i^{\max}(b) \overset{\text{def.}}{=} \widetilde{f}_i^{\varphi_i(b)}(b)$)

$$\widetilde{f}_i^{\max}(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \widetilde{f}_i^{\varphi_i(b_1)-\varepsilon_i(b_2)} b_1 \otimes \widetilde{f}_i^{\max} b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes \widetilde{f}_i^{\max} b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2), \end{cases} \tag{10.10}$$

に注意すると, 仮定から $S_w(b_1 \otimes b_2) = S_w b_1 \otimes S_w b_2$ が成立する. あとは明らかである. □

次の補題は, 結晶の連結成分の中に extremal ベクトルがあることを示すときに有効に使われる.

**補題 10.11.** *normal な結晶 $\mathcal{B}$ のベクトル $b$ は, (連結成分の中で) $(\mathrm{wt}(b), \mathrm{wt}(b))$ の最大値を取っていると仮定する. このとき $b$ は extremal である.*

証明. $\langle h_i, \mathrm{wt}\, b\rangle \geq 0$ と仮定し, $\widetilde{e}_i b \neq 0$ とすると,

$$(\mathrm{wt}(\widetilde{e}_i b), \mathrm{wt}(\widetilde{e}_i b)) = (\mathrm{wt}\, b + \alpha_i, \mathrm{wt}\, b + \alpha_i) = (\mathrm{wt}\, b, \mathrm{wt}\, b) + \{\langle h_i, \mathrm{wt}\, b\rangle + 1\}(\alpha_i, \alpha_i) > (\mathrm{wt}\, b, \mathrm{wt}\, b)$$

となって最大値を取っていることと矛盾する. よって $\widetilde{e}_i b = 0$ である. 同様に $\langle h_i, \mathrm{wt}\, b\rangle \leq 0$ のときは $\widetilde{f}_i b = 0$ となる.

内積がワイル群の作用で不変であることに注意すると, $S_w b$ についても同様の主張が成立するので, $b$ は extremal である. □

**定理 10.12** ([5, Prop. 9.3.2])**.** *$\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ の各連結成分上で $(\mathrm{wt}(\bullet), \mathrm{wt}(\bullet))$ は上から有界である. したがって各連結成分は, extremal ベクトルを含む.*

10.3. **Extremal ウェイト加群.** 柏原は, 支配的とは限らない $\lambda \in P$ に対して, ウェイト $\lambda$ の extremal ベクトルを持つ '普遍的な' 表現 $V(\lambda)$ を構成した. つまり $V(\lambda)$ は, $\mathbf{U}_q a_\lambda$ の商であって, 可積分であるという条件と, $a_\lambda$(の像) が, extremal であるという条件を課したものである. さらに, $V(\lambda)$ は, $\mathbf{U}_q a_\lambda$ の標準基底を落とした標準基底を持つことを示した.

今まで可積分条件について述べていなかったが, $\mathfrak{sl}_2$ の表現論により (10.3) から, 次が従う:

$$\begin{cases} f_i^{\langle h_i, w\lambda\rangle+1} T_w v = 0 & \langle h_i, w\lambda\rangle \geq 0 \text{ のとき} \\ e_i^{\langle h_i, w\lambda\rangle+1} T_w v = 0 & \langle h_i, w\lambda\rangle \leq 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{10.13}$$

あとですぐに見るように, この条件 ($w = 1$ のときのみで十分である) は逆に可積分性を導く. すなわち, (10.3) と, この条件(10.13) が $V(\lambda)$ を定義する条件である. $\lambda$ が支配的なときは, $V(\lambda)$ は最高ウェイト加群に他ならない. したがって, 記号に混乱はない.

$a_\lambda$ の像が extremal であるという条件を標準基底の言葉で書き表すことができれば, $\mathbf{U}_q a_\lambda$ の標準基底が, $V(\lambda)$ に落ちる. 以下, これを確かめる. 天下り的であるが,

$$\mathcal{B}(\lambda) \overset{\text{def.}}{=} \{b \in \mathcal{B}(\mathbf{U}_q a_\lambda) \mid b^* \text{ は extremal}\}$$

$$I_\lambda \overset{\text{def.}}{=} \bigoplus_{b \notin B(\lambda)} \mathbb{Q}(q) b \subset \mathbf{U}_q a_\lambda$$

とおく. 定理 9.5 のあとに注意したことによって, $\mathcal{B}(\mathbf{U}_q a_\lambda)$ は normal な結晶であって, ワイル群の作用が定義できることに注意しよう. したがって $b^*$ が extremal というのは, 意味をもっているわけである.

**定理 10.14.** (1)(普遍性) *$v$ を可積分表現 $M$ のウェイト $\lambda$ をもつ extremal なベクトルとするとき, 表現の準同型 $V(\lambda) \to M$ で, $v_\lambda$ を $v$ に写すものが存在する.*

*(2) $V(\lambda) = \mathbf{U}_q a_\lambda / I_\lambda$ であり, ウェイト $\lambda$ の extremal ベクトル $v_\lambda$ は, $a_\lambda$ の像である.*

(3) $V(\lambda)$ は, $\mathcal{B}(\lambda)$ を大域結晶基底として持つ.

(4) 任意の $w \in W$ に対して, 表現の同型 $V(\lambda) \xrightarrow{\cong} V(w\lambda)$ であって $v_\lambda$ を $S_{w^{-1}} v_{s_w \lambda}$ に送るものが存在する.

(5) 任意の $w \in W$ に対して $S^*_w$ は, 結晶の同型 $\mathcal{B}(\lambda) \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}(w\lambda)$ を与える.

証明. 証明の途中では, 最高/最低ウェイト加群を用いるので, 普遍性で定義される加群を $E(\lambda)$ で表わすことにし, 最高/最低ウェイト表現は $V(\lambda)$ であらわすことにする. また, $a_\lambda$ の $E(\lambda)$ における像は $e_\lambda$ と表わす.

基本ウェイト $\Lambda_i$ ($\langle h_i, \Lambda_j\rangle = \delta_{ij}$) を取り, $\lambda_\pm \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i\in I} \max(0, \pm\langle h_i, \lambda\rangle)\Lambda_i \in P_+$ とおき, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ と分解する. このとき, $V(\lambda_+) \otimes V(-\lambda_-)$ を考える. $v_{\lambda_+} \otimes v_{-\lambda_-}$ が満たす定義関係式は

$$e_i^{1+\langle h_i, \lambda_-\rangle}(v_{\lambda_+} \otimes v_{-\lambda_-}) = 0 = f_i^{1+\langle h_i,\lambda_+\rangle}(v_{\lambda_+} \otimes v_{-\lambda_-}) \quad \text{for all } i \in I$$

である. この条件は, (10.3) と (10.13) の $w = 1$ と同値である. したがって, $E(\lambda)$ は $V(\lambda_+) \otimes V(-\lambda_-)$ の商である.

また, $\mathcal{B}(\mathbf{U}_q a_\lambda)$ は射影 $\mathbf{U}_q a_\lambda V(\lambda_+) \otimes V(-\lambda_-)$ と compatible であって, $V(\lambda_+) \otimes V(-\lambda_-)$ 上の標準基底を誘導した. $b = b_1 \otimes a_\lambda \otimes b_2 \in \mathcal{B}(\mathbf{U}_q a_\lambda)$ が 0 に落ちない条件(9.7) を書き換えてみると,

$$(10.15)\qquad \begin{aligned} & b = b_1 \otimes t_\lambda \otimes b_2 \neq 0 \text{ in } V(\lambda_+) \otimes V(-\lambda_-) \\ \Longleftrightarrow\ & \forall i\ \varepsilon_i^*(b_1) \leq \langle h_i, \lambda_+\rangle \text{ かつ } \varphi_i^*(b_2) \leq -\langle h_i, \lambda_-\rangle \\ \Longleftrightarrow\ & \forall i\ \varepsilon_i^*(b) \leq \langle h_i, \lambda_+\rangle = \max(0, \langle h_i, \lambda\rangle) \qquad (\text{補題 9.10 より}) \\ \Longleftrightarrow\ & \forall i\ \varepsilon_i^*(b) = \max(0, \langle h_i, \lambda\rangle) \qquad (\varphi_i^*(b) \geq 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

である. これは, (10.9) の $w = e$ の場合の条件に他ならない.

次に $i \in I$ を取る. $n \overset{\text{def.}}{=} \langle h_i, \lambda\rangle \geq 0$ であると仮定し, 次の図式を考える:

$$(10.16)\qquad \begin{array}{ccccc} \mathbf{U}_q a_\lambda & \longrightarrow & \mathbf{U}_q a_{s_i\lambda} & \xrightarrow{\text{projection}} & V((s_i\lambda)_+) \otimes V(-(s_i\lambda)_-) \\ x a_\lambda & \longmapsto & x e_i^{(n)} a_{s_i\lambda} & \longmapsto & x e_i^{(n)} v_{(s_i\lambda)_+} \otimes v_{(s_i\lambda)_-} = x S_i \left(v_{(s_i\lambda)_+} \otimes v_{-(s_i\lambda)_-}\right) \end{array}$$

補題 10.5 の証明で見たように

$$T_i e_\lambda = (-q_i)^n f_i^{(n)} e_\lambda$$

が成り立つことと, 上の図式で $f_i^{(n)} a_\lambda$ が, $v_{(s_i\lambda)_+} \otimes v_{(s_i\lambda)_-}$ に移されることに注意すると, (10.3) と (10.13) の $w = s_i$ の条件は, $E(\lambda)$ への射影が上の図式の $V((s_i\lambda)_+) \otimes V((s_i\lambda)_-)$ を通ることと同値である.

(10.16) において, $e_i^{(n)}$ の右からの掛け算が行われているので, $\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ の標準基底が $\mathcal{B}((s_i\lambda)_+) \otimes \mathcal{B}(-(s_i\lambda)_-) \sqcup \{0\}$ に落ちることは明らかでない. これを示そう. $b \in \mathcal{B}(\mathbf{U}_q a_\lambda)$ とすると, 標準基底に関する性質 ([5, Prop. 6.4.3] 参照. 似た性質は, 定理 7.12 でも見た.)

$$(10.17)\qquad b \cdot e_i^{(n)} = \begin{bmatrix} \varphi_i^*(b) + n \\ n \end{bmatrix}_i \widetilde{e}_i^{*n} b + \sum_{b' : \varphi_i^*(b') > \varphi_i^*(b) + n} a_{b'} b'$$

が成立する. (10.15) を $\lambda$ を $s_i\lambda$ に置き換えてみると, $b'$ が $V((s_i\lambda)_+) \otimes V((s_i\lambda)_-)$ におちて 0 にならない条件は, $\varepsilon_j^*(b') = \max(0, \langle h_j, s_i\lambda\rangle)$ であり, $j = i$, $n = \langle h_i, \lambda\rangle \geq 0$ としてみると,

$$\varepsilon_i^*(b') = 0 \Longleftrightarrow \varphi_i^*(b') = n$$

となる. したがって, (10.17) の右辺の $\sum$ の各項は, 0 に落ちる. 第一項についても $\varphi_i^*(b) = 0$ でなければ, 落ちてしまう. したがって, (10.16) において, $\mathcal{B}(\mathbf{U}_q a_\lambda)$ は, $V((s_i\lambda)_+ \otimes V((s_i\lambda)_-)$ の標準基底 (の部分集合) に落ちる.

これを繰り返せば, 一般の $w \in W$ について (10.3) と (10.13) が成立することは, $\mathbf{U}_q a_\lambda \to E(\lambda)$ が

$$\mathbf{U}_q a_\lambda \ni x \longmapsto x S_w^{-1}(v_{(w\lambda)_+} \otimes v_{-(w\lambda)_-}) \in V((w\lambda)_+) \otimes V(-(w\lambda)_-)$$

を通ることと同値であり, しかも $\mathcal{B}(\mathbf{U}_q a_\lambda)$ の標準基底で $\varepsilon_i^*(S_w^* b) = \max(0, \langle h_i, w\lambda \rangle)$, すなわち $b^*$ が extremal であるものが, $E(\lambda)$ の標準基底を与える.

また, 以上の議論から (4),(5) もただちに従う. $\square$

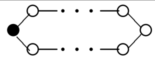
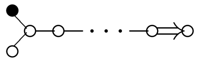
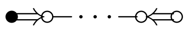
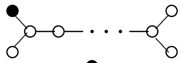
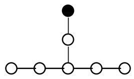
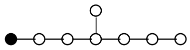
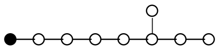
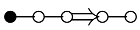
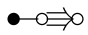
# Part 2.

## 11. アファイン・リー環 – 覚え書き

アファイン・リー環に関する標準的な教科書は

[Kac の教科書] V.G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras (3rd Ed.), Cambridge Univ. Press 1990.

である. ただし, 記号等は [BN] に従う. これは [6] に従っている.

| type | affine Dynkin graph | entries of $\delta$ | entries of $c$ |
|---|---|---|---|
| $A_n^{(1)}$ $(n \geq 1)$ |  | 1–⋯–1<br>1 1<br>1–⋯–1 | 1–⋯–1<br>1 1<br>1–⋯–1 |
| $B_n^{(1)}$ $(n \geq 3)$ |  | 1<br>2–2–⋯–2⇒2<br>1 | 1<br>2–2–⋯–2⇒1<br>1 |
| $C_n^{(1)}$ $(n \geq 2)$ |  | 1⇒2–⋯–2⇐1 | 1⇒1–⋯–1⇐1 |
| $D_n^{(1)}$ $(n \geq 4)$ |  | 1 1<br>2–2–⋯–2<br>1 1 | 1 1<br>2–2–⋯–2<br>1 1 |
| $E_6^{(1)}$ |  | 1<br>2<br>1–2–3–2–1 | 1<br>2<br>1–2–3–2–1 |
| $E_7^{(1)}$ |  | 2<br>1–2–3–4–3–2–1 | 2<br>1–2–3–4–3–2–1 |
| $E_8^{(1)}$ |  | 3<br>1–2–3–4–5–6–4–2 | 3<br>1–2–3–4–5–6–4–2 |
| $F_4^{(1)}$ |  | 1–2–3⇒4–2 | 1–2–3⇒2–1 |
| $G_2^{(1)}$ |  | 1–2⇛3 | 1–2⇛1 |

この講義では, untwisted アファイン・リー環 ($X_n^{(1)}$ 型) のみを扱う. しかし, すべての結果は, twisted の場合にも拡張される. もう少し厳密にいうと, $A_{2n}^{(2)}$ 型のときだけは, [Kac の教科書] とは逆に, 頂点 0 を長いルートの方に取る必要がある.

まず

- $\mathfrak{g}_0$ : (有限次元) 複素単純リー環 (ABCDEFG 型)
- $(\ ,\ )$ : 正規化された非退化対称不変二次形式 (long root の長さ$= \sqrt{2}$)

とする.

アファイン・リー環 $\mathfrak{g}$ には二つの表示式がある.

(1) カッツ・ムーディー・リー環としての表示式

(2) ループ・リー環の中心拡大としての表示式

二つの表示式が同型なリー環を与えることは, 非自明な事実である.

まず (2) ループ・リー環の中心拡大としての表示式を与える:

- $\mathbf{L}\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$
- $\mathfrak{g}' = \mathbf{L}\mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{C}c$
  - $c$ は中心
  - $[X \otimes t^m, Y \otimes t^n] = [X, Y] \otimes t^{m+n} + m\delta_{m+n,0}(X, Y)c$
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathbb{C}d$ ($d$ は次数作用素)
  - $[d, X \otimes t^m] = mX \otimes t^m$

$\mathfrak{g}'$ と $\mathfrak{g}$ の二通りのアファイン・リー環の違いは, 最初は分かりにくいと思う. 表現を考えると, 違いが分かってくるので, そのときまで待ってほしい. 今のところは, すぐ下で見るように, ルートをきちんと定めるために, カルタン部分環を膨らませているのだ, と思っていれば十分である.

$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_0} (\mathfrak{g}_0)_\alpha$ をルート空間分解とすると

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\left(\mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d\right)}_{= \mathfrak{h}\text{ とおく}} \oplus \left( \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Delta_0 \\ m \in \mathbb{Z}}} (\mathfrak{g}_0)_\alpha \otimes t^m \right) \oplus \left( \bigoplus_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathfrak{h}_0 \otimes t^m \right)$$

という分解を持つ. アファイン・リー環 $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環を $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ によって定義すると, 後ろの二項は対応するルート空間となる. ルートは, それぞれ $\alpha + m\delta$, $m\delta$ である. ここで $\delta \in \mathfrak{h}^*$ は

- $\langle \delta, d \rangle = 1$
- $\langle \delta, \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}c \rangle = 0$

によって定義される．また $\alpha \in \Delta_0$ は, $c$, $d$ に対しては 0 とおいて, $\mathfrak{h}^*$ の元と思うことにする．このようにアファイン・リー環のルートの集合 $\Delta$ は

$$\Delta = \{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \Delta_0, m \in \mathbb{Z}\} \sqcup \{m\delta \mid m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

と二つのタイプに分かれる．前者を**実ルート**, 後者を**虚ルート**という．前者の重複度は 1, 後者は $\#I$ 次元である．

人工的であるが, $\Delta_0^+$ を $\mathfrak{g}_0$ の正ルートの集合のしたときに, $\mathfrak{g}$ の**正ルート**の集合 $\Delta^+$ を

$$\Delta^+ = \{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \Delta_0^+, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \sqcup \{\alpha + m\delta \mid \alpha \in -\Delta_0^+, m \in \mathbb{Z}_{>0}\} \sqcup \mathbb{Z}_{>0}\delta$$

によって定義する．$\Delta = \Delta^+ \sqcup -\Delta^+$ が成り立っていることに注意しよう．

次に (1) カッツ・ムーディー・リー環としての表示式を考える.
正ルートを定義したので, 単純ルートは自然に定まる:

- $\alpha_i$ : $\mathfrak{g}_0$ の単純ルート
- $\alpha_0 \overset{\text{def.}}{=} \delta - \theta$ : $\theta$ は $\mathfrak{g}_0$ の最高ルート

となる. $\mathfrak{g}_0$ の単純ルートの添字集合を $I_0$ とし, $\mathfrak{g}$ の単純ルートの添字集合を $I = I_0 \sqcup \{0\}$ とする. このとき

$$\delta = \sum_{i\in I} a_i \alpha_i$$

で $a_i$ を定義する. 具体的な値は図 11 の二列目に与えられている.
アファイン・リー環にカルタン・データを定義するためには, $\mathfrak{h}^*$ 上に (しかるべき有理性を満たす) 内積 $(\ ,\ )$ を定める必要があった. これは, $W$-不変であって

$$(\delta, \lambda) = \langle c, \lambda\rangle$$

を満たすもの, として定義される. (unique に決定される.)
有限次元リー環 $\mathfrak{g}_0$ のカルタン部分環 $\mathfrak{h}_0$ の上の内積は, Killing form の制限として (自然に) 定義される. これを今までの通り正規化する. $\mathfrak{h}$ 上の内積 $(\ ,\ )$ に (天下り的に)

$$(c, h_i) = 0 \quad (i \in I_0), \qquad (c, c) = 0, \qquad (c, d) = 1,$$
$$(d, h_i) = 0 \quad (i \in I_0), \qquad (d, d) = 0$$

で拡張する.
この内積は非退化であるから, 同型 $\nu\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ を誘導する. このとき次が成立する:

$$\nu(h_i) = \alpha_i^\vee \overset{\text{def.}}{=} \frac{2\alpha_i}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \qquad \nu(c) = \delta,$$

$$\Lambda_0 \overset{\text{def.}}{=} \nu(d), \qquad \langle \Lambda_0, h_i\rangle = 0 \quad (i \in I_0), \quad \langle \Lambda_0, c\rangle = 1, \quad \langle \Lambda_0, d\rangle = 0$$

$h_0$ は定義されていなかったが, 上の式により $\alpha_0^\vee$ を $\nu^{-1}$ で写して定義する. このとき

$$c = \sum_{i\in I} a_i^\vee h_i$$

で $a_i^\vee$ を定義する. 具体的な値は図 11 の三列目に与えられている. すると

$$(\alpha_i, \alpha_i) = \frac{2a_i^\vee}{a_i}$$

が成立し, 表を見ると 1, 1/2, 1/3 のいずれかの値を取ることが分かる. これに応じて, 量子展開環の定義に使われた $d$ は 1, 2, 3 のいずれかにすればよい.
アファイン型のカルタン・データにより, カッツ・ムーディー・リー環が定義される:

- $[h, h'] = 0$ $(h, h' \in \mathfrak{h})$
- $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$
- $[h, e_i] = \langle \alpha_i, h\rangle e_i$, $[h, f_i] = -\langle \alpha_i, h\rangle f_i$
- Serre relation $(\operatorname{ad} e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0$, $(\operatorname{ad} f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0$ $(i \neq j)$

あとのために記号を導入しておく. $\mathfrak{n}^+$ を $e_i$ で生成される部分リー環, $\mathfrak{n}^-$ を $f_i$ で生成される部分リー環とする. 次の三角分解が成立する:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$$

**定理 11.1** (Kac,Moody)**.** *上のリー環と $\mathfrak{g}$ は次の対応によって同型になる:*

$$e_i \leftrightarrow e_i, \quad f_i \leftrightarrow f_i \quad (i \in I_0), \qquad \mathfrak{h} \text{ は共通},$$
$$e_0 \leftrightarrow E_0 \otimes t, \quad f_0 \leftrightarrow F_0 \otimes t^{-1}$$

*ただし, $E_0$ はルート空間 $(\mathfrak{g}_0)_{-\theta}$ に属するベクトルで, $F_0$ は $\omega_0$ をシュバレー対合としたときに $F_0 = -\omega_0(E_0)$ であり, さらに $(E_0, F_0) = 1$ と正規化しておく.*

次にワイル群の記述を行う．各 $i\in I$ に対して $\mathfrak{h}^*$ の対合 $s_i$ を $s_i(\lambda)=\lambda-\langle\lambda,h_i\rangle\alpha_i$ によって定義し，$\langle s_i\rangle_{i\in I}$ で生成される $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ の部分群を**ワイル群**といい，$W$ で表わす．(すでに何度も出てきた.) 有限次元リー環 $\mathfrak{g}_0$ に対するワイル群 $W_0$ の定義と全く同じである．このとき $\Delta_0=\bigcup_{i\in I_0}W_0\alpha_i$ となることがよく知られているが，アファイン・リー環に対しては

$$\Delta^{\mathrm{re}}=\bigcup_{i\in I}W\alpha_i$$

と実ルートしか現れない．実際，定義から $W\delta=\delta$ であるので，虚ルートは現れようがない．この事実のために，虚ルート・ベクトルを人工的に定める必要が生じる．

次に $W$ と $W_0$ の関係を述べる．そのためにカルタン部分環の双対 $\mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{h}_0^*$ の間に

$$\mathrm{cl}\colon \mathfrak{h}^{*0}\overset{\text{def.}}{=}\{\lambda\in\mathfrak{h}^*\mid\langle\lambda,c\rangle=0\}\to\mathfrak{h}_0^*$$

を $\mathrm{cl}(\alpha_i)=\alpha_i$ $(i\in I_0)$, $\mathrm{cl}(\delta)=0$ によって定義する．cl は同型 $\mathfrak{h}^{*0}/\mathbb{C}\delta\xrightarrow{\cong}\mathfrak{h}_0^*$ を誘導する．ワイル群 $W$ の作用で，$\mathfrak{h}^{*0}$ は保たれる．また $\delta$ が $W$ で固定される．したがって群の準同型 $W\to W_0$ が誘導される．定義から $s_i$ $(i\in I_0)$ は $s_i$ に写されるので，全射である．さらに群の完全系列

$$1\longrightarrow Q_{\mathrm{cl}}^\vee\overset{\text{def.}}{=}\bigoplus_{i\in I_0}\mathbb{Z}\alpha_i^\vee\xrightarrow{\ t\ }W\longrightarrow W_0\longrightarrow 1$$

が存在することが知られている．ここで $Q_{\mathrm{cl}}^\vee\xrightarrow{t}W$ は，$t\colon\mathfrak{h}^{*0}/\mathbb{C}\delta\to\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$

$$t(\xi)(\lambda)=\lambda+(\lambda,\delta)\xi-\left\{(\lambda,\xi)+\frac{(\xi,\xi)}{2}(\lambda,\delta)\right\}\delta$$

の制限で与えられる．$Q_{\mathrm{cl}}^\vee$ は，有限次元リー環 $\mathfrak{g}_0$ のラングランズ双対 (すなわちカルタン行列を転置行列でおきかえたリー環) のルート格子である． $Q_{\mathrm{cl}}^\vee$ が出てくることは，たとえば，次の公式を見ると自然に思えてくる: $s_{\alpha_i-n\delta}s_{\alpha_i}=t(n\alpha_i^\vee)$.

また，$\lambda\in\mathfrak{h}^{*0}$ と制限すると，上の公式は

$$t(\xi)(\lambda)=\lambda-(\lambda,\xi)\delta \tag{11.2}$$

と簡潔になることに注意しよう．

あとのために**拡大ワイル群** $\widetilde{W}$ を定義する．まず

$$P_{\mathrm{cl}}^\vee\overset{\text{def.}}{=}\{\lambda \bmod \mathbb{C}\delta\in\mathfrak{h}^{*0}/\mathbb{C}\delta\mid(\lambda,\alpha_i)=\langle\alpha_i,\nu(\lambda)\rangle\in\mathbb{Z}\ \forall i\in I_0\}$$

とおく．これは有限次元リー環 $\mathfrak{g}_0$ のラングランズ双対のウェイト格子であって，$P_{\mathrm{cl}}^\vee\supset Q_{\mathrm{cl}}^\vee$ となっていることに注意しよう．そこで $\widetilde{W}\overset{\text{def.}}{=}P_{\mathrm{cl}}^\vee\rtimes W_0$ によって定義する．このとき $\mathcal{T}\overset{\text{def.}}{=}\{g\in\widetilde{W}\mid g(\Delta^+)=\Delta^+\}$ とおくと，$\widetilde{W}=\mathcal{T}\ltimes W$ となる．$\mathcal{T}$ は，$\mathfrak{g}$ のディンキン図式の自己同型群の部分群であり，'特別な' 頂点の集合 $\{i\in I\mid a_i=a_i^\vee=1\}$ に simply transitively に作用することが知られている．

カッツ・ムーディー・リー環を定義するためには，カルタン行列だけで十分であるが，量子展開環を定義するためには，ルート・データが必要であった．ここでは，二つのバージョンを考える．一つは $\mathrm{Hom}(P,\mathbb{Z})=\bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}h_i\oplus\mathbb{Z}d$ とするものである．これに対応する量子展開環は今までの通り $\mathbf{U}_q$ で表わす．一方，もう一つは，$P_{\mathrm{cl}}^0=\mathrm{cl}(P\cap\mathfrak{h}^{*0})$ である．対応する量子展開環を $\mathbf{U}_q'$ で表わす．(こちらの方は，中心 $c$ が $0$ で働く表現が重要なので，$\mathfrak{h}^{*0}$ に制限したが，柏原は単に $P_{\mathrm{cl}}=\mathrm{cl}(P)$ を取っている．いずれにせよ，本質的な違いではない.)

注 11.3. [6], [BN] では，twisted なアファインの場合も扱ったために，$d_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ という数字が現れる．untwisted の場合は，$d_i=1$ なので，これは必要ないのだが，コピーの段階でまぎれこんでいる可能性があるので注意すること．

## 12. 量子アファイン展開環の PBW 基底

12.1. **一般的な構成の方針.** さて, いよいよ量子アファイン展開環の場合に PBW 基底の定義を行う. 有限次元リー環に対する PBW 基底の構成を一般化するためには, 次の課題を克服する必要がある:

- ワイル群は有限群でないので, 最長元は存在しない. 最長元の最短表示を, 何で置き換えたらいいのか?
- 虚ルートに対するルート・ベクトルは組み紐群の作用では与えられないので, どう定義したらいいのか?

この問題を考えるために, [Lusztig の教科書, §40] に従って, PBW 基底の構成を少し一般的な形にしておく. $w \in W$ をワイル群の元とし $w = s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_m}$ をその最短表示とする. このとき

$$f_{i_1}^{(c_1)}T_{i_1}(f_{i_2}^{(c_2)})\cdots(T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_{m-1}})(f_{i_m}^{(c_m)})$$

という元で張られる $\mathbf{U}_q^-$ の部分ベクトル空間を考える. これは $\Delta_+\cap w^{-1}(\Delta_-)$ に現れる正ルートに対応したルート・ベクトルの積で現れる元である. 前の議論により

- 上の元たちは一次独立
- 部分空間は $w$ のみに依存し, 最短表示の取り方には依存しない. そこで, $\mathbf{U}_q^-(w)$ で表わす.
- $\mathbf{U}_q^-(w)$ は, 積で閉じている. したがって $\mathbf{U}_q^-$ の部分代数である. (補題 5.14 参照)
- integral form ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^-(w)$ についても同様の主張が成立する.

したがって $w$ として, どんどん長い元を取り, その極限を取るというのは自然な考えである. そこで (両側に) 無限に続く列 $\mathbf{h} = (\dots, i_{-2}, i_{-1}, i_0, i_1, \dots)$ で, どの一部分をとっても最短表示になっているようなものを取る. さらに $p\in\mathbb{Z}$ を取って固定する. 以下の構成は, $\mathbf{h}$, $p$ に依存するが, それは notation に含めないこととする. そこで $(\mathbf{c}_{+_p}, \mathbf{c}_{-_p}) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{\ge 0}^{\mathbb{Z}_{\le p}}\times\mathbb{Z}_{\ge 0}^{\mathbb{Z}_{>p}}$ に対して

$$L(\mathbf{c}_{+_p}) = f_{i_p}^{(c_p)}T_{i_p}(f_{i_{p-1}}^{(c_{p-1})})\cdots$$
$$L(\mathbf{c}_{-_p}) = \cdots T_{i_{p+1}}^{-1}(f_{i_{p+2}}^{(c_{p+2})})f_{i_{p+1}}^{(c_{p+1})}$$

を考える. 前者は, $w = s_{i_p}s_{i_{p-1}}s_{i_{p-2}}\cdots$ に対応する $\mathbf{U}_q^-(w)$ の極限の基底である. $\mathbf{U}_q^-(+_p)$ と表わそう. 同様に後者の定める部分代数を $\mathbf{U}_q^-(-_p)$ で表わす. 前者は, $T_{i_p}^{-1}$, $T_{i_{p-1}}^{-1}$ を順番にかけていくと, やがて $\mathbf{U}_q^-$ から出ていってしまうような元からなり, 後者は, この操作では, ずっと $\mathbf{U}_q^-$ に入ったままである. 一方, $T_{i_{p+1}}$, $T_{i_{p+2}}$ を掛けていくと, 出ていくものと保たれるものの役割が変わる. したがって, 次の部分代数

$$\mathbf{U}_q^-(0_p) \overset{\text{def.}}{=} \mathbf{U}_q^- \cap \left(T_{i_p}(\mathbf{U}_q^-)\cap T_{i_p}T_{i_{p-1}}(\mathbf{U}_q^-)\cap\cdots\right)\cap\left(T_{i_{p+1}}^{-1}(\mathbf{U}_q^-)\cap T_{i_{p+1}}^{-1}T_{i_{p+2}}^{-1}(\mathbf{U}_q^-)\cap\cdots\right)$$

の元はでてこない. 内積に関する直交性により

$$\mathbf{U}_q^-(+_p)\otimes\mathbf{U}_q^-(0_p)\otimes\mathbf{U}_q^-(-_p)\to\mathbf{U}_q^-$$

が単射であることが分かるが, たとえば全射であるかどうかも一般には分からない.

無限列 $\mathbf{h}$ をどう取るかが問題になるが, おそらくは

- ある元 $w\in W$ で $l(w^n) = nl(w)$ となるようなものを取り, $w$ の最短表示を周期的に延ばして $\mathbf{h}$ を作る,

というのは最低限の要請であろう. そうすれば, なんらかの意味で構成に '周期性' が期待できる. さらに, そのような $w$ としては

- できるだけ '小さく' (一つの周期ができるだけ短く),
- できるだけ多くの正ルートが $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\Delta_+\cap w^n(\Delta_-)$ に現れる,

ように取った方が, よいであろう.

今までのところ二つの構成が知られている:

- [BN] で使われたもの ([2] に最初に出たもの)
  $w$ として, $P_{\mathrm{cl}}^{\vee}$ の基本コウェイト $\widetilde{\varpi}_i$ $(i \in I_0)$ の和
  $$\xi = \widetilde{\varpi}_1 + \widetilde{\varpi}_2 + \cdots + \widetilde{\varpi}_n \in P_{\mathrm{cl}}^{\vee}$$
  に対する $t(\xi)$ を取る.
- アファイン箙の表現論から来るもの, i.e., コクセター変換 (各 $i \in I$ に対応する単純鏡映の一個づつの積)

このとき, まずは対応するルートが何になるかワイル群を調べると, [BN] では, $\mathbf{U}_q^-(+)$ $(p=0$ のとき) に対応するのが, $\{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \Delta_0^+, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, $\mathbf{U}_q^-(-)$ が $\{\alpha + m\delta \mid \alpha \in -\Delta_0^+, m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ となることは, (11.2) からただちに分かる. したがって, $\mathbf{U}_q^-(0)$ は虚ルートのルート・ベクトルをつくればいいことが分かる. ただし, 上の記号で $\mathbf{U}_q^-(+_p)$ 等は, $p=0$ のときは単に $\mathbf{U}_q^-(+)$ 等で表わすものとした.

一方, 箙の表現論では, $\mathbf{U}_q^-(+)$ に対応するのが, いわゆる preprojective な表現で, $\mathbf{U}_q^-(-)$ に対応するのが preinjective な表現である. これは, $\mathfrak{g} \neq \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のときは, 上のルートの二つの種類への分解とは一致しない!! 実際, 虚ルートの他に, コクセター変換 $w$ で $w(\alpha) \neq \alpha$ であるが, $w^p(\alpha) = \alpha$ $(p > 1)$ と, なるようなルートが (有限個) 存在し, それに対応して表現の 'tube' ができる. そこに属する表現は, 巡回箙の巾零表現のアーベル圏と同型になる. したがって, $\mathbf{U}_q^-(0)$ の構造は, 上の場合とはかなり違っている.

12.2. **虚ルートベクトル.** $P_{\mathrm{cl}}^{\vee}$ の基本コウェイト $\widetilde{\varpi}_i$ $(i \in I_0)$ の和
$$\xi = \widetilde{\varpi}_1 + \widetilde{\varpi}_2 + \cdots + \widetilde{\varpi}_n \in P_{\mathrm{cl}}^{\vee}$$
を取る. $\xi$ は $\widetilde{W}$ の元で, 一般には $W$ に入っているとは限らない. (例えば $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のときは, $s_0 s_1 = t(2\xi)$ となる) $t(\xi)$ を $W$ とディンキン図式の自己同型の部分に分け,
$$t(\xi) = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_N} \tau$$
とする. そこで $i_{k+N} = \tau(i_k)$ となるように両側に無限に延ばす.

そこで $L(\mathbf{c}_{+_p})$, $L(\mathbf{c}_{-_p})$ を上のように定義する. $p=0$ のときに, 正ルート $\beta$ に対応するルート・ベクトルを $F_\beta$ で表わすことにする.

重要なのは, ルートベクトル $F_{k\delta \pm \alpha_i}$ で, $q_s = 1$ の古典極限では $e_i \otimes t^k$, $f_i \otimes t^k$ に対応する. これは, 次の簡潔な表示を持つ ([2]):

$$F_{k\delta+\alpha_i} = T_{\widetilde{\varpi}_i}^{k}(f_i), \qquad F_{k\delta-\alpha_i} = T_i T_{\widetilde{\varpi}_i}^{-k}(f_i) \tag{12.1}$$

あとの式は, 一見, $T_i$ という正べきが入っていて変に見えるが, $t(\widetilde{\varpi}_i)$ の最短表示が $s_i$ で終わっていることから, $T_{\widetilde{\varpi}_i}^{-k}$ の最初の部分と, $T_i$ がキャンセルして, うまく行っている. これらのベクトルが, いわゆる Drinfeld 生成元であり, これらを用いて, $\mathbf{U}_q$ をループ・リー環的に表示することができる. (Drinfeld 表示. [2] 参照)

古典極限からも想像できる通り, 次の補題は, いろいろな計算で大切な役割を果たす.

**補題 12.2.** $f_1 \mapsto f_i$, $f_0 \mapsto F_{\delta-\alpha_i}$ は, 埋め込み写像 $\mathbf{U}_{q_i}^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \to \mathbf{U}_q^-$ を与える.

$\mathfrak{g} = A_{2n}^{(2)}$ のときは, この補題が成立しない. この場合は $A_2^{(2)}$ の埋め込みを作り, $A_2^{(2)}$ についていろいろと計算する必要が生じる. 幸なことに, [1] に詳細な計算がある.

虚ルートに対するルートベクトルは, 手で構成する.
$$\widetilde{\psi}_{i,k} \overset{\text{def.}}{=} F_{k\delta-\alpha_i} f_i - q_i^2 f_i F_{k\delta-\alpha_i}$$
これをウェイト $-k\delta$ を持ち, $q=1$ の古典極限では $h_i \otimes t^k$ に対応するルート・ベクトルである.

**補題 12.3.** $\widetilde{\psi}_{i,k}$ たちは互いに可換である.

標準基底は, 概正規直交基底であるべきで, $\widetilde{\psi}_{i,k}$ の巾ではこの性質が期待できない. そこで, まず $r(\widetilde{\psi}_{i,k})$ の計算を行い, それが対称多項式に自然に定義される余積とよく似ていることを観察して, シューア多項式に対応するベクトルを構成する, という筋道を取る. この辺りの計算に

は多くの研究があったが, 私自身は表面的にしかフォローしていないので, 天下り的に定義を与える. まず $\widetilde{P}_{i,k}$ を

$$\widetilde{P}_{i,k} = \frac{1}{[k]_i} \sum_{s=1}^{k} q_i^{s-k} \widetilde{\psi}_{i,s} \widetilde{P}_{i,k-s}$$

によって帰納的に定義する. さらに, $\widetilde{P}_{i,k}$ を初等対称関数として, determinant formula を用いてシューア多項式に対応するベクトルを定義し, $S_{i,Y}$ とする. ただし, $Y$ はヤング図形, すなわち分割である. そして分割の組 $\mathbf{c}_0 = (Y^i)_{i \in I_0}$ に対して

$$S_{\mathbf{c}_0} = \prod_{i \in I_0} S_{i,Y^i}$$

と定義する. そして

$$L(\mathbf{c}, p) = L(\mathbf{c}_{+_p}) \times (T_{i_{p+1}} T_{i_{p+2}} \dots T_{i_0})(S_{\mathbf{c}_0}) \times L(\mathbf{c}_{-_p})$$

と定義する. $p = 0$ の場合が一番基本的であり, 今後は, その場合しか使わないので単に $L(\mathbf{c})$ と表わすが, いろいろな性質の証明には, すべての $p$ を同時に取り扱う必要がある. 実際, $p$ を一つずらすことが, $\mathfrak{g}$ が有限型のときの $\mathbf{h} = (i_1, \dots, i_\nu)$ から $\mathbf{h}' = (i_2, i_3, \dots, i_\nu, \iota(i_1))$ への移行に対応する. (定理 7.1 の証明参照のこと) したがって $S_{\mathbf{c}_0}$ だけでなく, その組み紐群作用素による振る舞いも理解する必要がでてくることに注意する. これは, 雑にいえば $S_{\mathbf{c}_0}$ が extremal ベクトルである, と見抜くことに対応する.

$\mathbf{c}$ に対する順序 $\prec_p$ を次で定義する.

$\mathbf{c} \prec_p \mathbf{c}' \iff \mathbf{c}_{+_p} \le \mathbf{c}'_{+_p}$ と $\mathbf{c}_{-_p} \le \mathbf{c}'_{-_p}$ が成り立ち, 少なくとも一方の $\le$ が $<$ で成り立つ.

ここで $\le$ は左から読む辞書式順序である. $\mathbf{c}_0$ の部分は, 順序には関係していないことに注意する. たとえば, $\mathbf{c}_0$ よりも大きいということは, $\mathbf{c}'_{\pm p}$ のいずれかが 0 でない, ということを意味する. ウェイトまで考えれば, 両方ともに 0 ではないということも分かるが..

計算で示されている事実を書く:

**定理 12.4.** (1) $L(\mathbf{c}, p) \in {}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^-$ である.

(2) $(L(\mathbf{c}, p), L(\mathbf{d}, p)) \equiv \delta_{\mathbf{c},\mathbf{d}} \mod q_s \mathbf{A}_0$ が成り立つ. 特に, $\{L(\mathbf{c}, p) \mid \mathbf{c}\}$ は一次独立である. 次元を比べると, $\mathbf{U}_q^-$ の $\mathbb{Q}(q_s)$-ベクトル空間としての基底である.

特に, 各 $\mathbf{c}$ に対応して標準基底の元 $b(\mathbf{c}, p)$ が存在して次が成立する.

$$L(\mathbf{c}, p) \equiv \pm b(\mathbf{c}, p) \mod q_s \mathcal{L}(\infty)$$

(3) $\mathfrak{g} = A^{(1)}, D^{(1)}, E^{(1)}$ *or* $A_2^{(2)}$ のときは, $\{L(\mathbf{c}, p)\}$ は, ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{U}_q^-$ の $\mathbf{A}$-基底である.

(2) で, 標準基底のパラメトリゼーションが与えられた. これを次の節で extremal ウェイト加群の構造の決定に使い, またそれを用いて符号の umbiguity を消す.

また $S_{\mathbf{c}_0}$ に関する性質は, 他の部分とは別途調べる必要が出てくる. そのためには次を使う.

**補題 12.5.**

$$\widetilde{P}_{i,k} = F_{\delta-\alpha_i}^{(k)} f_i^{(k)} + \sum_{\mathbf{c}} a_{\mathbf{c}} L(\mathbf{c}, 0)$$

で $a_{\mathbf{c}}$ は, $q_s \mathbf{A} \cap \mathbf{A}_0 = q_s \mathbb{Z}[q_s]$ に入り, また, $a_{\mathbf{c}} \neq 0$ となる $\mathbf{c}$ は, $0 \prec_0 \mathbf{c}$ を満たす. つまり, $(\mathbf{c}_+, \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_-)$ と分けると, $\mathbf{c}_+$, $\mathbf{c}_-$ は共に 0 でない. さらに $S_{\mathbf{c}_0}$ に現れる $\widetilde{P}_{i,t}$ は, $0 < t < k$ を満たす.

これを用いると, 次の手順で $\{L(\mathbf{c}, p)\}$ に関する bar involution $\overline{\phantom{x}}$ の表現行列の上三角性が証明できる.

(1) 実ルート $L(\mathbf{c}_{\pm_p})$ の部分の上三角性を示す. 有限型のときと全く同じ.

(2) $\overline{\widetilde{P}_{i,k}} = P_{i,k} + \sum_{0 \prec_0 \mathbf{c}} a_{\mathbf{c}} L(\mathbf{c}, 0)$ を上の補題と (1) によって示す.

(3) $\overline{S_{\mathbf{c}_0}}$ に関する上三角性を示す. (2) と実ルートベクトルの交換関係.
(4) 一般の場合. (3) が分かれば, 残りは有限型のときと同じ.

これと定理 12.4(3) によって, $\mathfrak{g} = A^{(1)}, D^{(1)}, E^{(1)}$ or $A_2^{(2)}$ のときは, $\{L(\mathbf{c}, p)\}$ から出発して, 標準基底を (柏原の理論を用いることなく) 符号の umbiguity を除いて定義することができる.

## 13. レベル 0 基本表現

13.1. **レベル 0 表現についての凸性.** 各 $i \in I_0$ に対してレベル 0 基本ウェイト $\varpi_i$ を

$$\varpi_i = \Lambda_i - a_i^\vee \Lambda_0$$

によって定義する. $a_0 = 1$ であるから $\langle \varpi_i, c\rangle = a_i^\vee - a_i^\vee a_0 = 0$ と確かにレベルは 0 である.

以下ではワイル群の変換により, 次の条件を満たすレベル 0 ウェイト $\lambda$ に対応する extremal weight 表現を調べる:

$$\lambda = \sum_{i_0} \lambda_i \varpi_i, \qquad \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

$\varpi_i$ を $\mathfrak{g}_0$ の基本ウェイトと同一視すれば, 通常の支配的なウェイトの条件に他ならない. この条件を, **レベル 0 支配的**という.

**定理 13.1** ([6, Th. 5.1])**.** *$V(\lambda)$ をレベル 0 extremal ウェイト加群とする.*
*(1) $V(\lambda)$ の extremal ベクトルのウェイト $\mu$ は, $\mathrm{cl}(\mu) \in \mathrm{cl}(W\lambda) = W_0\mathrm{cl}(\lambda)$ を満たす.*
*(2) $V(\lambda)$ のウェイトは, $W\lambda$ の凸包に含まれる.*

(2) は, (1) が示されれば, $\mathcal{B}(\lambda)$ の任意の連結成分が extremal ベクトルを含むこと (定理 10.12) から従う.

以下の証明は, PBW 基底を使うもので, より強く次を証明する.

**定理 13.2.** *$V(\lambda)$ の extremal ベクトルは, ある $\mathbf{c}_0$ によって, $\pm S_{\mathbf{c}_0} v_\lambda$ をワイル群の作用で動かしたものと書ける.*

まだ符号の umbiguity が残っていたのだが, 以下の証明では $\pm$ を省くこととする.

*証明.* $\mathcal{B}(\lambda)$ を $\mathcal{B}(\mathbf{U}_q a_\lambda)$ の部分集合と見なし, $\mathcal{B}(\mathbf{U}_q a_\lambda)$ の元 $b$ で, extremal かつ $b^*$ が extremal な元を決定する. まず, 主張は $b$ をワイル群の作用 $S_w$, $S_w^*$ で動かして $\mathrm{cl}(\mathrm{wt}(b)) = \mathrm{cl}(\lambda)$ を示せばよいことに注意する.

$b = b_1 \otimes t_\lambda \otimes b_2$ とする. $\widetilde{f}_i^{\max}$ についての性質(10.10) により, $b_2 = u_{-\infty}$ と仮定してよい.

次にワイル群の元 $w$ によって, $w\,\mathrm{wt}\,b = w(\lambda + \mathrm{wt}\,b_1)$ をレベル 0 支配的になるようにする. [AK, Lem. 1.4] によって, $w = s_{j_\ell} \cdots s_{j_1}$ を, $\langle h_{j_k}, s_{j_{k-1}} \cdots s_{j_1}\lambda\rangle > 0$ となるように取ることができる. このとき, テンソル積の規則によって $S_w b$ は, $b_1 \otimes t_\lambda \otimes u_{-\infty}$ の形のままである.

この仮定のもとで, あとは, $b_1 \in \mathcal{B}(\infty)$ を決定すればよい.

PBW 基底を用いて $b_1 \equiv L(\mathbf{c}, 0) = L(\mathbf{c}_+) S_{\mathbf{c}_0} L(\mathbf{c}_-) \bmod q_s \mathcal{L}(\infty)$ と表わす. $b$ が extremal であることと, テンソル積の規則から,

$$\max(0, -\langle h_i, \mathrm{wt}\,b\rangle) = \varepsilon_i(b) = \max(\varepsilon_i(b_1), -\langle h_i, \lambda + \mathrm{wt}\,b_1\rangle)$$

が成り立つ.

$i \neq 0$ と取る. $\mathrm{wt}\,b$ がレベル 0 支配的であったから, $\langle h_i, \lambda\rangle \geq 0$ であるから, $\varepsilon_i(b) = 0$ である.

$$L(\mathbf{c}_+) = f_{i_0}^{(c_0)} T_{i_0}(f_{i_{-1}}^{(c_{-1})}) \cdots$$

で, $\mathbf{U}_q(+)$ に出てくるルート・ベクトルのルートが $\{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \Delta_0^+, m \geq 0\}$ であったことを思い出すと, $i_0 \neq 0$ であり, $0 = \varepsilon_{i_0}(b_1) = c_0$ が従う.

次に $S_{i_0} b = b_1' \otimes t_\lambda \otimes u_{-\infty}$ を考え, $b_1' \equiv T_{i_0}^{-1} L(\mathbf{c}_+) = f_{i_{-1}}^{(c_{-1})} \cdots$ に注意する. このとき

$$\langle h_{i_{-1}}, \mathrm{wt}(S_{i_0} b)\rangle = \langle s_{i_0} h_{i_{-1}}, \lambda + \mathrm{wt}\,b_1\rangle \geq 0$$

に気をつけて, $\widetilde{e}_{i_{-1}}(b_1') = 0$ から $c_{-1} = 0$ を得る. 以下, この繰り返しで, $\mathbf{c}_+ = 0$ でなければならないことが従う.

次に $b^*$ が extremal であることを用いる. $\mathrm{wt}\,b^* = -\lambda$ に注意して, $\lambda$ がレベル 0 支配的であったことを使いながら上と同様の議論を繰り返すと, $\mathbf{c}_- = 0$ が従う. したがって $b_1 \equiv S_{\mathbf{c}_0}$ であり, $\mathrm{wt}\,b_1 \in \mathbb{Z}\delta$ であるから結論が従う.

以下は間違い.

$b$ が extremal であることと, テンソル積の規則から,

$$\max(0, -\langle h_i, \lambda\rangle) = \varepsilon_i(b) = \max(\varepsilon_i(b_1), -\langle h_i, \lambda + \mathrm{wt}(b)\rangle)$$

が成り立つ.

$i \neq 0$ とする. $\lambda$ の取り方から, $\langle h_i, \lambda\rangle \geq 0$ で, $\varepsilon_i(b) = 0$ である.

$$L(\mathbf{c}_+) = f_{i_0}^{(c_0)} T_{i_0}(f_{i_{-1}}^{(c_{-1})}) \cdots$$

で, $\mathbf{U}_q(+)$ に出てくるルート・ベクトルのルートが $\{\alpha + m\delta \mid \alpha \in \Delta_0^+, m \geq 0\}$ であったことを思い出すと, $i_0 \neq 0$ であり, $0 = \varepsilon_{i_0}(b_1) = c_0$ が従う.

次に $S_{i_0} b = b_1' \otimes t_\lambda \otimes u_{-\infty}$ を考え, $b_1' \equiv T_{i_0}^{-1} L(\mathbf{c}_+) = f_{i_{-1}}^{(c_{-1})} \cdots$ に注意する. このとき

$$\langle h_{i_{-1}}, \mathrm{wt}(S_{i_0} b)\rangle = \langle s_{i_0} h_{i_{-1}}, \lambda\rangle \geq 0$$

に気をつけて, $\widetilde{e}_{i_{-1}}(b_1') = 0$ から $c_{-1} = 0$ を得る. 以下, この繰り返しで, $\mathbf{c}_+ = 0$ でなければならないことが従う.

また, $*$ を取って同様に考えると, $\mathbf{c}_- = 0$ が従う. したがって $b_1 \equiv S_{\mathbf{c}_0}$ であり, $\mathrm{wt}\, b_1 \in \mathbb{Z}\delta$ であるから結論が従う. □

上の証明では, $b_1 \equiv S_{\mathbf{c}_0}$ が, ある $\mathbf{c}_0$ について成り立つことまでしか分からないので, $\mathbf{c}_0$ としては, どのようなものがありうるかを決定するという問題が残っている. 以下これを, 段階的に調べていく.

**補題 13.3.** $\lambda$ はレベル 0 支配的とする.

(1) $\widetilde{P}_{i,k} v_\lambda = F_{\delta-\alpha_i}^{(k)} f_i^{(k)} v_\lambda$ であり, さらに $k > \lambda_i$ であれば, 右辺は 0 である.

(2) $S_{\mathbf{c}_0} v_\lambda = \prod_{i\in I_0} S_{i,Y^i} v_\lambda$ が 0 でないとすると, ヤング図式 $Y^i$ の行の数は $\lambda_i$ 以下である.

証明. (2) は, (1) から直ちに従う.

(1) を示そう. 補題 12.5 により

$$\widetilde{P}_{i,k} v_\lambda = F_{\delta-\alpha_i}^{(k)} f_i^{(k)} v_\lambda + \sum a_{\mathbf{c}} L(\mathbf{c}, 0) v_\lambda$$

であるが, $\sum$ に現れる $\mathbf{c}$ については, $\mathbf{c}_- \neq 0$ であり, $\mathbf{U}_q^-(-)$ に出てくるルート・ベクトルのルートが $-\Delta_0^+ + \mathbb{Z}_{>0}\delta$ であったことに注意すると, $\mathrm{cl}\,\mathrm{wt}(L(\mathbf{c}_-)v_\lambda)$ は, $\mathrm{cl}(\lambda) - Q_{\mathrm{cl}}^+$ から外に出てしまう. したがって定理 13.1 により, $L(\mathbf{c}_-)v_\lambda = 0$ である. 第一の主張が示された.

また, 可積分性から $f_i^{\lambda_i+1} v_\lambda = 0$ となるので, $k > \lambda_i$ であれば, 右辺は 0 である. □

ここで, ヤング図式の条件を言い換えておこう. ヤング図形と一般線型群の既約表現の対応を思い出すと, 行の数が $\lambda^i$ 以下であるということは, $\mathrm{GL}_{\lambda^i}(\mathbb{C})$ の (polynomial) 既約表現と対応する. よって, $\mathbf{c}_0 = (Y^i)_{i\in I_0}$ で, 各 $Y^i$ の行が $\lambda^i$ 以下のものは,

$$G_\lambda \overset{\text{def.}}{=} \prod_{i\in I_0} \mathrm{GL}_{\lambda^i}(\mathbb{C})$$

の polynomial 既約表現と一対一対応する.

ここで $V(\lambda)$ の箙多様体による幾何学的な構成の関係を指摘しておこう. (この事実は, 以下に述べる $V(\lambda)$ の構造定理に依存しているので, 証明の途中で使うわけにはいかない.)

- レベル 0 支配的なウェイト $\lambda$ に対して, (有限型の) 箙多様体 $\mathfrak{L}(\lambda)$ が定義される. ($\lambda$ に対応する有限次元複素リー環 $\mathfrak{g}_0$ の既約表現のウェイト $\mu$ に対して, $\mathfrak{L}(\mu,\lambda)$ が定義され, その disjoint union $\bigsqcup_\mu \mathfrak{L}(\mu,\lambda)$ が $\mathfrak{L}(\lambda)$ である.
- $G_\lambda$ を上の式で定めると, $G_\lambda$ が $\mathfrak{L}(\lambda)$ に作用する.
- extremal ベクトルに対応するウェイト $\mu \in W_0\mathrm{cl}(\lambda)$ については, 対応する箙多様体 $\mathfrak{L}(\mu,\lambda)$ は一点からなる.
- $G_\lambda$-同変な連接層のなすグロタンディエク群 $K^{G_\lambda}(\mathfrak{L}(\lambda))$ の上に, 合成積をもちいて $\mathbf{U}_q$ の表現を構成できる. これは, $G_\lambda$ の表現環 $R(G_\lambda)$ の module の構造をもっている.
- extremal ベクトルに対応するウェイト $\mu \in W_0\mathrm{cl}(\lambda)$ については, $K^{G_\lambda}(\mathfrak{L}(\mu,\lambda)) \cong R(G_\lambda)$
- ${}_{\mathbf{A}}V(\lambda) \cong K^{G_\lambda}(\mathfrak{L}(\lambda))$
- bar involution は, ほぼ Grothendieck-Serre duality に対応するが, 補正が必要である. この補正は, 有限型でない箙多様体 (例えばトロイダル代数に対応するアファイン型箙多様体) では定義できない.
- $V(\lambda)$ が標準基底を持つことは, 幾何学的には全く自明でない. その元が, 幾何学的にどのような性質を持つのか理解することは, 重要な課題である.

次に $k$ として, 最大に大きくなりうる $k = \lambda_i$ のときを考察する. これは, $\mathrm{GL}_{\lambda^i}(\mathbb{C})$ の表現でいうと, 行列式表現に対応する. 1 次元表現であって, '簡単' な表現なので, 虚ルートの方でも簡単であることが期待される. 実際, 次が成り立つ.

**補題 13.4.** $t(\alpha_i^\vee) = s_{\alpha_i-\delta} s_{\alpha_i}$ について

$$\widetilde{P}_{i,\lambda_i} v_\lambda = F_{\delta-\alpha_i}^{(\lambda_i)} f_i^{(\lambda_i)} v_\lambda = S_{t(\alpha_i^\vee)} v_\lambda$$

が成り立つ.

証明. 第一の等号は, 先の補題から従う.

第二の等号は, 計算で示す.

まず(12.1)から $F^{(\lambda_i)}_{\delta-\alpha_i} = T_i T^{-1}_{\widetilde{\varpi}_i}(f_i)$ に注意する. $T_i T^{-1}_{\widetilde{\varpi}_i} = T^{-1}_{\widetilde{\varpi}'_i}$ と表わすことにすると, $F^{(\lambda_i)}_{\delta-\alpha_i} = T^{-1}_{\widetilde{\varpi}'_i}(f_i^{(\lambda_i)})$ となる. 次に, $f_i^{(\lambda_i)} v_\lambda = S_i v_\lambda$ に注意する. したがって,

$$F^{(\lambda_i)}_{\delta-\alpha_i} f_i^{(\lambda_i)} v_\lambda = T^{-1}_{\widetilde{\varpi}'_i}(f_i^{(\lambda_i)}) \cdot S_i v_\lambda = T^{-1}_{\widetilde{\varpi}'_i}(f_i^{(\lambda_i)} T_{\widetilde{\varpi}'_i} S_i v_\lambda) = T^{-1}_{\widetilde{\varpi}'_i}(S_i T_{\widetilde{\varpi}'_i} S_i v_\lambda)$$

あとは, ワイル群での計算と, $T_w$ と $S_w$ の違いをきちんと計算することである. (補題 10.5) □

この式より $\widetilde{P}_{i,\lambda_i} v_\lambda$ は, 標準基底に入っている. したがって, $\lambda_i$ は勝手な自然数に取ってよいから, PBW 基底の元のうち, $\widetilde{P}_{i,k}$ については, 符号の umbiguity は消えて, すべて $+$ であることが示された !!

13.2. **レベル 0 基本表現.** 以下, $\lambda = \varpi_i$ のときを考察する. このとき $G_\lambda = \mathbb{C}^*$ であり, polynomial 表現とは, 単に $t \mapsto t^n$ $(n \geq 0)$ に他ならない.

**定理 13.5** ([6, Th. 5.3]). *$V(\varpi_i)$ の extremal ベクトルは, $\{S_w v_{\varpi_i} \mid w \in W\}$ からなる. 特に, $\mathcal{B}(\varpi_i)$ は連結である.*

証明. 定理 13.2 の証明と同様にして, $b = b_1 \otimes t_{\varpi_i} \otimes b_2$ で, extremal かつ $*$-extremal なものを決定する. また, 証明により $b_1 \equiv S_{\mathbf{c}_0}$ と仮定して構わない. また, 補題 13.3 により, $S_{\mathbf{c}_0}$ は $P_{j,k}$ $(j \neq i)$ や $P_{i,k}$ $(k \geq 2)$ を含んではいけない. すなわち $S_{\mathbf{c}_0}$ は, $\widetilde{P}_{i,1}$ の巾である:

$$S_{\mathbf{c}_0} v_{\varpi_i} = \begin{cases} P^n_{i,1} v_{\varpi_i} = S_{t(n\alpha_i^\vee)} v_{\varpi_i} & Y^i \text{ が横一列に } n \text{ 個の箱で, その他の } Y^j \text{ は空のとき} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

また, 場合わけの上の場合には 0 でないことも分かったことを注意しておこう.

後半の主張については, extremal ベクトルについて, $S_w$ が結晶の柏原作用素で実現されていたことを思い出せばよい. (定義 10.7 のあとの注意) □

**系 13.6.** *$V(\varpi_i)_{\varpi_i}$ は 1 次元である.*

証明. 凸性から, ウェイト $\varpi_i$ を持つベクトルは自動的に extremal になる. よって $S_w v_{\varpi_i}$ という形をしている. $w\varpi_i = \varpi_i$ でなければいけないが, このとき $S_w v_{\varpi_i} = v_{\varpi_i}$ が証明できる. ([6, Lem. 5.7]) □

次に, $S_{t(\alpha_i^\vee)}$ を, extremal ウェイト加群のワイル群対称性 (定理 10.14) の立場から理解する.

まず,

$$\mathrm{wt}(S_{t(\alpha_i^\vee)} v_{\varpi_i}) = t(\alpha_i^\vee)\varpi_i = \varpi_i + (\alpha_i^\vee, \varpi_i)\delta = \varpi_i + \delta$$

に注意する.

そこで extremal ウェイト加群 $V(\varpi_i)$ と $V(\varpi_i + \delta)$ を考える. 定理 10.14(4) により $\mathbf{U}_q$ の表現としての同型

$$V(\varpi_i) \to V(\varpi_i + \delta)$$

で, $v_{\varpi_i}$ を $S_{t(-\alpha_i^\vee)} v_{\varpi_i+\delta}$ に送るものが存在する.

一方, $\varpi_i$ も $\varpi_i + \delta$ も $\mathbb{Z}\delta$ を法とすればウェイトは同じなので, $\mathbf{U}'_q$ の表現の同型

$$V(\varpi_i + d_i\delta) \to V(\varpi_i)$$

で, $S_w v_{\varpi_i + d_i\delta}$ を $S_w^{-1} v_{\varpi_i}$ に送るものが存在することも分かる. この逆写像を上の同型と合成すると, $V(\varpi_i)$ の $\mathbf{U}'_q$ の表現としての自己同型で $v_{\varpi_i}$ を $S_w^{-1} v_{\varpi_i}$ に送るものが構成される. これを $z$ で表わす. $z$ はウェイト $d_i\delta$ を持つ.

$\varpi_i$ も $\varpi_i + \delta$ も $\mathbb{Z}\delta$ を法とすればウェイトは同じなので, 次数作用素 $q^d$ をつぶした $\mathbf{U}'_q$ の表現としては, 準同型

$$V(\varpi_i) \to V(\varpi_i)$$

で, $v_{\varpi_i}$ を $S_{t(\alpha_i)} v_{\varpi_i}$ に送るものが, 普遍性により存在する. しかも, 結晶のレベルで考えてみると, extremal ベクトルが 0 に送られていないことから, これは同型写像であることが従う. そこで, この $\mathbf{U}'_q$ の表現としての自己同型写像を $z$ で表わす. $z$ はウェイトを $\delta$ ずらす.

$W(\varpi_i) \overset{\text{def.}}{=} V(\varpi_i)/z$ と定義して, **レベル 0 基本表現**という.

**定理 13.7** ([6, Th. 5.17])**.** (1) $W(\varpi_i)$ は $V(\varpi_i)$ のそれから誘導される標準基底を持つ．これを $\mathcal{B}(W(\varpi))$ で表わす.

(2) $W(\varpi_i)$ は有限次元の既約な $\mathbf{U}'_q$ の表現である.

(3) $V(\varpi_i)$ は, $W(\varpi_i)$ のアフィン化 $\mathbb{Q}(q)[z, z^{-1}] \otimes W(\varpi_i)$ と同型である.

有限次元性

************************

## 14. レベル 0 基本表現のテンソル積

この節の目的は, レベル 0 基本表現のテンソル積に標準基底を構成することである. ([6, §8] の紹介)

以下, 記号の節約のために二つのレベル 0 基本表現のテンソル積

$$V(\varpi_i) \otimes V(\varpi_j)$$

のときのみを考えるが, ここで述べる結果は, 二つ以上のレベル 0 基本表現のテンソル積のときの場合にそのまま拡張される.

次の結果は [AK] で示された補題 10.8 の逆である. (アファイン型でないときにも正しいかどうかは分からない.)

**補題 14.1.** *$\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ は有限で normal な ($\mathbf{U}'_q$ の意味の) 結晶とする. $b_1 \otimes b_2 \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ が extremal であるとすると, $b_1$, $b_2$ はともに extremal であり, そのウェイトは同じワイル・チェンバーに属する.*

[AK] T. Akasaka and M. Kashiwara, *Finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, Publ. RIMS **33** (1997), 839–867.

$z_i$, $z_j$ を $V(\varpi_i)$, $V(\varpi_j)$ それぞれの §13 における $\mathbf{U}'_q$ の表現としての自己同型とする. $i = j$ のときも $z_i$ と $z_j$ は違うものとして解釈する. 記号を変えるのが面倒なので, こうしておく.

標準基底を定義するためには, bar involution $\overline{\phantom{x}}$ を $V(\varpi_i) \otimes V(\varpi_j)$ に定義する必要がある. §9 で最高ウェイト表現と最低ウェイト表現のテンソル積の場合に見たように, 準 $R$ 行列を用いて安直な成分ごとの bar involution をひねらないと, テンソル積には bar involution が定義されない. ところが問題は, 準 $R$ 行列 $\Theta$ が完備化の中に定義されていて $V(\varpi_i) \otimes V(\varpi_j)$ には作用しないことである. ここが最高ウェイト表現と最低ウェイト表現のテンソル積との違いである. そこで

$$V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j) \overset{\text{def.}}{=} \mathbb{Q}(q_s)[[z_i/z_j]] \otimes_{\mathbb{Q}(q_s)[z_i/z_j]} (V(\varpi_i) \otimes V(\varpi_j))$$

と定義する.

**命題 14.2.** *$V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j)$ には, bar involution $\overline{\phantom{x}}$ で*

- $\overline{v_{\varpi_i} \otimes v_{\varpi_j}} = v_{\varpi_i} \otimes v_{\varpi_j}$,
- $z_i$, $z_j$ と可換

*を満たすものがただ一つ存在する.*

証明のあらすじを述べる.

(1) まず $(\overline{\phantom{x}} \otimes \overline{\phantom{x}}) \circ \Theta \colon V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j) \to V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j)$ が定義されていることをチェックする. $\Theta$ の定義を思い出し, $W(\varpi_i)$ は有限個のウェイト空間しかないことから完備化は $z_i/z_j$ の形式的巾級数で十分であることが従う.

(2) $(V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j))_{\varpi_i + \varpi_j}$ は, $\mathbb{Q}(q_s)[[z_i/z_j]]$-ベクトル空間として 1 次元である. (補題 14.1) よって

$$(\overline{\phantom{x}} \otimes \overline{\phantom{x}}) \circ \Theta(v_{\omega_i} \otimes v_{\omega_j}) = \varphi(z_i/z_j) u$$

なる $\varphi(z_i/z_j) \in \mathbb{Q}(q_s)[[z_i/z_j]]$ が存在するが, $\Theta$ の定義から $\varphi(0) = 1$ に注意して, $\overline{\phantom{x}} = \varphi(z_1/z_2)^{-1} (\overline{\phantom{x}} \otimes \overline{\phantom{x}}) \circ \Theta$ と定義する. これは求める性質を持つ.

(3) uniqueness は, $W(\varpi_i) \otimes W(\varpi_j)$ の既約性 (これは簡単に示せる) を使って証明する.

$V(\varpi_i)$ と $V(\varpi_j)$ の標準基底についての, $\overline{\phantom{x}}$ の表現行列は 上三角行列なので, 最高/最低ウェイト表現のテンソル積のときと同様にして次が示される. ($V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j)$ は無限次元だが, $\mathbb{Q}(q_s)[[z_i/z_j]] \otimes_{\mathbb{Q}(q_s)[z_i/z_j]} \mathbb{Q}(q_s)[z_i^{\pm}, z_j^{\pm}]$ 上は有限次元で, 実際にはそこの基底として作る.)

**命題 14.3.** *各 $b \in \mathcal{B}(\varpi_i)$, $b' \in \mathcal{B}(-\varpi_i)$ に対して $G(b \otimes b') \in V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j)$ であって, 次の二つの性質を持つものがただ一つ存在する:*

(A) $\overline{G(b \otimes b')} = G(b \otimes b')$

(B) $\mathcal{B}(\varpi_i) \otimes \mathcal{B}(\varpi_j)$ を用いて

$$G(b \otimes b') = b \otimes b' + \sum_{\substack{b_1 : \mathrm{wt}(b_1) > \mathrm{wt}(b) \\ b'_1 : \mathrm{wt}(b'_1) < \mathrm{wt}(b')}} a_{b_1, b'_1} b_1 \otimes b'_1 \qquad (a_{b_1, b'_1} \in q_s \mathbb{Z}[q_s]).$$

と表わされる．ただし，$b_1 \otimes b'_1$ は無限個現れる可能性がある．

ここで

$$\mathcal{B}(V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j)) \stackrel{\text{def.}}{=} \{G(b \otimes b') \mid b \in \mathcal{B}(\varpi_i), b' \in \mathcal{B}(\varpi_j)\}$$

とおく．

次に，まず，extremal ベクトルに着目する．

**補題 14.4.** $\mathcal{B}(V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j))$ の *extremal* ベクトルは，すべて完備化をする前の通常のテンソル積 $V(\varpi_i) \otimes V(\varpi_j)$ に属している．

証明. $v_{\varpi_i} \otimes v_{\varpi_j}$ は，$\mathcal{B}(V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j))$ に属していることに注意する．したがって，完備化をする前の通常のテンソル積 $V(\varpi_i) \otimes V(\varpi_j)$ に属している．また，$\mathcal{B}(V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j))$ に含まれる extremal ベクトルは，結晶のワイル群の作用で，ウェイトは $\varpi_i + \varpi_j + \mathbb{Z}\delta$ に入るようにすることができる．(定理 13.2) このとき，そのベクトルは $z_i^m v_{\varpi_i} \otimes z_j^n v_{\varpi_j}$ であり，$v_{\varpi_i} \otimes v_{\varpi_j}$ に単項式 $z_i^m z_j^n$ を掛けたものである．これも完備化する前の $V(\varpi_i) \otimes V(\varpi_j)$ に属している．よって extremal ベクトルはすべて完備化する前の $V(\varpi_i) \otimes V(\varpi_j)$ に入っている． □

そこで，有限部分を‘切り出す’．

$$V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{U}_q[z_i^{\pm}, z_j^{\pm}] v_{\varpi_i} \otimes v_{\varpi_j} \subset V(\varpi_i) \otimes V(\varpi_j) \subset V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j),$$

$$\mathcal{L}(V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j)) \stackrel{\text{def.}}{=} (\mathcal{L}(\varpi_i) \otimes \mathcal{L}(\varpi_j)) \cap \left(V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j)\right)$$

$$\mathcal{B}(V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j)) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{B}(V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j))$$

と定義する．次の性質は明らかである．

- $V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j)$ は bar involution $\overline{\phantom{x}}$ で保たれている．
- $\mathcal{L}(V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j)) / q_s \mathcal{L}(V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j)) \subset \mathcal{L}(\varpi_i) \otimes \mathcal{L}(\varpi_j) / q_s \left(\mathcal{L}(\varpi_i) \otimes \mathcal{L}(\varpi_j)\right)$

二項目目の $\subset$ は，等号であるかどうかはアプリオリには分からない．

しかし，少なくとも extremal ベクトルがすんでいるウェイト $\mu \in W \cdot (\varpi_i + \varpi_j) + \mathbb{Z}\delta$ については，先の補題から差がなく，$(V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j))_\mu = (V(\varpi_i) \otimes V(\varpi_j))_\mu$ である．

また，$\mathcal{B}(V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j))$ に含まれるベクトルは，柏原作用素で extremal ベクトルに送ることができる．このとき上の性質から，それは $\mathcal{L}(V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j)) / q_s \mathcal{L}(V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j))$ という小さい方の $q_s = 0$ の空間に入っている．したがって，$\mathcal{B}(V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j))$ のベクトルは，少なくとも $q_s = 0$ ではすべて $\mathcal{L}(V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j)) / q_s \mathcal{L}(V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j))$ の中に入ってくれる．これで $q_s = 0$ では，$\mathcal{L}(V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j)) / q_s \mathcal{L}(V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j)) = \mathcal{L}(\varpi_i) \otimes \mathcal{L}(\varpi_j) / q_s \left(\mathcal{L}(\varpi_i) \otimes \mathcal{L}(\varpi_j)\right)$ となっていることが分かった．

まだ，$\mathcal{B}(V(\varpi_i) \widehat{\otimes} V(\varpi_j))$ の元が本当に $V(\varpi_i) \breve{\otimes} V(\varpi_j)$ に入っていることは保証されないのだが，extremal ベクトルがそうであることを使って，‘帰納的に’すべてのベクトルが入っていることを示すことができる．

*********************************************************

## 15. EXTREMAL ウェイト加群とテンソル積表現

$\lambda$をレベル0支配的なウェイトとし, $\lambda=\sum_{i\in I_0}\lambda_i\varpi_i$と表わす. このときレベル0基本表現のテンソル積

$$\widetilde{V}(\lambda)=\bigotimes_{i\in I_0}V(\varpi_i)^{\otimes\lambda_i}$$

を考える. ここで, $I_0$に順序を付け, その順番にテンソル積を取るものとする. (順番の取り方は本質的でないので, 記号の中に順番によることを含めない.)

$\widetilde{V}(\lambda)$は, $\mathfrak{L}(\lambda)$をsubvarietyとして含む$\widetilde{\mathfrak{Z}}(\lambda)$(これは$I_0$の順序に応じて定義される)の同変$K$群$K^{T_\lambda}(\widetilde{\mathfrak{Z}}(\lambda))$として実現される. ただし, $T_\lambda$は, $G_\lambda$の極大トーラスで, $\widetilde{\mathfrak{Z}}(\lambda)$は, $T_\lambda$の作用は持つが, $G_\lambda$の作用は持たない. また bar involution は, Grothendieck-Serre duality からの補正項のために定義されない.

$V(\varpi_i)$の第$\nu$番目の成分に対する§13における$\mathbf{U}'_q$の表現としての自己同型を$z_{i,\nu}$で表わす. $(1\le\nu\le\lambda_i)$ これらは互いに可換である. よって$\widetilde{V}(\lambda)$にはローラン多項式環

$$\mathbb{Q}(q_s)[z_{i,1}^{\pm},\dots,z_{i,\lambda_i}^{\pm}]_{i\in I_0}$$

の表現の構造が入る.

$V(\varpi_i)$のextremal ウェイトベクトル$v_{\varpi_i}$のテンソル積を$\widetilde{v}_\lambda\in\widetilde{V}(\lambda)$で表わす.

さらに

$$\check{V}(\lambda)\overset{\text{def.}}{=}\mathbf{U}_q[z_{i,1}^{\pm},\dots,z_{i,\lambda_i}^{\pm}]_{i\in I_0}\widetilde{v}_\lambda\subset\widetilde{V}(\lambda)$$

とおく. 前節の結果によって, これは標準基底$\mathcal{B}(\check{V}(\lambda))$を持つ. 対応する$\mathbf{A}_0$-formは, $\mathfrak{L}(\varpi_i)^{\otimes\lambda_i}\cap\check{V}(\lambda)$である. これを$\check{\mathfrak{L}}(\lambda)$で表わす. $\widetilde{v}_\lambda$を含む連結成分を$\mathcal{B}_0(\check{V}(\lambda))$とおく.

また, $\widetilde{v}_\lambda$は, ウェイトが$\lambda$のextremalベクトルであるから, 定理10.14(1)(普遍性)によって表現の準同型

$$\Phi_\lambda\colon V(\lambda)\to\check{V}(\lambda);\qquad v_\lambda\mapsto\widetilde{v}_\lambda$$

がただ一つ存在する.

$\#I_0$-個の分割の組$\mathbf{c}_0=(Y^i)_{i\in I_0}$で, $i$成分の行の数が$\lambda_i$以下のもの全体を$\mathrm{PolIrr}(G_\lambda)$で表わす. polynomial既約表現の全体である.

**命題 15.1.** $\mathbf{c}_0\in\mathrm{PolIrr}(G_\lambda)$に対する純虚数元$S_{\mathbf{c}_0}$と, 対応するシューア関数の積$s_{\mathbf{c}_0}$の変数に上の自己同型$z_{i,\nu}$を代入した$s_{\mathbf{c}_0}(z)$を考える. このとき次が成り立つ.

$$\Phi_\lambda(S_{\mathbf{c}_0}v_\lambda)=s_{\mathbf{c}_0}(z)\widetilde{v}_\lambda.$$

いう必要はないかと思うが, $\mathbf{c}_0$の条件から, シューア関数は, 高次の変数を$z_{i,\lambda_i+1}=z_{i,\lambda_i+2}=\dots=0$と消しても0にならないことに注意しよう. たとえば$\lambda_i=2$のときは,

$$z_1z_2+z_1z_3+\dots\mapsto z_1z_2$$

だが,

$$z_1z_2z_3+\dots\mapsto 0$$

である.

この命題は次のようにして分かる.

- 補題13.4を基本表現に適用したものより, $\widetilde{P}_{i,1}$については正しい.
- $\widetilde{P}_{i,k}$の余積$\Delta\widetilde{P}_{i,k}$が, ‘ほとんど’対称多項式の余積に同じである. (これは計算で示す.)
- そのときのerror termがextremalベクトルについては消える.

**系 15.2.** (1) $S_{\mathbf{c}_0}$については, 符号の*umbiguity*なく, すべて$S_{\mathbf{c}_0}\in\mathcal{B}(\infty)+q_s\mathfrak{L}(\infty)$となる.

(2) $V(\lambda)$の*extremal*ベクトルは, ある$\mathbf{c}_0\in\mathrm{PolIrr}(G_\lambda)$に対する$S_{\mathbf{c}_0}v_\lambda$をワイル群で移したものである.

証明. (1) 記号を省略するために, $i \in I_0$ の一カ所だけにヤング図式があって他は全部 $\emptyset$ とする. 列の数に関する帰納法で示す. $\mathbf{c}_0 = \emptyset$ のときは明らか.

一番長い列の長さを $k$ としたとき, $\lambda = k\varpi_i$ に対応する extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ を考える. このとき $k$ 次初等対称多項式は, 単なる単項式 $z_1 z_2 \cdots z_k$ である. これは結晶の自己同型に対応していた. よって, $s_{\mathbf{c}_0}(z)\widetilde{v}_\lambda$ を $z_1 \cdots z_k$ で割ることができる. これは, $S_{\mathbf{c}_0} u_\lambda$ の方では, $\widetilde{P}_{i,k}$ で '割る' ことを意味し, 長さ $k$ の列をはずしていくことに対応する. よって, 結局長さ $k$ の列はなくなって帰納法の仮定より結論は正しい.

(2) 定理 13.2 で, すでに可能性としてありうるのは $S_{\mathbf{c}_0} u_\lambda$ だけであることは分かっていた. (符号の umbiguity はたった今消した.) $\mathbf{c}_0 \notin \mathrm{PolIrr}(G_\lambda)$ のときは, $S_{\mathbf{c}_0} u_\lambda = 0$ であった (補題 13.3). 上の注意により, $\mathbf{c}_0 \in \mathrm{PolIrr}(G_\lambda)$ のときは, $S_{\mathbf{c}_0} u_\lambda \neq 0$ も分かった. □

**定理 15.3.** 任意の *PBW* 基底の元 $L(\mathbf{c}, p)$ について符号の *umbiguity* はなく, すべて + となる.

証明. 上の事実が分かれば, あとは Lusztig による次の braid 群の作用と, 標準基底の compatibility の結果を用いればよい. (これは柏原理論によっているが, 対称型のときは, 幾何学的に示すことができる.)

- ${}^i\pi\colon \mathbf{U}_q^- \to \mathbf{U}_q^-[i]$, $\pi^i\colon \mathbf{U}_q^- \to {}^*\mathbf{U}_q^-[i]$ を §7 のように定義する. このとき $\mathcal{B}(\infty)$ は, 射影 ${}^i\pi$, $\pi^i$ で, 0 になる元を取り除けば, $\mathbf{U}_q^-[i]$, ${}^*\mathbf{U}_q^-[i]$ の基底に落ちる.
- $b \in \mathcal{B}(\infty)$ が, ${}^i\pi(b) \neq 0$ とすると, $T_i({}^i\pi(b)) = \pi^i(b')$ となる $b' \in \mathcal{B}(\infty)$ が存在し, 対応 $b \longleftrightarrow b'$ で, 射影で落ちない標準基底の間の全単射が定められる.

□

**定理 15.4.** $\Phi_\lambda$ は単射であり, $\mathcal{B}(\lambda)$ を
$$\left\{ s_{\mathbf{c}_0}(z)b' \;\middle|\; \mathbf{c} \in \mathrm{PolyIrr}(G_\lambda), b' \in \mathcal{B}_0(\check{V}(\lambda)) \right\}$$
全単射に移す.

証明のあらすじ. $\Phi_\lambda$ は表現の準同型であるから, $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ と可換である. また, 命題 15.1 と $z_{i,\nu}$ が結晶構造を保っていたことにより, extremal ベクトルの行き先は, $\check{\mathcal{L}}(\lambda)$ に属する. したがって, $\Phi_\lambda(\mathcal{L}(\lambda)) \subset \check{\mathcal{L}}(\lambda)$ が従う. さらに, 誘導される線型写像
$$\Phi_\lambda|_{q_s=0} : \mathcal{L}(\lambda)/q_s\mathcal{L}(\lambda) \to \check{\mathcal{L}}(\lambda)/q_s\check{\mathcal{L}}(\lambda)$$
を考えると, ふたたび命題 15.1 によって, $\mathcal{B}(\lambda)$ が上の主張の集合, もしくは 0 に移すことが従う. もしも 0 に移す元があるとすれば, それは $\mathcal{B}(\lambda)$ の連結成分であり, 特に extremal ベクトルが中にあるが, それは命題 15.1 に矛盾する. したがって 0 に行く元はない. また全射性は定義から明らかで, 単射であることも簡単に分かる. よって $\Phi_\lambda|_{q_s=0}$ は, $\mathcal{B}(\lambda)$ と主張の集合の間の全単射を $q_s = 0$ で, 与えることが示された.

$\Phi_\lambda$ は, $\overline{\phantom{x}}$ と可換であり, さらに $\mathbf{A}$-form を $\mathbf{A}$-form に移すことは定義から明らかである. 従って, 標準基底を主張の標準基底に移すことが分かり, 特に $\Phi_\lambda$ は単射である. □

## 16. Peter-Weyl 型定理

ここでは, $P^0_{\mathrm{cl}}$ に対応した modified enveloping algebra $\widetilde{\mathbf{U}}_q$ を考える. $\widetilde{\mathbf{U}}'_q$ と表わすべきであるが, $\widetilde{\mathbf{U}}_q$ と書く.

$\# = * \circ \vee$ とおく. 標準基底 $\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ は, これで不変である. $\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ で $\mathcal{B}(\lambda)^\#$ と柏原作用素でつながっている元の全体を $\mathcal{B}[\lambda]$ であらわす. $\lambda$ と $\mu$ が $W_0$ で移りあっているときは, $\mathcal{B}[\lambda] = \mathcal{B}[\mu]$ であり, そうでないときは disjoint である. したがって

$$\mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q) = \bigsqcup_{\lambda \text{ はレベル 0 支配的}} \mathcal{B}[\lambda]$$

と分解し, これは両側結晶構造と compatible である.

$P^0_{\mathrm{cl}}$ を有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}_0$ のウェイト格子と同一視して, 支配的順序を定義しておく.

**定義 16.1.** Let $\widetilde{\mathbf{U}}_q[{}^{\geq}\lambda]$ (resp. $\widetilde{\mathbf{U}}_q[{}^{>}\lambda]$) be the two–sided ideal of $\widetilde{\mathbf{U}}_q$ consisting of all elements $x \in \widetilde{\mathbf{U}}_q$ acting on $V(\lambda')$ by 0 for any $\lambda' \not\geq \lambda$ (resp. $\lambda' \not> \lambda$). Let $\widetilde{\mathbf{U}}_q[\lambda] = \widetilde{\mathbf{U}}_q[{}^{\geq}\lambda]/\widetilde{\mathbf{U}}_q[{}^{>}\lambda]$. We define ${}_{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{U}}_q[{}^{\geq}\lambda]$, ${}_{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{U}}_q[{}^{>}\lambda]$ and ${}_{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{U}}_q[\lambda]$ in an analogous manner.

$\mathrm{Irr}(G_\lambda)$ を $G_\lambda$ のすべての既約表現の集合とする. Schur 関数でいえば, 行列式表現に対応する $z_{i,1}\cdots z_{i,\lambda_i}$ の負巾を掛けたものも合わせたものである. $S_{\mathbf{c}_0}$ の定義を, $\mathbf{c}_0$ が polynomial 表現の双対のときには, 対応して $\mathbf{U}_q^- \xrightarrow{\vee} \mathbf{U}_q^+$ で移した $\mathbf{U}_q^+$ の元とする.

$\mathcal{B}_W(\lambda)$ を有限結晶 $\bigotimes_{i\in I_0} \mathcal{B}(W(\varpi_i))^{\otimes \lambda_i}$ とする. このとき前節の結果から

$$\mathcal{B}(\lambda) = \mathrm{Irr}(G_\lambda) \times \mathcal{B}_W(\lambda) \tag{16.2}$$

という全単射が存在する. ただし, この分解は結晶構造とは compatible でない.

**定理 16.3.** (1) $b \in \mathcal{B}(\widetilde{\mathbf{U}}_q)$ が $\mathcal{B}[\lambda]$ に属する必要十分条件は $b \in \widetilde{\mathbf{U}}_q[{}^{\geq}\lambda]$ かつ, $b \neq 0$ *in* $\widetilde{\mathbf{U}}_q[\lambda]$ である.

(2) $\mathcal{B}[\lambda]$ は, $\widetilde{\mathbf{U}}_q[\lambda]$ の標準基底である.

(3) $b \in \mathcal{B}[\lambda]$ について次が成り立つ.

$$b \equiv b_1 s b_2^\# \mod \widetilde{\mathbf{U}}_q[{}^{>}\lambda], \qquad b_1, b_2 \in \mathcal{B}_W(\lambda), s \in \mathrm{Irr}\, G_\lambda$$

この対応によって全単射

$$\mathcal{B}[\lambda] \ni b \longmapsto (b_1, s, b_2) \in \mathcal{B}_W(\lambda) \times \mathrm{Irr}(G_\lambda) \times \mathcal{B}_W(\lambda)$$

が定まり, さらに, $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ は, $(b_1, s)$ を上の(16.2) によって $\mathcal{B}(\lambda)$ と思って適用したものに等しい. $\widetilde{e}_i^*$, $\widetilde{f}_i^*$ についても, $*$ を適用すればよい.

京都大学大学院理学研究科
*E-mail address*: nakajima@math.kyoto-u.ac.jp