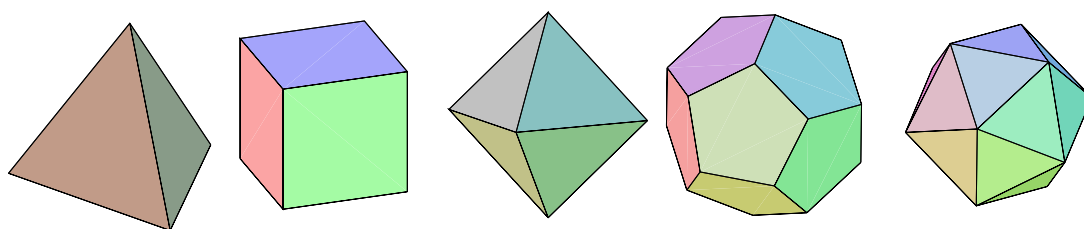


講座：数学の発見 – クラスタ代数とルート系

中島 啓

ABSTRACT. 哲学者プラトンは、正多面体が5種類しかないことを宇宙の基本原理としたそうです。現代数学において、この正多面体がディンキン (もしくはコクセター) 図式として現れることが、数多く観察されています。そして、この観察を通じて、一見すると関係がないと思われる二つの対象の間に深い関係があることが判明したりして、新しい数学が作られています。そのような例として、フォーミンとゼレbinsキーが、2002年に導入したクラスタ代数について、フリーズと呼ばれる数遊び (小学生にも理解できる!) から始めて、紹介したいと思います。



1. CONWAY-COXETER FRIEZE

frieze: 部屋や建物にめぐらした水平の帯状の彫刻のある小壁

次のような数遊び (Conway-Coxeter frieze とよばれる) を考えます。

- まず、下の箱の中のように1を並べます。縦に折れ線になるように、いくつか1を並べ、一番上の行と、下の行は、一つ飛ばしに1を並べます。最初の折れ線は、どのように折れていても構いませんし、いくら長くても構いません。

- 次に、ひし形にならんだ数

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{array}$$

が、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。
たとえば、次のようなものです。

$$\begin{array}{cccccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \\ \boxed{1} & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & \\ & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & 2 & & 1 \\ & & \boxed{1} & & 7 & & 3 & & 1 & \\ & & & \boxed{1} & & 2 & & 4 & & 1 \\ & & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \end{array}$$

最初に左端に並べる箱は、どのようにギザギザに並んでいても構いません。
もう少し複雑な例を上げます。

$$\begin{array}{cccccccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\ \boxed{1} & & 2 & & 2 & & 2 & & 3 & & 2 & & 1 & \\ & \boxed{1} & & 3 & & 3 & & 5 & & 5 & & 1 & & \\ & & \boxed{1} & & 4 & & 7 & & 8 & & 2 & & 1 & \\ & & & \boxed{1} & & 9 & & 11 & & 3 & & 1 & & \\ & & & & \boxed{1} & & 2 & & 14 & & 4 & & 1 & \\ & & & & & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & 1 & & \\ & & & & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \end{array}$$

今度は、途中で大きな数も出てきました。
このとき、次のことが成り立ちます。

- 定理 1.1. (1) このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
(2) しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

上の例では、確かにそのようになっていますが、どのように最初に 1 を並べても、そのようになる、ということが定理の主張です。上の決め方によると、 $c = (ad+1)/b$ ですから、 a, b, d によっては c は分数になるかもしれないので、これは明らかではありません。

今度は、数字を文字式に変えて同じ遊びを考えてみます。折れ線に 1 を並べる代わりに、変数 x_1, x_2, \dots を並べ、今までと同じように、式がひし形

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{array}$$

にならんだときに、 $bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、式を計算していきます。あまり式が多いと大変なので、最初は二個でやってみます。 $x_1 = x_2 = 1$ とおくと、もともとの遊びになることを注意しながら計算してみましょう。

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & & \boxed{1} & \\ x_1 & & x_3 & \\ & & & \boxed{1} \\ & x_2 & x_4 & \\ & & & \boxed{1} \\ & & & x_5 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_3 = \frac{x_2 + 1}{x_1}, \quad x_4 = \frac{x_3 + 1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1 x_2}, \\ x_5 = \frac{x_4 + 1}{x_3} = \dots = \frac{x_1 + 1}{x_2}, \end{array}$$

x_5 は各自チェックしていただくとして、その次を計算してみると、

$$\frac{x_5 + 1}{x_4} = \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_2} \cdot \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 + 1} = x_1$$

と x_1 に戻ります。次は、 $(x_1+1)/x_5 = x_2$ で、以下繰り返します。

もう一つ増やして三つから出発すると、途中で計算間違いしないようにするのは、大変ですが、答えは次のようになります。

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & & \boxed{1} & \\ x_1 & & x_4 & \\ & & & \boxed{1} \\ & x_2 & x_6 & \\ & & & \boxed{1} \\ & x_3 & x_5 & \\ & & & \boxed{1} \\ & & & x_7 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_4 = \frac{x_2 + 1}{x_1}, \quad x_5 = \frac{x_2 + 1}{x_3}, \quad x_6 = \frac{x_4 x_5 + 1}{x_2} = \frac{x_2^2 + 2x_2 + 1 + x_1 x_3}{x_1 x_2 x_3}, \\ x_7 = \frac{x_6 + 1}{x_4} = \dots = \frac{1 + x_2 + x_1 x_3}{x_2 x_3}, \quad x_8 = \frac{x_6 + 1}{x_5} = \dots = \frac{1 + x_2 + x_1 x_3}{x_1 x_2}, \\ x_9 = \frac{x_7 x_8 + 1}{x_6} = \dots = \frac{1 + x_1 x_3}{x_2} \end{array}$$

ここからは

$$\begin{array}{l} \frac{x_9 + 1}{x_7} = x_3, \quad \frac{x_9 + 1}{x_8} = x_1, \\ \frac{x_1 x_3 + 1}{x_9} = x_2 \end{array}$$

となって、以下繰り返す。

数式の場合には、先の定理の拡張として次が成り立ちます。

- 定理 1.2. (1) このようにして現れる x_i は、最初に与えられた変数 (上の例の x_1, x_2, x_3) で表すと、分母は単項式、分子は正の整数を係数とする多項式となる、分数式で表される。
- (2) 最初に与えられた変数を除くと、必ず分数式になり、また分母に現れる単項式はすべて異なる。
- (3) しばらく並べると、上のように再び最初の変数が折れ線状に並ぶ。

もう一個やってみましょう。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \\
 & & x_1 & & x_5 & & x_9 & & x_{13} & & x_4 \\
 & & & & x_2 & & x_7 & & x_{11} & & x_3 \\
 & & x_3 & & x_6 & & x_{10} & & x_{14} & & x_2 \\
 & & & & x_4 & & x_8 & & x_{12} & & x_1 \\
 & & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \\
 x_5 = \frac{x_2 + 1}{x_1}, & x_6 = \frac{x_2 x_4 + 1}{x_3}, & x_7 = \frac{x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_1 x_3 + 1}{x_1 x_2 x_3}, \\
 x_8 = \frac{x_2 x_4 + x_3 + 1}{x_3 x_4}, & x_9 = \frac{x_1 x_3 + x_2 x_4 + 1}{x_2 x_3}, \\
 x_{10} = \frac{x_2^2 x_4 + x_2 x_4 + x_2 + x_2 x_3 + 1 + x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_3^2}{x_1 x_2 x_3 x_4}, \\
 x_{11} = \frac{x_1 x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_4 + x_3 + 1}{x_2 x_3 x_4}, \\
 x_{12} = \frac{x_2 + x_1 x_3 + 1}{x_1 x_2}, & x_{13} = \frac{x_3 + 1}{x_4}, & x_{14} = \frac{x_1 x_3 + 1}{x_2}
 \end{array}$$

今度は 14 個の変数が出てきました。前のものも見直してみると、5 個、9 個、14 個と増えています。次の問に自然にたどり着きます。

問: 最初に与える変数の数を n としたとき、全部で出てくる変数の個数 (5, 9, 14, ...) の一般項は、なんだろうか?

本当は、ここでみなさんに考えていただきたいところですが、時間がないので答えを書いてしまいますと、

答: $n(n+3)/2$ となります。

階差数列を考えると、4, 5 となっていますから、以下 6, 7, ... と続くと想像するのは、自然なことです。たしかにそうなっているというのが上の答えです。

もう少しもっともらしい計算を説明します。(それでも証明にはなっていません。) 先に書いたように、分母に出てくる単項式はすべて異なっているのですが、上で求めたものを書いてみますと

$$n = 2 \text{ のとき} : x_1, x_1x_2, x_2$$

$$n = 3 \text{ のとき} : x_1, x_3, x_1x_2x_3, x_2x_3, x_1, x_2$$

$$n = 4 \text{ のとき} : x_1, x_3, x_1x_2x_3, x_3x_4, x_2x_3, x_1x_2x_3x_4, x_2x_3x_4, x_1x_2, x_4, x_2$$

となって、二つの整数 $1 \leq i \leq j \leq n$ の組に対して x_i から x_j まで掛ける単項式

$$x_i x_{i+1} \cdots x_j$$

が現れていることが見て取れます。この個数は、 $n(n+1)/2$ なので、最初の n 個と合わせて $n(n+1)/2 + n = n(n+3)/2$ となります。

次に二個の変数から出発した例に戻ります。

$$\begin{array}{cccc}
 \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
 x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_2 \\
 & & x_2 & & x_4 & & x_1 & & x_3 \\
 & & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_3 = \frac{x_2 + 1}{x_1}, \quad x_4 = \frac{x_3 + 1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1x_2}, \\
 x_5 = \frac{x_4 + 1}{x_3} = \frac{x_1 + 1}{x_2}
 \end{array}$$

ルールを少し変更して、上の段の変数から下の段の変数を作るときには、

$$x_{i+1} = \frac{1 + x_i^2}{x_{i-1}}$$

と二乗することにします。下の段の変数から上の段の変数を作るルールは変えません。 $\boxed{1}$ は省略して書くことにすると、

$$\begin{array}{cccc}
 x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_1 \\
 & & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_2
 \end{array}$$

となります。実際、

$$\begin{array}{l}
 x_3 = \frac{x_2 + 1}{x_1}, \quad x_4 = \frac{1 + x_3^2}{x_2} = \cdots = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + 1}{x_1^2x_2}, \\
 x_5 = \frac{1 + x_4}{x_3} = \cdots = \frac{x_2 + 1 + x_1^2}{x_1x_2}, \quad x_6 = \frac{1 + x_5^2}{x_4} = \cdots = \frac{1 + x_1^2}{x_2},
 \end{array}$$

で、さらに

$$x_7 = \frac{1 + x_6}{x_5} = \cdots = x_1, \quad x_8 = \frac{1 + x_7^2}{x_6} = x_2$$

となって元に戻ります。このルールを図式として、

$$\bullet \Rightarrow \bullet$$

と表します。線が二本引かれているのは、二乗を表し、左から右に矢印があるのは、上から下の変数を作るときに二乗を使うが、下から上のときには、前の式を使うことを表しています。あとでルート系と関係付けますが、最初の場合をタイプ A_2 、今の場合をタイプ B_2 と名付けることにします。上の図式は、ルート系のディンキン図式とよばれるものです。 $x_1 = x_2 = 1$ を代入すると

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ & 1 & 5 & 2 & 1 \end{array}$$

となります。上の数は二乗してから、前のルールで次の数を定めるわけです。

次に、三乗にしてみます。名前はタイプ G_2 で、ディンキン図式は

$$\bullet \Rightarrow \equiv \bullet$$

です。 $x_1 = x_2 = 1$ としてやってみると、

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ & 1 & 9 & 14 & 2 & 1 \end{array}$$

となります。途中で $(5^3 + 1)/9 = 14$ となっているところなど、おおっと思わざるをえません。変数でやるのは苦痛ですが、答えは

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 & & x_1 \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_8 & & x_2 \end{array}$$

となります。ただし、

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_2 + 1}{x_1}, & x_4 &= \frac{1 + x_3^3}{x_2} = \dots = \frac{x_1^3 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1}{x_1^3 x_2}, \\ x_5 &= \frac{1 + x_4}{x_3} = \dots = \frac{x_2^2 + 2x_2 + x_1^3 + 1}{x_1^2 x_2}, \\ x_6 &= \frac{1 + x_5^3}{x_4} = \dots = \frac{x_1^6 + 2x_1^3 + 3x_2 x_1^3 + 1 + x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2}{x_2^2 x_1^3}, \\ x_7 &= \frac{1 + x_6}{x_5} = \dots = \frac{x_1^3 + x_2 + 1}{x_1 x_2}, & x_8 &= \frac{1 + x_7^3}{x_6} = \dots = \frac{x_1^3 + 1}{x_2} \end{aligned}$$

であり、さらに

$$x_9 = \frac{1 + x_8}{x_7} = \dots = x_1, \quad x_{10} = \frac{1 + x_9^3}{x_8} = x_2$$

となって元に戻ります。

さらに指数をもう一つ増やし、四乗にしてみます。この場合は、あとで出てくるディンキン図式の分類からははずれているのですが、それを拡張したアファイン型ディンキン図式とよばれるものに対応しており、 $A_2^{(2)}$ 型とよばれます。

$x_1 = x_2 = 1$ としてやってみると、四乗の計算のできる電卓をもっていないと、ちょっと苦痛だと思いますが、

1	2	9	43	206	987	4729
1	17	386	8857	203321	4667522	107149681

となります。さらに続けていくと、どんどん数が大きくなっていくことから、今度はもとに戻ってくることはないだろうと想像されます。実際に、それは正しいことが知られています。ただし、出てくる数がずっと整数である、ということは、この場合でも成り立っています。

今度は、上の段から下に行くときも、下の段から上に行くときも両方共に

$$x_{i+1} = \frac{1 + x_i^2}{x_{i-1}}$$

とすることにします。その場合は、 $A_1^{(1)}$ 型とよばれています。答えは

1	2	13	89	610	4181	28657
1	5	34	233	1597	10946	75025

となります。この場合もさらに続けていくと、どんどん数が大きくなっていくことから、今度はもとに戻ってくることはないだろうと想像されます。

今の場合、これは初等的に証明することができます。そのためには上の数列が、漸化式

$$x_{i+2} = 3x_{i+1} - x_i, \quad x_1 = x_2 = 1$$

が成り立っていることを証明します。これは、線形の漸化式ですから、一般項を求めることができ、 $n \rightarrow \infty$ のときに発散することがチェックできます。

さて、上の線形漸化式が成り立つことの証明ですが、逆にこの線形漸化式を満たす数列が

$$(1.3) \quad x_{i+2}x_i = 1 + x_{i+1}^2$$

を満たすことを帰納法で示します。 $i = 1$ のときは正しいことは、明らかです。(1.3) が $i - 1$ のとき正しい、つまり $x_{i+1}x_{i-1} = 1 + x_i^2$ と仮定すると、

$$x_{i+2}x_i = (3x_{i+1} - x_i)x_i = 3x_{i+1}x_i - x_i^2 = 3x_{i+1}x_i - x_{i+1}x_{i-1} + 1 = x_{i+1}(3x_i - x_{i-1}) + 1$$

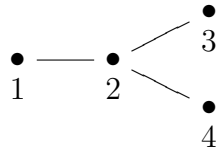
となりますが、これは漸化式により

$$x_{i+1}^2 + 1$$

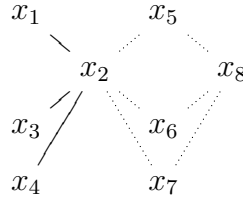
であり、(1.3) が i のときにも成り立つことが示されました。

証明はできますが、元々の漸化式は、二乗や割り算を含んでいたにも関わらず、簡単な線形漸化式が成り立っている、というのには、驚かされます。

この節の最後に分岐がある場合の数遊びのルールを書きます。これは、 D_4 型といわれるもので、あとで出てくるディンキン図形を使うと、



です。この図に合わせて



をと並べていきます。ルールは、

$$x_5 = \frac{1+x_2}{x_1}, \quad x_6 = \frac{1+x_2}{x_3}, \quad x_7 = \frac{1+x_2}{x_4}, \quad x_8 = \frac{1+x_5x_6x_7}{x_2}$$

で、 x_5, x_6, x_7 を作るルールは前と同じですが、 x_8 を作る時は、 $x_5x_6x_7$ を掛けているところが今までと異なります。

実際に計算してみると、

$$\begin{array}{cccccc}
 x_1 & x_5 & x_9 & x_{13} & x_{17} & \\
 & x_2 & x_8 & x_{12} & x_{16} & x_{20} \\
 x_3 & x_6 & x_{10} & x_{14} & x_{18} & \\
 x_4 & x_7 & x_{11} & x_{15} & x_{19} &
 \end{array}$$

で、

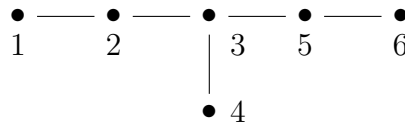
$$\begin{aligned}
 x_8 &= \frac{1+x_5x_6x_7}{x_2} = \frac{1+3x_2+3x_2^2+x_2^3+x_1x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4}, \\
 x_9 &= \frac{1+x_8}{x_5} = \frac{(1+x_2)^2+x_1x_3x_4}{x_2x_3x_4}, & x_{10} &= \frac{1+x_8}{x_6} = \frac{(1+x_2)^2+x_1x_3x_4}{x_1x_2x_4}, \\
 x_{11} &= \frac{1+x_8}{x_7} = \frac{(1+x_2)^2+x_1x_3x_4}{x_1x_2x_3}, \\
 x_{12} &= \frac{1+x_9x_{10}x_{11}}{x_8} = \frac{1}{x_1x_2^2x_3x_4} \left[(1+x_2)^3 + (3x_2+2)x_1x_3x_4 + x_1^2x_3^2x_4^2 \right], \\
 x_{13} &= \frac{1+x_{12}}{x_9} = \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_1x_2}, & x_{14} &= \frac{1+x_{12}}{x_{10}} = \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_2x_3}, \\
 x_{15} &= \frac{1+x_{12}}{x_{11}} = \frac{1+x_2+x_1x_3x_4}{x_2x_4}, & x_{16} &= \frac{1+x_{13}x_{14}x_{15}}{x_{12}} = \frac{1+x_1x_3x_4}{x_2}
 \end{aligned}$$

$$x_{17} = \frac{1 + x_{16}}{x_{13}} = x_1, \quad x_{18} = \frac{1 + x_{16}}{x_{14}} = x_3, \quad x_{19} = \frac{1 + x_{16}}{x_{15}} = x_4,$$

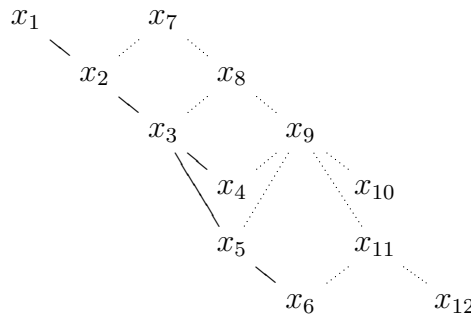
$$x_{20} = \frac{1 + x_{17}x_{18}x_{19}}{x_{16}} = x_2$$

となります。今回は、元に戻りました。

最後の例として、 E_6 型



の frieze を紹介します。ルールは、



と変数を並べたとき、三叉の頂点のところ

$$x_9 = \frac{1 + x_8x_4x_5}{x_3}$$

とするほかは、前と同じです。

$x_1 = x_2 = \dots = x_6 = 1$ として、やってみると、

1	2	2	2	7	5	3	2	2	1
	1	3	3	13	34	14	5	3	1
		1	4	19	63	95	23	7	1
			1	5	4	16	6	4	2
				1	5	23	11	26	8
					1	6	4	3	9
							1		

となる。まだ、戻ってきていないが、以下は同じようなパターンを繰り返して、元に戻る。

実は、これらの現象を説明するクラスター代数、とよばれている理論が Fomin-Zelevinsky によって作られています。

S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, 497–529 (electronic).

——, *Cluster algebras. II. Finite type classification*, *Invent. Math.* **154** (2003), no. 1, 63–121.

A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells*, *Duke Math. J.* **126** (2005), no. 1, 1–52.

——, *Cluster algebras. IV. Coefficients*, *Compos. Math.* **143** (2007), no. 1, 112–164.

また、この講座にあたっては

S. Fomin and N. Reading, *Root systems and generalized associahedra*, *Geometric combinatorics*, 63–131, *IAS/Park City Math. Ser.*, **13**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

を参考にしました。

今回の講座の目的は、この理論の一端を紹介することです。より具体的には

- (1) 上に出てきた分数式の分母の単項式の意味は何か？
- (2) 有限回で元に戻る場合と、そうでない場合の違いはどこから来るのか？

という問題に解答を与えることです。先の式を見ると、分母と分子では、分母の方がはるかに簡単になっていますので、これは frieze を理解するための第一歩といえるものです。そして、第二歩は、「上に出てきた分数式の分子の多項式の意味は何か？」という問を考えることとなります。これは、クラスター代数の研究が進む中で明らかにされたのですが、第一歩よりは遥かに難しく、今回の講座では省略します。

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kokai-koza/nakajima.pdf>

に、数年前の研究所の公開講座で使ったテキストに紹介があります。

2. 階数が2のルート系

この節では前節であげた最初の問題、分数式は巨大でいささか理解がしにくいので、とりあえず分母にあらわれる単項式を理解することを目指します。

まず最初の変数の数が2個の場合を調べます。変換則は

$$(2.1) \quad x_{i+1} = \begin{cases} \frac{1+x_i^d}{x_{i-1}} & (i \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1+x_i}{x_{i-1}} & (i \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad \text{もしくは} \quad x_{i+1} = \frac{1+x_i^2}{x_{i-1}}$$

でした。

A_2 型 ($d=1$) のとき

$$\begin{array}{cccc} x_1 & */x_1 & */x_2 & x_2 \\ & x_2 & */x_1x_2 & x_1 \end{array}$$

B_2 型 ($d = 2$) のとき

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & */x_1 & & */x_1x_2 & & x_1 \\ & & & & & & \\ & & x_2 & & */x_1^2x_2 & & */x_2 & & x_2 \end{array}$$

G_2 型 ($d = 3$) のとき

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & */x_1 & & */x_1^2x_2 & & */x_1x_2 & & x_1 \\ & & & & & & & & \\ & & x_2 & & */x_1^3x_2 & & */x_1^3x_2^2 & & */x_2 & & x_2 \end{array}$$

$A_2^{(2)}$ 型 ($d = 4$) のとき

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & & */x_1 & & */x_1^3x_2 & & */x_1^5x_2^2 & & */x_1^7x_2^3 & & */x_1^9x_2^4 & & \dots \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & x_2 & & */x_1^4x_2 & & */x_1^8x_2^3 & & */x_1^{12}x_2^5 & & */x_1^{16}x_2^7 & & */x_1^{20}x_2^9 \end{array}$$

$A_1^{(1)}$ 型 のとき

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & */x_1 & & */x_1^3x_2^2 & & */x_1^5x_2^4 \dots \\ & & & & & & \\ & & x_2 & & */x_1^2x_2 & & */x_1^4x_2^3 \end{array}$$

前節の計算に比べて、だいぶ簡単になりましたが、今度はパターンが分かったでしょうか？ 最初の変数 x_1, x_2 は例外扱いして、 x_3, x_4 からスタートしなければいけませんが、だいたい (2.1) において $1+$ の部分を無視して計算すれば、分子の形を忘れても正しいことが分かるでしょうか？ $1+$ を忘れることにすると、計算はだいぶ楽になります。

あとの都合上、二つを並べてベクトルにして、

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_1} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_2} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_1} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_6 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_2} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_1} \dots$$

としてみます。ただし、 s_1, s_2 は最初の変数 x_1, x_2 で表される有理式のベクトル $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$ から新しい有理式のベクトルを作る演算

$$s_1: \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} g/f \\ g \end{bmatrix} \quad s_2: \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f \\ f^d/g \end{bmatrix}$$

もしくは $A_1^{(1)}$ 型 のときは

$$s_1: \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} g^2/f \\ g \end{bmatrix} \quad s_2: \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f \\ f^2/g \end{bmatrix},$$

で、もともとの操作の $1+$ の部分を除いたものです。この操作で単項式は単項式に移されますので、指数だけに着目しても構いません。つまり上の操作の \log を取ることにして、

$$s_1: \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b - a \\ b \end{bmatrix} \quad s_2: \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ da - b \end{bmatrix},$$

もしくは $A_1^{(1)}$ 型の場合は

$$s_1: \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2b - a \\ b \end{bmatrix} \quad s_2: \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ 2a - b \end{bmatrix},$$

です。こう書いてしまうと、これは行列の掛け算で表すことができます。すなわち、

$$s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{もしくは} \quad s_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

です。

この操作は

$$s_1^2 = 1, \quad s_2^2 = 1,$$

を満たします。実際

$$s_2^2 \left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right) = s_2 \left(\begin{bmatrix} f \\ f^d/g \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f \\ \frac{f^d}{f^d/g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

ですし、 $s_1^2 = 1$ も同様です。行列で計算しても

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。しかし、先の操作で考えていたのは $\cdots s_1 s_2 s_1 s_2$ という繰り返しです。これはどうなっているのでしょうか？

A_2, B_2, G_2 型の場合は、元々の変換ではそれぞれ 5 回、6 回、8 回繰り返すと元に戻っていました。今の場合、行列の積を計算してみると、

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} d-1 & -1 \\ d & -1 \end{pmatrix}$$

で、 A_2 型 ($d=1$) のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

B_2 型 ($d=2$) のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

G_2 型 ($d=3$) のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが計算によりチェックできます。繰り返すと恒等変換になる回数が、3, 4, 6 と二回ずつ少なくなっていますが、1+ を省いてしまっても、繰り返すことには変わらないというわけです。

ところが $A_2^{(2)}$ 型のとくにやってみると、

$$s_1s_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad (s_1s_2)^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad (s_1s_2)^3 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}, \quad (s_1s_2)^4 = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix},$$

$$(s_1s_2)^5 = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 20 & -9 \end{pmatrix}, \quad (s_1s_2)^6 = \begin{pmatrix} 13 & -6 \\ 24 & -11 \end{pmatrix}, \quad (s_1s_2)^7 = \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ 28 & -13 \end{pmatrix},$$

実際、 A のジョルダン標準形を求めてみると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かるので、 s_1s_2 は何乗しても決して単位行列にはならないことが分かります。 $A_1^{(1)}$ 型ときには、

$$s_1s_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

のジョルダン標準型は上と同じで、やはり s_1s_2 は何乗しても決して単位行列にはならないことが分かります。

いささか天下りの的ですが、この行列をある直線に関する折り返し変換 (以下鏡映とよびます) で表すことを考えます。二乗して1になること、固有値が1と-1である、というのがそのように期待する根拠です。ただし、 s_1, s_2 は直交行列ではありませんから、何か直交でない基底に関して鏡映が行列表示されて、上の形で与えられている、と考えるわけです。

まず A_2 の場合には、次で与えられることが分かります。つまり、 s_1 は α_1 に直交する直

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & & \alpha_1 + \alpha_2 \\ & 120^\circ & \\ & & \alpha_2 \end{array}$$

図 1. A_2

線に関する折り返し、 s_2 を α_2 に直交する直線に関する折り返しとすると、図から

$$s_1(\alpha_1) = -\alpha_1, \quad s_1(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad s_2(\alpha_2) = -\alpha_2$$

ですから、まとめて

$$s_1(a\alpha_1 + b\alpha_2) = (b - a)\alpha_1 + b\alpha_2, \quad s_2(a\alpha_1 + b\alpha_2) = a\alpha_1 + (a - b)\alpha_2,$$

となり、 a と b をまとめて縦ベクトル $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ として s_1, s_2 を行列表示すれば、上の行列の $d = 1$ の場合、すなわち A_2 型の行列になる、というわけです。このとき鏡映の合成 s_1s_2 は、原点を中心とした 120° の回転変換になります。したがって

$$(s_1s_2)^3 = \text{恒等変換}$$

となり、確かに合っています。

B_2 と G_2 の場合には、 α_1 と α_2 の長さを変える必要があるので複雑になりますが、答えは次の通りです。答えの求め方は、鏡映変換が内積を用いて

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 3\alpha_1 + \alpha_2 & & 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ & & & & & & 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ & & 2\alpha_1 + \alpha_2 & & & & \\ & & & & & & \\ \alpha_1 & & \alpha_1 + \alpha_2 & & \alpha_1 & & \alpha_1 + \alpha_2 \\ & & 135^\circ & & \alpha_2 & & 150^\circ & & \alpha_2 \end{array}$$

図 2. B_2 と G_2

$$(2.2) \quad s_1(\alpha_2) = \alpha_2 - \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)}\alpha_1, \quad s_2(\alpha_1) = \alpha_1 - \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)}\alpha_2$$

となることから

$$(2.3) \quad \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = -1, \quad \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = -d$$

となることが要請です。この式から

$$\frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{|\alpha_1||\alpha_2|} = -\frac{\sqrt{d}}{2}$$

が成り立ちますので、 α_1 と α_2 のなす角度は $d = 1, 2, 3$ に応じて、 $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ であることになり、あとは、上の式に戻って α_1, α_2 の長さの比を求めれば、上の図になります。

では、 s_1s_2 はどうでしょうか？ B_2 の場合には、 90° の回転であること、 G_2 の場合には 60° の回転であることが分かりますので、それぞれ $(s_1s_2)^4 = \text{恒等変換}$ 、 $(s_1s_2)^6 = \text{恒等変換}$ となることが計算しなくても、直ちに従います。

$A_2^{(2)}$ や $A_1^{(1)}$ 型の場合はどうでしょうか？ 上の (2.3) の二つの式を掛けてみると、

$$4(\alpha_1, \alpha_2)^2 = d(\alpha_1, \alpha_1)(\alpha_2, \alpha_2)$$

となります。コーシー・シュワルツの不等式から、 $d > 4$ のときには、このような α_1, α_2 が決して取れないことが分かります。 $d = 4$ は、コーシー・シュワルツの不等式の等号成立の場合で、 α_1, α_2 はちょうど逆向きを向いていないといけなことが分かりますが、それは上の行列 s_1, s_2 をあたえません。 $A_1^{(1)}$ 型のときも同様に、 s_1, s_2 を実現することができないことが分かります。

$d < 4$ のときは、 d が自然数である、と要請すると $d = 1, 2, 3$ しかなく、それぞれ A_2, B_2, G_2 型に対応しているわけです。この分類は、あとで出てくるルート系の階数が 2 の場合を調べていることに対応します。

また、上の図の中に α_1, α_2 以外に、それらに s_1, s_2 を適用して得られるベクトルも書きました。この節の最初に行った計算と見比べてみると、 $x_1^b x_2^a$ と $b\alpha_1 + a\alpha_2$ によって、分母の式とベクトルが対応していることが見て取れます。

この観察から、 $s_2 s_1$ を何回か繰り返すと恒等変換になるということと、 s_1, s_2 を鏡映として実現できる、ということが対応しているらしい、という感じがお分かりになるでしょうか？

コーシー・シュワルツの不等式は、任意のベクトルの長さが正ということから従います。実際、二つのベクトル \vec{x}, \vec{y} に対して、

$$0 \leq (\vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2t(\vec{x}, \vec{y}) + t^2(\vec{y}, \vec{y})$$

に注意すると、判別式 $D/4 = (\vec{x}, \vec{y})^2 - (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y}) \leq 0$ が、コーシー・シュワルツの不等式に他なりません。実は、 $A_2^{(2)}$ や $A_1^{(1)}$ 型は、ベクトルの長さが正とは限らない内積を考えると実現することができることが分かります。つまり、内積が正定値である、ということと有限性に深い関係がある、というわけです。

これまでの議論は、分母だけを見ているわけで、分母が戻ってきたからといって、分子も戻ってくることの証明にはなっていないことに注意してください。しかし、それでも $A_2^{(2)}$ や $A_1^{(1)}$ 型の場合は、分母がもどってこないのですから、元に戻ってくることはないことは、まあだいたい分かるわけです。

3. 例外型ルート系と正多面体

前節の考察を拡張して、より一般に変数の数が n 個の場合の frieze に対して、分母の振る舞いを調べて、どのような場合に元に戻ってくることを期待できるかを検討したいと思います。戻ってくる frieze に対して、ルート系を対応させ、その分類を行うことが目標です。

特に例外型の E_6, E_7, E_8 型のルート系に、重点をおきます。アブストラクトに書いたように、これらのルート系は正多面体と対応させるのが自然であることが、いろいろな例で観察されており、一番興味深いと思われるからです。

正多面体と例外型のルート系の対応の、一番簡単な例をあとで説明するために、正多面体が、たかだか五種類しかないことの証明¹を行ないたいと思います。

証明. 一つの頂点に着目し、そのまわりに正 p 角形が q 枚集まっているとします。正 p 角形の内角が $180 - 360/p$ 度であることを思い出すと、 q 枚集まっても立体をなすために

$$\left(180 - \frac{360}{p}\right) \times q < 360$$

という不等式が成立する必要があります。これを整理すると

$$(3.1) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

となります。

この不等式を解きましょう。 $p \leq q$ であると仮定すると、

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{2}{p}$$

より、 $p < 4$ が分かり、 $p = 2$ または、 3 となります。 $p = 2$ は、正 p 角形がないので、不適です。したがって、 $q = 3$ となります。このとき、上の不等式に代入してみると、

$$\frac{1}{q} > \frac{1}{6}$$

となり、したがって、 $q = 3, 4, 5$ が答えになります。それぞれ、正四面体、正八面体、正二十面体ということになります。

次に、 $p > q$ とすると、やはり同様にして $q = 2$ または、 3 となります。正 p 角形を一つの角に二枚集めて立体を作ることはできないので、 $q = 2$ は不適です。したがって $q = 3$ であり、上と同様にして、 $p = 4, 5$ ということになります。それぞれ、正六面体、正十二面体ということになります。 証明終

正 n 面体	正 p 角形	q 枚
4	3	3
6	4	3
8	3	4
12	5	3
20	3	5

私は、前節の階数 2 のルート系の分類の証明と、同じ‘匂い’を感じますが、みなさんはどうでしょうか？

¹ほんとうに五種類あることの証明は省略します。

p と q を入れ替えたものは、正多面体としては異なりますが、(3.1) をみる限り、 p と q の役割は平等なので、一つにまとめることにすると、 p と q の組みは

$$(3, 3), (3, 4), (3, 5)$$

の三種類であるということになります。実は、 p と q を入れ替えてできる正多面体は面と頂点を入れ替えた、双対の関係にあります。正十二面体と正二十面体が、その例で、サッカーボールを見ると双対の関係がよく分かります。



図 3. サッカーボール

次に、階数を一つ増やし A_3 型の frieze の分母を調べてみます。

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & */x_1 & & */x_2x_3 & & x_3 \\ & x_2 & & */x_1x_2x_3 & & */x_2 & x_2 \\ x_3 & & */x_3 & & */x_1x_2 & & x_1 \end{array}$$

例によって、指数だけを見ることにすると

$$s_1: \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b-a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad s_2: \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ a+c-b \\ c \end{bmatrix}, \quad s_3: \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ b-c \end{bmatrix}$$

となります。前と同様に $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$ に対応させると、

$$\begin{aligned} s_1(\alpha_1) &= -\alpha_1, & s_1(\alpha_2) &= \alpha_1 + \alpha_2, & s_1(\alpha_3) &= \alpha_3, \\ s_2(\alpha_1) &= \alpha_1 + \alpha_2, & s_2(\alpha_2) &= -\alpha_2, & s_2(\alpha_3) &= \alpha_2 + \alpha_3, \\ s_3(\alpha_1) &= \alpha_1, & s_3(\alpha_2) &= \alpha_2 + \alpha_3, & s_3(\alpha_3) &= -\alpha_3 \end{aligned}$$

であり、前と同様に s_1, s_2, s_3 がそれぞれ、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に直交する平面に関する折り返しだと仮定してみると、(2.2) と同様の考察によって

$$\begin{aligned} \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = -1, & \quad \frac{2(\alpha_1, \alpha_3)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = 0, & \quad \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = -1, \\ \frac{2(\alpha_2, \alpha_3)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = -1, & \quad \frac{2(\alpha_1, \alpha_3)}{(\alpha_3, \alpha_3)} = 0, & \quad \frac{2(\alpha_2, \alpha_3)}{(\alpha_3, \alpha_3)} = -1 \end{aligned}$$

であることが条件になり、つまり $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は長さが同じで、 α_1 と α_2 、 α_2 と α_3 のなす角度はそれぞれ 120° 、そして α_1, α_3 は直交する、というのが条件になります。

これを 3次元空間の中に実現することも容易ですが、より見通しをよくするために \mathbb{R}^4 の中に取ります。

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおくと、上の内積の性質を満たしています。また、上の変換 s_1, s_2, s_3 はそれぞれ、第一、第二成分の入れ替え、第二、第三成分の入れ替え、第三、第四成分の入れ替え、になっています。

すると、 s_1, s_2, s_3 でいろいろな順番で掛けて得られる元の全体 (群とよばれるものになります) は、四文字のかってな入れ替えの全体のなす元の全体 (四次対称群とよばれます) であり、これを $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に次々に掛けてできるのは、四つの成分が $1, -1, 0, 0$ 一つづつからできているベクトルです。これを再び $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ で書き直すと

$$\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

に限られることが分かります。これは、 A_3 型のルート系とよばれているものです。

三つの変数が並んでいる frieze の分母に表れた単項式は、上のうちの + のものに対応していることが分かります。ただし、あくまで分母だけを考えるのは近似でしかないので、本当に上のルート系に対応しているかどうかは、別のやり方で証明する必要があります。

ここまでくれば、一直線に並んだ frieze に対応する A_n 型ルート系を作るのは容易です。 \mathbb{R}^{n+1} の座標ベクトルを e_i ($i = 1, \dots, n+1$) で表します。

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = e_2 - e_3, \quad \dots, \quad \alpha_n = e_n - e_{n+1}$$

とおくと、 A_3 型のとくと同様に、 s_1, s_2, \dots は、第一、第二成分の入れ替え、第二、第三成分の入れ替え、等となります。したがって、これらから生成される群は、 $(n+1)$ 文字の入れ換えの全体のなす対称群になります。そして、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ に次々と s_1, s_2, \dots を掛けて得られるベクトルの全体 (ルートとよばれる) は、

$$\Delta = \{e_i - e_j \mid i \neq j\}$$

であり、これをふたたび $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ で書き直すと、 $i < j$ のときは、

$$e_i - e_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1}$$

となります。 $(i > j$ のときは、全体を -1 倍すればよい。) 四変数の frieze のときに分母に出てきた単項式を見ると

$$x_i x_{i+1} \dots x_j \longleftrightarrow \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1}$$

として、対応していることが確かめられます。

今までの考察を一般化して、ベクトル $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が満たすべき性質を上げてみます。前に調べた階数 2 のときの考察から

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は、正定値の内積が入ったユークリッド空間 \mathbb{R}^n 中のベクトルである。とします。さらに

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は一次独立である。

ことも仮定します。次に、これは簡単のためにする約束ですが、階数 2 のときでいうと、上の段と下の段の変数の入れ替えの仕方は同じである、と仮定します。すると、 (α_i, α_i) と (α_j, α_j) は同じ値になりますが、これは、2 であると正規化しておきます。さらに、階数 2 のときのコーシー・シュワルツの不等式を使った考察から

- $i \neq j$ のとき、 (α_i, α_j) は、0 または -1 であるが従います。

このとき、ディンキン図式とよばれるグラフを次のように定めます。まず、頂点は、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ に対応する n 個の点として、 $i \neq j$ に対しては、 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0, -1$ 、に応じて、

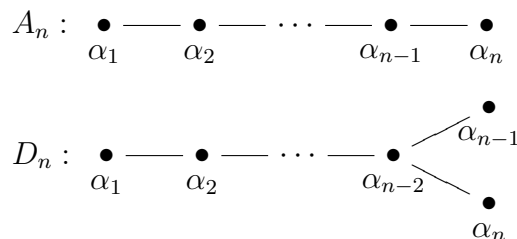


のように、線で結ぶか結ばないかを決めます。最後に

- 出来上がったグラフは、連結である。(つながっている)

と仮定します。そうでないときは、つながった部分ごとに考えればよいので、この仮定も自然です。

これらの仮定のもとで、ディンキン図式は、次のものになることが知られています。



残った、 E_6, E_7, E_8 は、例外型ルート系とよばれているもので、 A_n や D_n のように無限系列で出てくるのではなく、3個しかないのが特徴です。

定理 3.3 (Fomin-Zelevinsky). (1) 各ルート系に対応するディンキン図形の頂点の上に変数を並べて、第一節のように数式の変換を行うと、有限回で元に戻る。また、逆に有限回で元に戻るなら、それは、ディンキン図形でなければならない。

(2) 途中に現れる分数式の分母は、

$$\prod_{i=1}^n x_i^{m_i} \longleftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i \alpha_i$$

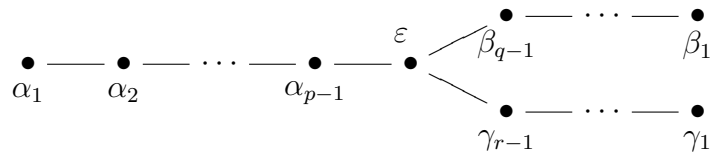
という対応によって、正ルートと一対一に対応する。

前節の最後に紹介したのは D_4 型ですが、このときに正ルートと分母の単項式が一対一に対応していることをチェックしてみてください。

実は、例外型の E_6, E_7, E_8 は正多面体と深い関係があることが知られています。講義の案内で、正多面体とディンキン図形には関係がある、と書いたことです。残念ながらこれを詳しく説明するのは難しいので、あまり深い理論ではありませんが、ディンキン図式が上の形に限られることの証明の一番最後の部分を紹介したいと思います。その議論が正多面体が五種類しかないことの証明で使われた議論と同じである、というのがルート系と正多面体の関係の現れである、と考えられています。

ディンキン図式が三叉の頂点を持っているとして、三叉の頂点から両端までの点の個数をその点も含めて数えて p, q, r 個であると仮定します。三叉の頂点からはまっすぐに辺が伸びているだけで、途中でさらに分岐したりしていないことは、すでに分かっているとします。(このことの証明も以下の議論と同様に、それほど難しくはありません。)

対応するベクトルに次のように名前をつけます。



このとき

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p-1} i \alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^{q-1} i \beta_i, \quad \gamma = \sum_{i=1}^{r-1} i \gamma_i$$

とおきます。すると

$$\|\alpha\|^2 = 2 \sum_{i=1}^{p-1} i^2 - 2 \sum_{i=1}^{p-2} i(i+1) = p(p-1),$$

$$(\alpha, \epsilon) = -(p-1)$$

同様に

$$\|\beta\|^2 = q(q-1), (\beta, \varepsilon) = -(q-1), \quad \|\gamma\|^2 = r(r-1), (\gamma, \varepsilon) = -(r-1)$$

となります。

ε を α, β, γ で張られる 3 次元空間に直交する空間に落としたベクトルの長さを考えます。

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \varepsilon - \frac{(\alpha, \varepsilon)}{\|\alpha\|} \frac{\alpha}{\|\alpha\|} - \frac{(\beta, \varepsilon)}{\|\beta\|} \frac{\beta}{\|\beta\|} - \frac{(\gamma, \varepsilon)}{\|\gamma\|} \frac{\gamma}{\|\gamma\|} \right\|^2 \\ &= \|\varepsilon\|^2 - \frac{(\alpha, \varepsilon)^2}{\|\alpha\|^2} - \frac{(\beta, \varepsilon)^2}{\|\beta\|^2} - \frac{(\gamma, \varepsilon)^2}{\|\gamma\|^2} \end{aligned}$$

上の式を代入すると

$$0 \leq 2 - \left(1 - \frac{1}{p}\right) - \left(1 - \frac{1}{q}\right) - \left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

となります。さらに、 $p \geq q \geq r (\geq 2)$ であるとする、

$$\frac{3}{r} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

よって、 $r = 2$ となります。これを上の式に代入し直すと

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

となります。これは、正多面体が五種類であることの証明にでてきた (3.1) 式に他なりません。

正多面体のときには、 $q = 2$, p は 2 以上の勝手な自然数という D_n 型の場合が抜けましたが、正四面体が E_6 , 正四面体、正八面体が E_7 , 正十二面体, 正二十面体が E_8 のルート系に対応することがお分かりいただけるかと思えます。

より詳しいことを知りたい方には、

松澤淳一, 特異点とルート系, すうがくの風景 6, 朝倉書店
をお薦めします。