クラスター代数とルート系

中島　啓

京大数理研

2012 年 5 月 5 日

Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{smallmatrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{smallmatrix}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。$(c = {}^{ad+1}/_{b})$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & ? & & & & & & \\
 & \boxed{1} & & & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & & & & & \\
 & \boxed{1} & & & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}$$

Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{matrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{matrix}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。$(c = {}^{ad+1}/_{b})$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 2 & & & & & & \\
 & \boxed{1} & & {\color{red}?} & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & & & & & \\
 & \boxed{1} & & & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{array}{ccc} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{array}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。$(c = {}^{ad+1}\!/_{b})$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 2 & & & & & & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & & & & & \\
 & \boxed{1} & & \color{red}{?} & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{smallmatrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{smallmatrix}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。$(c = {}^{ad+1}/_{b})$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 2 & & {\color{red}?} & & & & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & & & & & \\
 & \boxed{1} & & 2 & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{smallmatrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{smallmatrix}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。$(c = {}^{ad+1}/_{b})$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & & & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & \color{red}{?} & & & & \\
 & \boxed{1} & & 2 & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{smallmatrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{smallmatrix}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。$(c = {}^{ad+1}/_{b})$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & & & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & \color{red}{?} & & & \\
 & & \boxed{1} & & 7 & & & & \\
 & \boxed{1} & & 2 & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}$$

Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{smallmatrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{smallmatrix}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。$(c = {}^{ad+1}/_{b})$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & & & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & & \\
 & & \boxed{1} & & 7 & & & & \\
 & \boxed{1} & & 2 & & ? & & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{smallmatrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{smallmatrix}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。$(c = {}^{ad+1}/_{b})$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & & & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & & \\
 & & \boxed{1} & & 7 & & ? & & \\
 & \boxed{1} & & 2 & & 4 & & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{array}{ccc} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{array}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。$(c = {}^{ad+1}/_{b})$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & ? & & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & & \\
 & & \boxed{1} & & 7 & & 3 & & \\
 & \boxed{1} & & 2 & & 4 & & ? & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{smallmatrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{smallmatrix}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。($c = {}^{ad+1}/_{b}$)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & 3 & & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & \color{red}{?} & \\
 & & \boxed{1} & & 7 & & 3 & & \\
 & \boxed{1} & & 2 & & 4 & & 1 & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{array}{ccc} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{array}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。$(c = {}^{ad+1}/_{b})$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & 3 & & \color{red}{?} \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & 2 & \\
 & & \boxed{1} & & 7 & & 3 & & \color{red}{?} \\
 & \boxed{1} & & 2 & & 4 & & 1 & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{smallmatrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{smallmatrix}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。$(c = {}^{ad+1}/_{b})$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & 2 & & \color{red}{?} \\
 & & \boxed{1} & & 7 & & 3 & & 1 & \\
 & \boxed{1} & & 2 & & 4 & & 1 & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

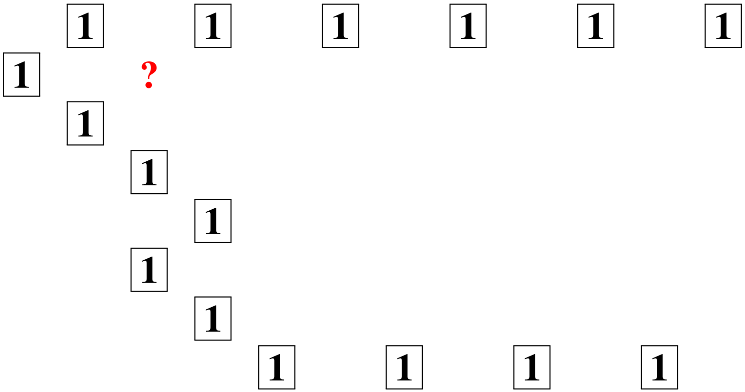
Conway-Coxeter Frieze

ルール $\begin{matrix} & a & \\ b & & c \\ & d & \end{matrix}$ が、$bc = ad + 1$ を満たすように、左から右へと、数を並べていきます。$(c = {}^{ad+1}\!/_{b})$

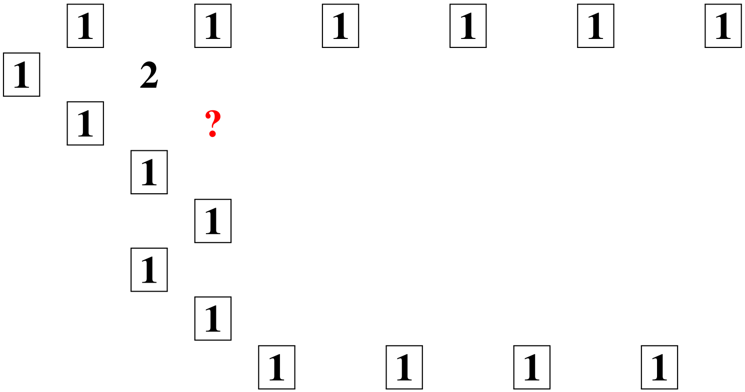
$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & 2 & & 1 \\
 & & \boxed{1} & & 7 & & 3 & & 1 & \\
 & \boxed{1} & & 2 & & 4 & & 1 & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

Theorem

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。



- **このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。**
- **しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。**



- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

	$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$
$\boxed{1}$		2		?							
	$\boxed{1}$		3								
		$\boxed{1}$		?							
			$\boxed{1}$								
		$\boxed{1}$		?							
			$\boxed{1}$								
				$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$	

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

	$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$
$\boxed{1}$		2		2							
	$\boxed{1}$		3		?						
		$\boxed{1}$		4							
			$\boxed{1}$		?						
		$\boxed{1}$		2							
			$\boxed{1}$		?						
				$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$	

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & ? & & & & & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 3 & & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & 4 & & ? & & & & & \\
 & & & \boxed{1} & & 9 & & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & 2 & & ? & & & & & \\
 & & & \boxed{1} & & 3 & & & & & & \\
 & & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

	$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$
$\boxed{1}$		2		2		2					
	$\boxed{1}$		3		3		?				
		$\boxed{1}$		4		7					
			$\boxed{1}$		9		?				
		$\boxed{1}$		2		14					
			$\boxed{1}$		3		?				
				$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$	

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & 2 & & ? & & & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 3 & & 5 & & & & \\
 & & \boxed{1} & & 4 & & 7 & & ? & & & \\
 & & & \boxed{1} & & 9 & & 11 & & & & \\
 & & \boxed{1} & & 2 & & 14 & & ? & & & \\
 & & & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & & & \\
 & & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

	$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$
$\boxed{1}$		2		2		2		3			
	$\boxed{1}$		3		3		5		?		
		$\boxed{1}$		4		7		8			
			$\boxed{1}$		9		11		?		
		$\boxed{1}$		2		14		4			
			$\boxed{1}$		3		5		?		
				$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$	

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & 2 & & 3 & & ? & \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 3 & & 5 & & 5 & & \\
 & & \boxed{1} & & 4 & & 7 & & 8 & & ? & \\
 & & & \boxed{1} & & 9 & & 11 & & 3 & & \\
 & & \boxed{1} & & 2 & & 14 & & 4 & & ? & \\
 & & & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & 1 & & \\
 & & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

	$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$
$\boxed{1}$		2		2		2		3		2	
	$\boxed{1}$		3		3		5		5		?
		$\boxed{1}$		4		7		8		2	
			$\boxed{1}$		9		11		3		?
		$\boxed{1}$		2		14		4		1	
			$\boxed{1}$		3		5		1		
				$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$	

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

	$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$	
$\boxed{1}$		2		2		2		3		2		?
	$\boxed{1}$		3		3		5		5		1	
		$\boxed{1}$		4		7		8		2		?
			$\boxed{1}$		9		11		3		1	
		$\boxed{1}$		2		14		4		1		
			$\boxed{1}$		3		5		1			
				$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		$\boxed{1}$		

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & 2 & & 3 & & 2 & & 1 \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 3 & & 5 & & 5 & & 1 & \\
 & & \boxed{1} & & 4 & & 7 & & 8 & & 2 & & 1 \\
 & & & \boxed{1} & & 9 & & 11 & & 3 & & 1 & \\
 & & \boxed{1} & & 2 & & 14 & & 4 & & 1 & & \\
 & & & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & &
\end{array}
$$

- このようにして現れる数は、必ず正の整数になる。
- しばらく並べると、上のように再び 1 が折れ線状に並ぶ。

数式版 (A_2 型)

$$\boxed{1} \qquad \boxed{1} \qquad \boxed{1}$$

$$x_1 \qquad {\color{red} x_3 ?}$$

$$x_2$$

$$\boxed{1} \qquad \boxed{1} \qquad \boxed{1}$$

数式版 (A_2 型)

$$\boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1}$$

$$x_1 \quad x_3$$

$$x_2 \quad x_4?$$

$$\boxed{1} \quad \boxed{1} \quad \boxed{1}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}$$

数式版 (A_2 型)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
x_1 & & x_3 & & & & \\
 & x_2 & & x_4 & & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}$$

$$x_4 = {}^{x_3+1}\!/_{x_2}$$

数式版 (A_2 型)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & & \\
x_1 & & x_3 & & & & & & \\
 & x_2 & & x_4 & & & & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & &
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}$$

$$x_4 = {}^{x_3+1}\!/_{x_2} = {}^{x_1+x_2+1}\!/_{x_1 x_2}$$

数式版 (A_2 型)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
x_1 & & x_3 & & x_5? & & \\
 & x_2 & & x_4 & & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}$$

$$x_4 = {}^{x_3+1}/_{x_2} = {}^{x_1+x_2+1}/_{x_1 x_2}$$

数式版 (A_2 型)

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \\
x_1 & & & x_3 & & x_5 & & & \\
 & x_2 & & & x_4 & & & & \\
 & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}$$

$$x_4 = {}^{x_3+1}\!/_{x_2} = {}^{x_1+x_2+1}\!/_{x_1 x_2}$$

$$x_5 = {}^{x_4+1}\!/_{x_3}$$

数式版 (A_2 型)

$$\begin{array}{ccccccccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \\ x_1 & & x_3 & & x_5 & & & \\ & x_2 & & x_4 & & & & \\ & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}$$

$$x_4 = {}^{x_3+1}/_{x_2} = {}^{x_1+x_2+1}/_{x_1 x_2}$$

$$x_5 = {}^{x_4+1}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_1+1}/_{x_2}$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
x_1 & & x_3 & & x_5 & & \\
 & x_2 & & x_4 & & x_6? & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}$$

$$x_4 = {}^{x_3+1}\!/_{x_2} = {}^{x_1+x_2+1}\!/_{x_1x_2}$$

$$x_5 = {}^{x_4+1}\!/_{x_3} = \cdots = {}^{x_1+1}\!/_{x_2}$$

$$x_6 = {}^{x_5+1}\!/_{x_4}$$

数式版 (A_2 型)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \\
x_1 & & x_3 & & x_5 & & & \\
 & x_2 & & x_4 & & {\color{red}x_6?} & & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}$$

$$x_4 = {}^{x_3+1}/_{x_2} = {}^{x_1+x_2+1}/_{x_1 x_2}$$

$$x_5 = {}^{x_4+1}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_1+1}/_{x_2}$$

$$x_6 = {}^{x_5+1}/_{x_4} = \left(\frac{x_1+1}{x_2} + 1\right) \cdot \frac{x_1 x_2}{x_1+x_2+1}$$

数式版 (A_2 型)

$$\begin{array}{ccccccccc} & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \\ x_1 & & x_3 & & x_5 & & & \\ & x_2 & & x_4 & & \color{red}{x_6?} & & \\ & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}$$

$$x_4 = {}^{x_3+1}/_{x_2} = {}^{x_1+x_2+1}/_{x_1x_2}$$

$$x_5 = {}^{x_4+1}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_1+1}/_{x_2}$$

$$x_6 = {}^{x_5+1}/_{x_4} = \left(\frac{x_1+1}{x_2} + 1\right) \cdot \frac{x_1x_2}{x_1+x_2+1} = x_1$$

数式版 (A_2 型)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
x_1 & & x_3 & & x_5 & & \color{red}{x_7?} \\
 & x_2 & & x_4 & & x_1 & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}$$

$$x_4 = {}^{x_3+1}/_{x_2} = {}^{x_1+x_2+1}/_{x_1x_2}$$

$$x_5 = {}^{x_4+1}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_1+1}/_{x_2}$$

$$x_6 = {}^{x_5+1}/_{x_4} = \left(\frac{x_1+1}{x_2} + 1\right) \cdot \frac{x_1x_2}{x_1+x_2+1} = x_1$$

$$x_7 = {}^{x_6+1}/_{x_5}$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
x_1 & & x_3 & & x_5 & & {\color{red}x_7?} \\
 & x_2 & & x_4 & & x_1 & \\
 & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}$$

$$x_4 = {}^{x_3+1}/_{x_2} = {}^{x_1+x_2+1}/_{x_1x_2}$$

$$x_5 = {}^{x_4+1}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_1+1}/_{x_2}$$

$$x_6 = {}^{x_5+1}/_{x_4} = \left(\frac{x_1+1}{x_2} + 1\right) \cdot \frac{x_1x_2}{x_1+x_2+1} = x_1$$

$$x_7 = {}^{x_6+1}/_{x_5} = (x_1 + 1) \cdot \frac{x_2}{x_1+1}$$

数式版 (A_2 型)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \boxed{1} & & & & \boxed{1} & & & & \boxed{1} & & \\
x_1 & & & & x_3 & & & & x_5 & & & & x_2 \\
 & & x_2 & & & & x_4 & & & & x_1 & & \\
 & & & & \boxed{1} & & & & \boxed{1} & & & & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}$$

$$x_4 = {}^{x_3+1}\!/_{x_2} = {}^{x_1+x_2+1}\!/_{x_1x_2}$$

$$x_5 = {}^{x_4+1}\!/_{x_3} = \cdots = {}^{x_1+1}\!/_{x_2}$$

$$x_6 = {}^{x_5+1}\!/_{x_4} = \left(\frac{x_1+1}{x_2} + 1\right) \cdot \frac{x_1x_2}{x_1+x_2+1} = x_1$$

$$x_7 = {}^{x_6+1}\!/_{x_5} = (x_1 + 1) \cdot \frac{x_2}{x_1+1} = x_2$$

三変数版 (A_3 型)

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\
x_1 & & {\color{red}x_4?} & & & \\
 & x_2 & & & & \\
x_3 & & {\color{red}x_5?} & & & \\
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1}
\end{array}
$$

三変数版 (A_3 型)

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \boxed{1} & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \boxed{1} \\
x_1 & & & x_4 & & & & \\
 & x_2 & & & {\color{red}x_6?} & & & \\
x_3 & & & x_5 & & & & \\
 & \boxed{1} & & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$x_4 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \qquad x_5 = {}^{x_2+1}/_{x_3},$$

$$x_6 = {}^{x_4x_5+1}/_{x_2}$$

三変数版 (A_3 型)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \boxed{1} \\
x_1 & & x_4 & & {\color{red}x_7?} & & \\
 & x_2 & & x_6 & & & \\
x_3 & & x_5 & & {\color{red}x_8?} & & \\
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$x_4 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}, \qquad x_5 = {}^{x_2+1}\!/_{x_3},$$

$$x_6 = {}^{x_4x_5+1}\!/_{x_2} = {}^{x_2^2+2x_2+1+x_1x_3}\!/_{x_1x_2x_3},$$

$$x_7 = {}^{x_6+1}\!/_{x_4}$$

$$x_8 = {}^{x_6+1}\!/_{x_5}$$

三変数版 (A_3 型)

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
x_1 & & x_4 & & x_7 & & & \\
 & x_2 & & x_6 & & {\color{red}x_9?} & & \\
x_3 & & x_5 & & x_8 & & & \\
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$x_4 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}, \quad x_5 = {}^{x_2+1}\!/_{x_3},$$

$$x_6 = {}^{x_4x_5+1}\!/_{x_2} = {}^{x_2^2+2x_2+1+x_1x_3}\!/_{x_1x_2x_3},$$

$$x_7 = {}^{x_6+1}\!/_{x_4} = \cdots = {}^{1+x_2+x_1x_3}\!/_{x_2x_3},$$

$$x_8 = {}^{x_6+1}\!/_{x_5} = \cdots = {}^{1+x_2+x_1x_3}\!/_{x_1x_2},$$

$$x_9 = {}^{x_7x_8+1}\!/_{x_6}$$

三変数版 (A_3 型)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & & \boxed{1} \\
x_1 & & x_4 & & x_7 & & & x_{10}? & \\
 & x_2 & & x_6 & & x_9 & & & \\
x_3 & & x_5 & & x_8 & & & x_{11}? & \\
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$x_4 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}, \quad x_5 = {}^{x_2+1}\!/_{x_3},$$

$$x_6 = {}^{x_4x_5+1}\!/_{x_2} = {}^{x_2^2+2x_2+1+x_1x_3}\!/_{x_1x_2x_3},$$

$$x_7 = {}^{x_6+1}\!/_{x_4} = \cdots = {}^{1+x_2+x_1x_3}\!/_{x_2x_3},$$

$$x_8 = {}^{x_6+1}\!/_{x_5} = \cdots = {}^{1+x_2+x_1x_3}\!/_{x_1x_2},$$

$$x_9 = {}^{x_7x_8+1}\!/_{x_6} = \cdots = {}^{1+x_1x_3}\!/_{x_2},$$

$$x_{10} = {}^{x_9+1}\!/_{x_7} \quad x_{11} = {}^{x_9+1}\!/_{x_8}$$

三変数版 (A_3 型)

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
x_1 & & x_4 & & x_7 & & x_3 & \\
 & x_2 & & x_6 & & x_9 & & \color{red}{?} \\
x_3 & & x_5 & & x_8 & & x_1 & \\
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1}
\end{array}
$$

$$x_4 = \frac{x_2+1}{x_1}, \quad x_5 = \frac{x_2+1}{x_3},$$

$$x_6 = \frac{x_4x_5+1}{x_2} = \frac{x_2^2+2x_2+1+x_1x_3}{x_1x_2x_3},$$

$$x_7 = \frac{x_6+1}{x_4} = \cdots = \frac{1+x_2+x_1x_3}{x_2x_3},$$

$$x_8 = \frac{x_6+1}{x_5} = \cdots = \frac{1+x_2+x_1x_3}{x_1x_2},$$

$$x_9 = \frac{x_7x_8+1}{x_6} = \cdots = \frac{1+x_1x_3}{x_2},$$

$$x_{10} = \frac{x_9+1}{x_7} = \cdots = x_3, \quad x_{11} = \frac{x_9+1}{x_8} = \cdots = x_1,$$

三変数版 (A_3 型)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & \\
x_1 & & x_4 & & x_7 & & x_3 & & \\
 & x_2 & & x_6 & & x_9 & & x_2 & \\
x_3 & & x_5 & & x_8 & & x_1 & & \\
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}$$

$$x_4 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_5 = {}^{x_2+1}/_{x_3},$$

$$x_6 = {}^{x_4x_5+1}/_{x_2} = {}^{x_2^2+2x_2+1+x_1x_3}/_{x_1x_2x_3},$$

$$x_7 = {}^{x_6+1}/_{x_4} = \cdots = {}^{1+x_2+x_1x_3}/_{x_2x_3},$$

$$x_8 = {}^{x_6+1}/_{x_5} = \cdots = {}^{1+x_2+x_1x_3}/_{x_1x_2},$$

$$x_9 = {}^{x_7x_8+1}/_{x_6} = \cdots = {}^{1+x_1x_3}/_{x_2},$$

$$x_{10} = {}^{x_9+1}/_{x_7} = \cdots = x_3, \quad x_{11} = {}^{x_9+1}/_{x_8} = \cdots = x_1,$$

Theorem

1. このようにして現れる x_i は、最初に与えられた変数 (上の例の x_1, x_2, x_3) で表すと、分母は単項式、分子は正の整数を係数とする多項式となる、分数式で表される。
2. 最初に与えられた変数を除くと、必ず分数式になり、また分母に現れる単項式はすべて異なる。
3. しばらく並べると、上のように再び最初の変数が折れ線状に並ぶ。

A_4 型

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
x_1 & & & & & & & \\
 & x_2 & & & & & & \\
x_3 & & & & & & & \\
 & x_4 & & & & & & \\
\boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

A_4 型

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
x_1 & & x_5 & & & & & \\
 & x_2 & & & & & & \\
x_3 & & x_6 & & & & & \\
 & x_4 & & & & & & \\
\boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

$$x_5 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_6 = {}^{x_2x_4+1}/_{x_3},$$

A_4 型

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
x_1 & & x_5 & & & & & \\
 & x_2 & & x_7 & & & & \\
x_3 & & x_6 & & & & & \\
 & x_4 & & x_8 & & & & \\
\boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

$$x_5 = \frac{x_2+1}{x_1},\ x_6 = \frac{x_2x_4+1}{x_3},\ x_7 = \frac{x_2^2x_4+x_2x_4+x_2+x_1x_3+1}{x_1x_2x_3},$$

$$x_8 = \frac{x_2x_4+x_3+1}{x_3x_4},$$

A_4 型

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
x_1 & & x_5 & & x_9 & & & \\
 & x_2 & & x_7 & & & & \\
x_3 & & x_6 & & x_{10} & & & \\
 & x_4 & & x_8 & & & & \\
\boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

$$x_5 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1},\quad x_6 = {}^{x_2x_4+1}\!/_{x_3},\quad x_7 = {}^{x_2^2x_4+x_2x_4+x_2+x_1x_3+1}\!/_{x_1x_2x_3},$$

$$x_8 = {}^{x_2x_4+x_3+1}\!/_{x_3x_4},\qquad x_9 = {}^{x_1x_3+x_2x_4+1}\!/_{x_2x_3},$$

$$x_{10} = {}^{x_2^2x_4+x_2x_4+x_2+x_2x_3+1+x_3+x_1x_3+x_1x_3^2}\!/_{x_1x_2x_3x_4},$$

A_4 型

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
x_1 & & x_5 & & x_9 & & & \\
 & x_2 & & x_7 & & x_{11} & & \\
x_3 & & x_6 & & x_{10} & & & \\
 & x_4 & & x_8 & & x_{12} & & \\
\boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

$$x_5 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1},\quad x_6 = {}^{x_2x_4+1}\!/_{x_3},\quad x_7 = {}^{x_2^2x_4+x_2x_4+x_2+x_1x_3+1}\!/_{x_1x_2x_3},$$

$$x_8 = {}^{x_2x_4+x_3+1}\!/_{x_3x_4},\qquad x_9 = {}^{x_1x_3+x_2x_4+1}\!/_{x_2x_3},$$

$$x_{10} = {}^{x_2^2x_4+x_2x_4+x_2+x_2x_3+1+x_3+x_1x_3+x_1x_3^2}\!/_{x_1x_2x_3x_4},$$

$$x_{11} = {}^{x_1x_3^2+x_1x_2+x_2x_4+x_3+1}\!/_{x_2x_3x_4},$$

$$x_{12} = {}^{x_2+x_1x_3+1}\!/_{x_1x_2},$$

A_4 型

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
x_1 & & x_5 & & x_9 & & x_{13} & \\
 & x_2 & & x_7 & & x_{11} & & \\
x_3 & & x_6 & & x_{10} & & x_{14} & \\
 & x_4 & & x_8 & & x_{12} & & \\
\boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

$$x_5 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1},\quad x_6 = {}^{x_2x_4+1}\!/_{x_3},\quad x_7 = {}^{x_2^2x_4+x_2x_4+x_2+x_1x_3+1}\!/_{x_1x_2x_3},$$

$$x_8 = {}^{x_2x_4+x_3+1}\!/_{x_3x_4},\qquad x_9 = {}^{x_1x_3+x_2x_4+1}\!/_{x_2x_3},$$

$$x_{10} = {}^{x_2^2x_4+x_2x_4+x_2+x_2x_3+1+x_3+x_1x_3+x_1x_3^2}\!/_{x_1x_2x_3x_4},$$

$$x_{11} = {}^{x_1x_3^2+x_1x_2+x_2x_4+x_3+1}\!/_{x_2x_3x_4},$$

$$x_{12} = {}^{x_2+x_1x_3+1}\!/_{x_1x_2},\qquad x_{13} = {}^{x_3+1}\!/_{x_4},\qquad x_{14} = {}^{x_1x_3+1}\!/_{x_2}$$

A_4 型

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} \\
x_1 & & x_5 & & x_9 & & x_{13} & \\
 & x_2 & & x_7 & & x_{11} & & x_3 \\
x_3 & & x_6 & & x_{10} & & x_{14} & \\
 & x_4 & & x_8 & & x_{12} & & x_1 \\
\boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} & & \boxed{1} &
\end{array}
$$

$$x_5 = {x_2+1}/{x_1}, \quad x_6 = {x_2x_4+1}/{x_3}, \quad x_7 = {x_2^2x_4+x_2x_4+x_2+x_1x_3+1}/{x_1x_2x_3},$$

$$x_8 = {x_2x_4+x_3+1}/{x_3x_4}, \qquad x_9 = {x_1x_3+x_2x_4+1}/{x_2x_3},$$

$$x_{10} = {x_2^2x_4+x_2x_4+x_2+x_2x_3+1+x_3+x_1x_3+x_1x_3^2}/{x_1x_2x_3x_4},$$

$$x_{11} = {x_1x_3^2+x_1x_2+x_2x_4+x_3+1}/{x_2x_3x_4},$$

$$x_{12} = {x_2+x_1x_3+1}/{x_1x_2}, \qquad x_{13} = {x_3+1}/{x_4}, \qquad x_{14} = {x_1x_3+1}/{x_2}$$

A_n 型のときの分母についての観察

Theorem

変数の分母に出てくる単項式は、$1 \leq i \leq j \leq n$ の整数の組み (i, j) に対して

$$x_i x_{i+1} \cdots x_j$$

となっている。全部で、$n(n+1)/2$ 個ある。

あとで、これが、A_n 型の正ルートと対応していることを見る。

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\bullet \Longrightarrow \bullet$$

$$x_1 = 1 \qquad\qquad x_3$$

$$x_2 = 1 \qquad\qquad x_4$$

$$x_3 = {}^{1+x_2}/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{1+x_3{}^{2}}/_{x_2}$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\bullet \Longrightarrow \bullet$$

$x_1 = 1$ $\qquad$ 2

$x_2 = 1$ $\qquad$ x_4

$$x_3 = {}^{1+x_2}/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{1+x_3{}^{2}}/_{x_2}$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\bullet \Longrightarrow \bullet$$

$$x_1 = 1 \qquad\qquad\qquad 2$$

$$x_2 = 1 \qquad 5$$

$$x_3 = {}^{1+x_2}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{2}}/_{x_2}$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\bullet \Longrightarrow \bullet$$

$$x_1 = 1 \qquad\qquad 2 \qquad 3$$

$$x_2 = 1 \qquad 5$$

$$x_3 = {}^{1+x_2}/x_1, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{2}}/x_2$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\bullet \Longrightarrow \bullet$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 = 1 & & & 2 & & 3 & \\
& & x_2 = 1 & & 5 & & 2
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{1+x_2}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{2}}/_{x_2}$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\bullet \Longrightarrow \bullet$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 = 1 & & & & 2 & & 3 & & 1 \\ & & x_2 = 1 & & & 5 & & 2 & \end{array}$$

$$x_3 = {}^{1+x_2}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{2}}/_{x_2}$$

上の段と下の段で定め方を変えたもの (B_2 型)

$$\bullet \Rightarrow \bullet$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 = 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & \\ & x_2 = 1 & & 5 & & 2 & & 1 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{1+x_2}/{}_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{2}}/{}_{x_2}$$

となって元に戻ります。

B_2 型 数式版

$$x_1 \qquad x_3$$
$$x_2 \qquad x_4$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{2}}/_{x_2}$$

B_2 型 数式版

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & x_3 & \\ & x_2 & & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^2}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1{}^2+x_2{}^2+2\,x_2+1}/_{x_1{}^2 x_2},$$

B_2 型 数式版

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 \\ & x_2 & & x_4 & \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^2}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1{}^2+x_2{}^2+2x_2+1}/_{x_1{}^2 x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}/_{x_3}$$

B_2 型 数式版

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 \\ & x_2 & & x_4 & \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^2}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1{}^2+x_2{}^2+2\,x_2+1}/_{x_1{}^2 x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2+1+x_1{}^2}/_{x_1 x_2},$$

B_2 型 数式版

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & & x_3 & & x_5 & \\
 & x_2 & & x_4 & & x_6
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^2}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1{}^2+x_2{}^2+2x_2+1}/_{x_1{}^2 x_2},$$
$$x_5 = {}^{1+x_4}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2+1+x_1{}^2}/_{x_1 x_2},$$
$$x_6 = {}^{1+x_5{}^{\color{red}{2}}}/_{x_4}$$

B_2 型 数式版

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3^2}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1^2+x_2^2+2x_2+1}/_{x_1^2 x_2},$$
$$x_5 = {}^{1+x_4}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2+1+x_1^2}/_{x_1 x_2},$$
$$x_6 = {}^{1+x_5^2}/_{x_4} = \cdots = {}^{1+x_1^2}/_{x_2},$$

B_2 型 数式版

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & \end{array}$$

$$x_3 = \frac{x_2+1}{x_1}, \quad x_4 = \frac{1+x_3^2}{x_2} = \cdots = \frac{x_1^2+x_2^2+2x_2+1}{x_1^2 x_2},$$

$$x_5 = \frac{1+x_4}{x_3} = \cdots = \frac{x_2+1+x_1^2}{x_1 x_2},$$

$$x_6 = \frac{1+x_5^2}{x_4} = \cdots = \frac{1+x_1^2}{x_2},$$

$$x_7 = \frac{1+x_6}{x_5}$$

B_2 型 数式版

$$\begin{matrix} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_1 \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & \end{matrix}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/{}_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^2}/{}_{x_2} = \cdots = {}^{x_1{}^2+x_2{}^2+2\,x_2+1}/{}_{x_1{}^2x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}/{}_{x_3} = \cdots = {}^{x_2+1+x_1{}^2}/{}_{x_1x_2},$$

$$x_6 = {}^{1+x_5{}^2}/{}_{x_4} = \cdots = {}^{1+x_1{}^2}/{}_{x_2},$$

$$x_7 = {}^{1+x_6}/{}_{x_5} = \cdots = x_1,$$

B_2 型 数式版

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_1 & & \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_8 \end{array}$$

$$x_3 = \frac{x_2+1}{x_1}, \quad x_4 = \frac{1+x_3^2}{x_2} = \cdots = \frac{x_1^2+x_2^2+2x_2+1}{x_1^2 x_2},$$

$$x_5 = \frac{1+x_4}{x_3} = \cdots = \frac{x_2+1+x_1^2}{x_1 x_2},$$

$$x_6 = \frac{1+x_5^2}{x_4} = \cdots = \frac{1+x_1^2}{x_2},$$

$$x_7 = \frac{1+x_6}{x_5} = \cdots = x_1, \qquad x_8 = \frac{1+x_7^{\color{red}2}}{x_6}$$

B_2 型 数式版

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_1 & \\
 & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_2
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^2}\!/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1{}^2+x_2{}^2+2x_2+1}\!/_{x_1{}^2 x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}\!/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2+1+x_1{}^2}\!/_{x_1 x_2},$$

$$x_6 = {}^{1+x_5{}^2}\!/_{x_4} = \cdots = {}^{1+x_1{}^2}\!/_{x_2},$$

$$x_7 = {}^{1+x_6}\!/_{x_5} = \cdots = x_1, \qquad x_8 = {}^{1+x_7{}^2}\!/_{x_6} = x_2$$

B_2 型 数式版

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_1 & \\
& x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_2
\end{array}
$$

$$x_3 = \frac{x_2+1}{x_1}, \quad x_4 = \frac{1+x_3^2}{x_2} = \cdots = \frac{x_1^2+x_2^2+2x_2+1}{x_1^2x_2},$$

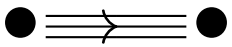
$$x_5 = \frac{1+x_4}{x_3} = \cdots = \frac{x_2+1+x_1^2}{x_1x_2},$$

$$x_6 = \frac{1+x_5^2}{x_4} = \cdots = \frac{1+x_1^2}{x_2},$$

$$x_7 = \frac{1+x_6}{x_5} = \cdots = x_1, \qquad x_8 = \frac{1+x_7^2}{x_6} = x_2$$

となって元に戻ります。

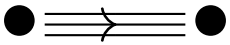
三乗版 (G_2 型)



$$x_1 = 1 \qquad\qquad x_3$$
$$x_2 = 1 \qquad x_4$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{1+x_3^{3}}\!/_{x_2}$$

三乗版 (G_2 型)

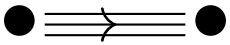


$x_1 = 1$ $\qquad$ 2

$x_2 = 1$ $\qquad$ x_4

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{3}}/_{x_2}$$

三乗版 (G_2 型)

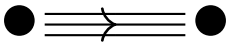


$$x_1 = 1 \qquad\qquad 2$$

$$x_2 = 1 \qquad 9$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{1+x_3{}^{3}}/_{x_2}$$

三乗版 (G_2 型)

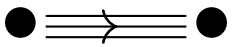


$x_1 = 1$ $\quad 2 \quad 5$

$x_2 = 1$ $\quad 9$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{3}}/_{x_2}$$

三乗版 (G_2 型)



$$\begin{array}{cccccc} x_1 = 1 & & 2 & & 5 & \\ & x_2 = 1 & & 9 & & 14 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{1+x_3{}^{3}}\!/_{x_2}$$

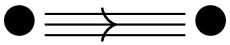
三乗版 (G_2 型)

$$\bullet \Rrightarrow \bullet$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 = 1 & & & & 2 & & 5 & & 3 \\
 & & x_2 = 1 & & & 9 & & 14 &
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{\color{red}3}}/_{x_2}$$

三乗版 (G_2 型)



$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 = 1 & & & & 2 & & 5 & & 3 \\ & & x_2 = 1 & & & 9 & & 14 & & 2 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{\color{red}{3}}}/_{x_2}$$

三乗版 (G_2 型)

$$\bullet \Rrightarrow \bullet$$

$$x_1 = 1 \qquad 2 \qquad 5 \qquad 3 \qquad 1$$

$$x_2 = 1 \qquad 9 \qquad 14 \qquad 2$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{1+x_3{}^{3}}/_{x_2}$$

三乗版 (G_2 型)

$$\bullet \Rrightarrow \bullet$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 = 1 & & & & 2 & & 5 & & 3 & & 1 \\
& & x_2 = 1 & & & 9 & & 14 & & 2 & & 1
\end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{3}}/_{x_2}$$

となって元に戻ります。

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & x_3 & \\ & x_2 & & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{3}}/_{x_2}$$

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & x_3 & \\ & x_2 & & x_4 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^3}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}/_{x_1^3 x_2},$$

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 \\ & x_2 & & x_4 & \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^3}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}/_{x_1^3 x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}/_{x_3}$$

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 \\ & x_2 & & x_4 & \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^3}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}/_{x_1^3x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2^2+2x_2+x_1^3+1}/_{x_1^2x_2},$$

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^3}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}/_{x_1^3 x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2^2+2x_2+x_1^3+1}/_{x_1^2 x_2},$$

$$x_6 = {}^{1+x_5{}^{3}}/_{x_4}$$

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^3}\!/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}\!/_{x_1^3 x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}\!/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2^2+2x_2+x_1^3+1}\!/_{x_1^2 x_2},$$

$$x_6 = {}^{1+x_5{}^3}\!/_{x_4} = \cdots = {}^{x_1^6+2x_1^3+3x_2x_1^3+1+x_2^3+3x_2^2+3x_2}\!/_{x_2^2 x_1^3},$$

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \\
 & x_2 & & x_4 & & x_6 &
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^3}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}/_{x_1^3 x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2^2+2x_2+x_1^3+1}/_{x_1^2 x_2},$$

$$x_6 = {}^{1+x_5{}^3}/_{x_4} = \cdots = {}^{x_1^6+2x_1^3+3x_2x_1^3+1+x_2^3+3x_2^2+3x_2}/_{x_2^2 x_1^3},$$

$$x_7 = {}^{1+x_6}/_{x_5}$$

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 \\
 & x_2 & & x_4 & & x_6 &
\end{array}
$$

$$x_3 = \frac{x_2+1}{x_1}, \quad x_4 = \frac{1+x_3{}^3}{x_2} = \cdots = \frac{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}{x_1^3 x_2},$$

$$x_5 = \frac{1+x_4}{x_3} = \cdots = \frac{x_2^2+2x_2+x_1^3+1}{x_1^2 x_2},$$

$$x_6 = \frac{1+x_5{}^3}{x_4} = \cdots = \frac{x_1^6+2x_1^3+3x_2x_1^3+1+x_2^3+3x_2^2+3x_2}{x_2^2 x_1^3},$$

$$x_7 = \frac{1+x_6}{x_5} = \cdots = \frac{x_1^3+x_2+1}{x_1 x_2},$$

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 & & \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_8 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^3}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}/_{x_1^3 x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2^2+2x_2+x_1^3+1}/_{x_1^2 x_2},$$

$$x_6 = {}^{1+x_5{}^3}/_{x_4} = \cdots = {}^{x_1^6+2x_1^3+3x_2x_1^3+1+x_2^3+3x_2^2+3x_2}/_{x_2^2 x_1^3},$$

$$x_7 = {}^{1+x_6}/_{x_5} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2+1}/_{x_1 x_2}, \qquad x_8 = {}^{1+x_7{}^3}/_{x_6}$$

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 & \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_8 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^3}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}/_{x_1^3x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2^2+2x_2+x_1^3+1}/_{x_1^2x_2},$$

$$x_6 = {}^{1+x_5{}^3}/_{x_4} = \cdots = {}^{x_1^6+2x_1^3+3x_2x_1^3+1+x_2^3+3x_2^2+3x_2}/_{x_2^2x_1^3},$$

$$x_7 = {}^{1+x_6}/_{x_5} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2+1}/_{x_1x_2}, \qquad x_8 = {}^{1+x_7{}^3}/_{x_6} = {}^{x_1^3+1}/_{x_2},$$

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 & & x_9 \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_8 & \end{array}$$

$$x_3 = \frac{x_2+1}{x_1}, \quad x_4 = \frac{1+x_3{}^3}{x_2} = \cdots = \frac{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}{x_1^3 x_2},$$

$$x_5 = \frac{1+x_4}{x_3} = \cdots = \frac{x_2^2+2x_2+x_1^3+1}{x_1^2 x_2},$$

$$x_6 = \frac{1+x_5{}^3}{x_4} = \cdots = \frac{x_1^6+2x_1^3+3x_2x_1^3+1+x_2^3+3x_2^2+3x_2}{x_2^2 x_1^3},$$

$$x_7 = \frac{1+x_6}{x_5} = \cdots = \frac{x_1^3+x_2+1}{x_1 x_2}, \qquad x_8 = \frac{1+x_7{}^3}{x_6} = \frac{x_1^3+1}{x_2},$$

$$x_9 = \frac{1+x_8}{x_7}$$

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 & & x_1 \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_8 & \end{array}$$

$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}$, $\quad x_4 = {}^{1+x_3{}^3}/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}/_{x_1^3x_2}$,

$x_5 = {}^{1+x_4}/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2^2+2x_2+x_1^3+1}/_{x_1^2x_2}$,

$x_6 = {}^{1+x_5{}^3}/_{x_4} = \cdots = {}^{x_1^6+2x_1^3+3x_2x_1^3+1+x_2^3+3x_2^2+3x_2}/_{x_2^2x_1^3}$,

$x_7 = {}^{1+x_6}/_{x_5} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2+1}/_{x_1x_2}$, $\qquad x_8 = {}^{1+x_7{}^3}/_{x_6} = {}^{x_1^3+1}/_{x_2}$,

$x_9 = {}^{1+x_8}/_{x_7} = x_1$,

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 & & x_1 & \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_8 & & x_{10} \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^3}\!/_{x_2} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}\!/_{x_1^3x_2},$$

$$x_5 = {}^{1+x_4}\!/_{x_3} = \cdots = {}^{x_2^2+2x_2+x_1^3+1}\!/_{x_1^2x_2},$$

$$x_6 = {}^{1+x_5{}^3}\!/_{x_4} = \cdots = {}^{x_1^6+2x_1^3+3x_2x_1^3+1+x_2^3+3x_2^2+3x_2}\!/_{x_2^2x_1^3},$$

$$x_7 = {}^{1+x_6}\!/_{x_5} = \cdots = {}^{x_1^3+x_2+1}\!/_{x_1x_2}, \qquad x_8 = {}^{1+x_7{}^3}\!/_{x_6} = {}^{x_1^3+1}\!/_{x_2},$$

$$x_9 = {}^{1+x_8}\!/_{x_7} = x_1, \qquad x_{10} = {}^{1+x_9{}^{3}}\!/_{x_8}$$

三乗版 (G_2 型) 数式版

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & & x_3 & & x_5 & & x_7 & & x_1 & \\ & x_2 & & x_4 & & x_6 & & x_8 & & x_2 \end{array}$$

$$x_3 = \frac{x_2+1}{x_1}, \quad x_4 = \frac{1+x_3{}^3}{x_2} = \cdots = \frac{x_1^3+x_2^3+3x_2^2+3x_2+1}{x_1^3 x_2},$$

$$x_5 = \frac{1+x_4}{x_3} = \cdots = \frac{x_2^2+2x_2+x_1^3+1}{x_1^2 x_2},$$

$$x_6 = \frac{1+x_5{}^3}{x_4} = \cdots = \frac{x_1^6+2x_1^3+3x_2x_1^3+1+x_2^3+3x_2^2+3x_2}{x_2^2 x_1^3},$$

$$x_7 = \frac{1+x_6}{x_5} = \cdots = \frac{x_1^3+x_2+1}{x_1 x_2}, \qquad x_8 = \frac{1+x_7{}^3}{x_6} = \frac{x_1^3+1}{x_2},$$

$$x_9 = \frac{1+x_8}{x_7} = x_1, \qquad x_{10} = \frac{1+x_9{}^3}{x_8} = x_2$$

となって元に戻ります。

四乗版? ($A_2^{(2)}$ 型)

$x_1 = 1$　　　　x_3

　　$x_2 = 1$　　x_4

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{4}}/_{x_2}$$

四乗版? ($A_2^{(2)}$ 型)

$$x_1 = 1 \qquad\qquad 2$$

$$x_2 = 1 \qquad x_4$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{4}}/_{x_2}$$

四乗版? ($A_2^{(2)}$ 型)

$$x_1 = 1 \qquad\qquad 2$$

$$x_2 = 1 \qquad 17$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}\!/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{1+x_3^{4}}\!/_{x_2}$$

四乗版? ($A_2^{(2)}$ 型)

$$x_1 = 1 \qquad\qquad 2 \qquad 9$$

$$x_2 = 1 \qquad 17$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{1+x_3{}^{4}}/_{x_2}$$

四乗版? ($A_2^{(2)}$ 型)

$$\begin{array}{cccccc} x_1 = 1 & & 2 & & 9 & \\ & x_2 = 1 & & 17 & & 386 \end{array}$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{1+x_3{}^{4}}/_{x_2}$$

四乗版? ($A_2^{(2)}$ 型)

$$x_1 = 1 \qquad 2 \qquad 9 \qquad 43$$

$$x_2 = 1 \qquad 17 \qquad 386$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{1+x_3{}^{4}}/_{x_2}$$

四乗版? ($A_2^{(2)}$ 型)

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 = 1 & & 2 & & 9 & & 43 & \\
 & x_2 = 1 & & 17 & & 386 & & 8857
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{4}}/_{x_2}$$

四乗版? ($A_2^{(2)}$ 型)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_1 = 1 & & 2 & & 9 & & 43 & & 206 \\
& x_2 = 1 & & 17 & & 386 & & 8857 &
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3{}^{\color{red}4}}/_{x_2}$$

四乗版? ($A_2^{(2)}$ 型)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 = 1 & & 2 & & 9 & & 43 & & 206 & & \\
& x_2 = 1 & & 17 & & 386 & & 8857 & & 203321 &
\end{array}
$$

$$x_3 = {}^{x_2+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{1+x_3^{4}}/_{x_2}$$

元に戻らない!

上も下も二乗にしてみる。($A_1^{(1)}$ 型)

$$x_1 = 1 \qquad\qquad x_3$$

$$x_2 = 1 \qquad\qquad x_4$$

$$x_3 = {}^{x_2{}^{2}+1}\!/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{x_3{}^{2}+1}\!/_{x_2}$$

上も下も二乗にしてみる。($A_1^{(1)}$ 型)

$$x_1 = 1 \qquad\qquad 2$$

$$x_2 = 1 \qquad x_4$$

$$x_3 = {}^{x_2{}^{2}+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{x_3{}^{2}+1}/_{x_2}$$

上も下も二乗にしてみる。($A_1^{(1)}$ 型)

$$x_1 = 1 \qquad\qquad 2$$

$$x_2 = 1 \qquad 5$$

$$x_3 = {}^{x_2{}^2+1}\!/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{x_3{}^2+1}\!/_{x_2}$$

上も下も二乗にしてみる。($A_1^{(1)}$ 型)

$$x_1 = 1 \qquad\qquad 2 \qquad 13$$
$$x_2 = 1 \qquad 5$$
$$x_3 = {}^{x_2{}^{2}+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{x_3{}^{2}+1}/_{x_2}$$

上も下も二乗にしてみる。($A_1^{(1)}$ 型)

$$x_1 = 1 \qquad\qquad 2 \qquad 13$$

$$x_2 = 1 \qquad 5 \qquad\qquad 34$$

$$x_3 = {}^{x_2{}^{2}+1}/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{x_3{}^{2}+1}/_{x_2}$$

上も下も二乗にしてみる。($A_1^{(1)}$ 型)

$$x_1 = 1 \qquad\qquad 2 \qquad 13 \qquad 89$$

$$x_2 = 1 \qquad 5 \qquad 34$$

$$x_3 = {}^{x_2{}^2+1}/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{x_3{}^2+1}/_{x_2}$$

上も下も二乗にしてみる。($A_1^{(1)}$ 型)

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 = 1 & & & 2 & & 13 & & 89 & \\ & x_2 = 1 & & & 5 & & 34 & & 233 \end{array}$$

$$x_3 = {x_2}^2+1/x_1, \quad x_4 = {x_3}^2+1/x_2$$

上も下も二乗にしてみる。($A_1^{(1)}$ 型)

$x_1 = 1 \qquad 2 \qquad 13 \qquad 89 \qquad 610$

$x_2 = 1 \qquad 5 \qquad 34 \qquad 233$

$$x_3 = {}^{x_2{}^{2}+1}/_{x_1}, \quad x_4 = {}^{x_3{}^{2}+1}/_{x_2}$$

やはり元に戻らない!

問題

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = 5 \quad 13 \quad 34 \quad 89 \quad 233 \quad 610$$

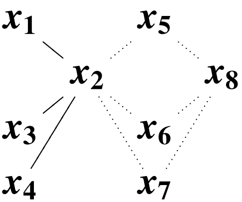
$$x_3 = {}^{x_2{}^{2}+1}/_{x_1}, \qquad x_4 = {}^{x_3{}^{2}+1}/_{x_2}$$

この数式は、漸化式

$$x_{i+2} = 3x_{i+1} - x_i$$

を満たすことを示せ。

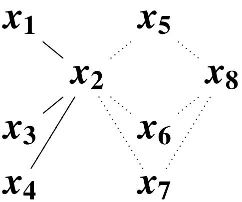
枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)



ルール $x_5 = \frac{1+x_2}{x_1}$, $x_6 = \frac{1+x_2}{x_3}$, $x_7 = \frac{1+x_2}{x_4}$, $x_8 = \frac{1+x_5x_6x_7}{x_2}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & x_5 & & \\ & 1 & & & x_8 \\ 1 & & x_6 & & \\ 1 & & x_7 & & \end{array}$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

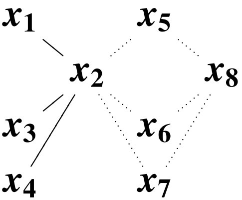


ルール $x_5 = \frac{1+x_2}{x_1}, \quad x_6 = \frac{1+x_2}{x_3}, \quad x_7 = \frac{1+x_2}{x_4},$

$x_8 = \frac{1+x_5x_6x_7}{x_2}$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & & 2 & \\
& 1 & & x_8\textcolor{red}{?} \\
1 & & 2 & \\
1 & & 2 &
\end{array}
$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)



ルール $x_5 = \frac{1+x_2}{x_1}, \quad x_6 = \frac{1+x_2}{x_3}, \quad x_7 = \frac{1+x_2}{x_4},$
$x_8 = \frac{1+x_5x_6x_7}{x_2}$

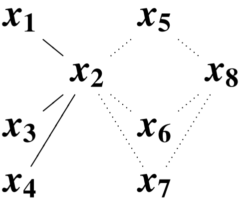
1 2

1 9

1 2

1 2

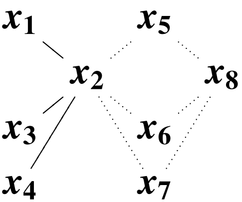
枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)



ルール $x_5=\frac{1+x_2}{x_1}$, $x_6=\frac{1+x_2}{x_3}$, $x_7=\frac{1+x_2}{x_4}$,
$x_8=\frac{1+x_5x_6x_7}{x_2}$

1		**2**		**5**
	1		**9**	
1		**2**		**5**
1		**2**		**5**

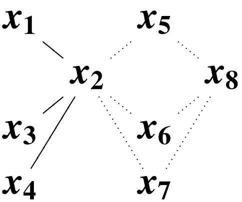
枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)



ルール $x_5 = \frac{1+x_2}{x_1}$, $x_6 = \frac{1+x_2}{x_3}$, $x_7 = \frac{1+x_2}{x_4}$,
$x_8 = \frac{1+x_5x_6x_7}{x_2}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{5} & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{9} & & \mathbf{14} & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{5} & & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{5} & &
\end{array}
$$

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)



ルール $x_5=\frac{1+x_2}{x_1}$, $x_6=\frac{1+x_2}{x_3}$, $x_7=\frac{1+x_2}{x_4}$, $x_8=\frac{1+x_5x_6x_7}{x_2}$

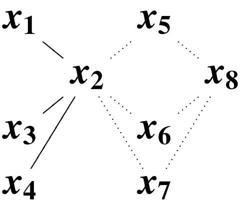
1　　2　　5　　3

**　1　　9　　14**

1　　2　　5　　3

1　　2　　5　　3

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

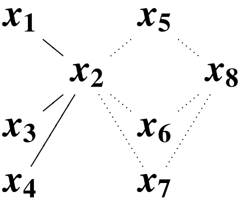


ルール

$$x_5 = \frac{1+x_2}{x_1}, \quad x_6 = \frac{1+x_2}{x_3}, \quad x_7 = \frac{1+x_2}{x_4},$$
$$x_8 = \frac{1+x_5 x_6 x_7}{x_2}$$

1   2   5   3
** 1   9   14   2**
1   2   5   3
1   2   5   3

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)

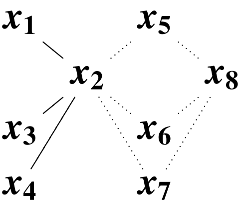


ルール $x_5 = \frac{1+x_2}{x_1}$, $x_6 = \frac{1+x_2}{x_3}$, $x_7 = \frac{1+x_2}{x_4}$,

$x_8 = \frac{1+x_5x_6x_7}{x_2}$

1		2		5		3		1
	1		9		14		2	
1		2		5		3		1
1		2		5		3		1

枝分かれがあるグラフのとき (D_4 型)



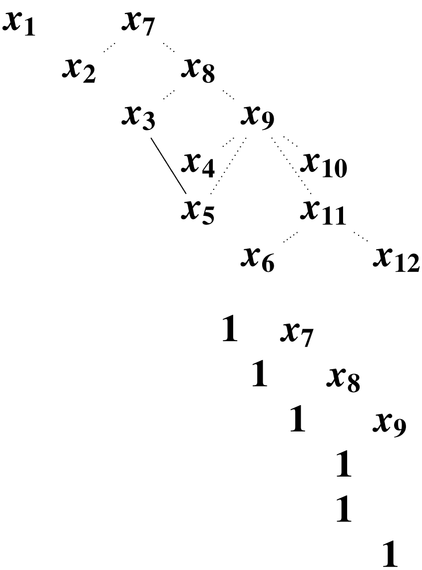
ルール $x_5=\frac{1+x_2}{x_1}$, $x_6=\frac{1+x_2}{x_3}$, $x_7=\frac{1+x_2}{x_4}$,

$x_8=\frac{1+x_5x_6x_7}{x_2}$

1		**2**		**5**		**3**		**1**	
	1		**9**		**14**		**2**		**1**
1		**2**		**5**		**3**		**1**	
1		**2**		**5**		**3**		**1**	

E_6 型

ルール　$x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$



E_6 型

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2

1 x_8

1 x_9

1

1

1

E_6 型

x_1 $\quad$ x_7

x_2 $\quad$ x_8

x_3 $\quad$ x_9

x_4 $\quad$ x_{10}

x_5 $\quad$ x_{11}

x_6 $\quad$ x_{12}

ルール $\quad x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & 2 & & & \\
& 1 & & 3 & & \\
& & 1 & & x_9 & \\
& & & 1 & & \\
& & & 1 & & \\
& & & & 1 &
\end{array}
$$

E_6 型

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2

1 3

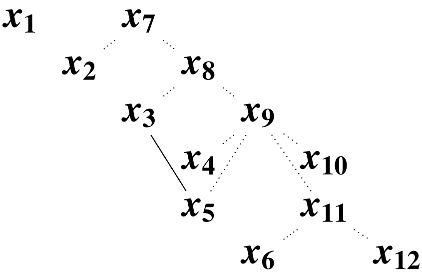
1 4

1 ?

1 ?

1

E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1+x_8x_4x_5}{x_3}$

1　2

1　3

1　4

1　5

1　5

1　?

E_6 型

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \frac{1+x_8x_4x_5}{x_3}$

1 2 ?

1 3

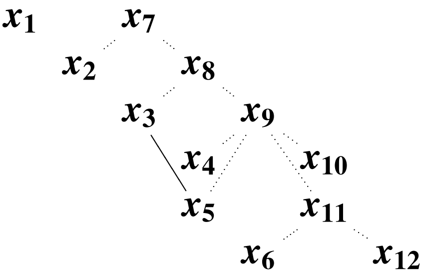
1 4

1 5

1 5

1 6

E_6 型



ルール $x_9 = \frac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2

1 3 ?

1 4

1 5

1 5

1 6

E_6 型

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2

1 3 3

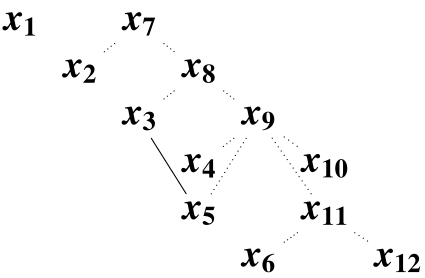
1 4 ?

1 5

1 5

1 6

E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2
1 3 3
1 4 19
1 5 ?
1 5
1 6

E_6 型

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

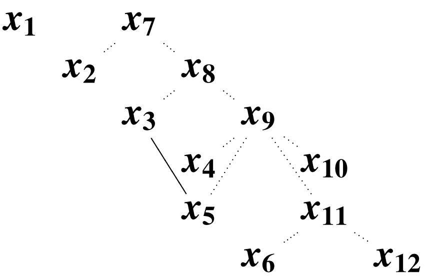
x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \frac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2
1	3	3
1	4	19
1	5	4
1	5	?
1	6	

E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2

1 3 3

1 4 19

1 5 4

1 5 23

1 6 ?

E_6 型

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \dfrac{1+x_8x_4x_5}{x_3}$

1 2 2 ?

1 3 3

1 4 19

1 5 4

1 5 23

1 6 4

E_6 型

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2

1 3 3 ?

1 4 19

1 5 4

1 5 23

1 6 4

E_6 型

ルール $x_9 = \dfrac{1+x_8x_4x_5}{x_3}$

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

1 2 2 2

1 3 3 13

1 4 19 ?

1 5 4

1 5 23

1 6 4

E_6 型

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \frac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2	2
1	3	3	13
1	4	19	63
1	5	4	?
1	5	23	
1	6	4	

E_6 型

x_1 $\quad$ x_7

x_2 $\quad$ x_8

x_3 $\quad$ x_9

x_4 $\quad$ x_{10}

x_5 $\quad$ x_{11}

x_6 $\quad$ x_{12}

ルール $\quad x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2	2
1	3	3	13
1	4	19	63
1	5	4	16
1	5	23	?
1	6	4	

E_6 型

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2	2
1	3	3	13
1	4	19	63
1	5	4	16
1	5	23	11
1	6	4	?

E_6 型

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

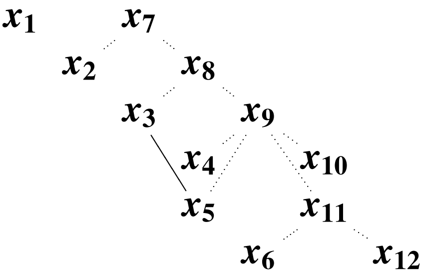
x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2	2	7					
	1	3	3	13					
		1	4	19	63				
			1	5	4	16			
			1	5	23	11			
				1	6	4	3		

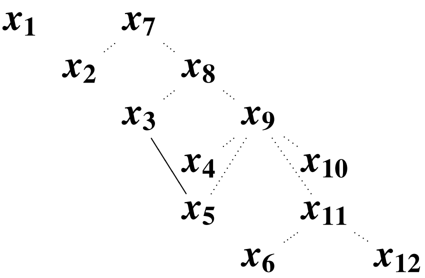
E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7
1 3 3 13 34
1 4 19 63
1 5 4 16
1 5 23 11
1 6 4 3

E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7

1 3 3 13 34

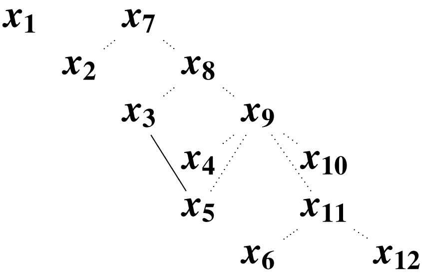
1 4 19 63 95

1 5 4 16

1 5 23 11

1 6 4 3

E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7

1 3 3 13 34

1 4 19 63 95

1 5 4 16 6

1 5 23 11

1 6 4 3

E_6 型

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

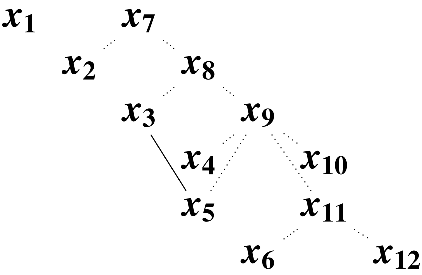
x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7
1 3 3 13 34
1 4 19 63 95
1 5 4 16 6
1 5 23 11 26
1 6 4 3

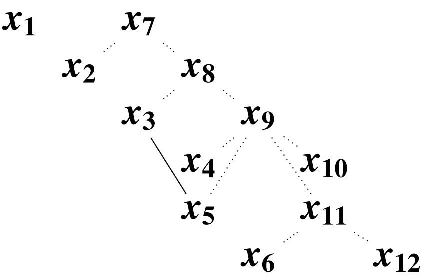
E_6 型



ルール $x_9 = \frac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2	2	7
1	3	3	13	34
1	4	19	63	95
1	5	4	16	6
1	5	23	11	26
1	6	4	3	9

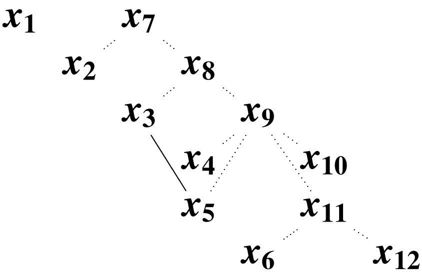
E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2	2	7	5
1	3	3	13	34	
1	4	19	63	95	
1	5	4	16	6	
1	5	23	11	26	
1	6	4	3	9	

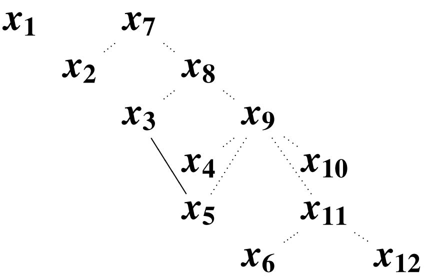
E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7 5
1 3 3 13 34 14
1 4 19 63 95
1 5 4 16 6
1 5 23 11 26
1 6 4 3 9

E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7 5

1 3 3 13 34 14

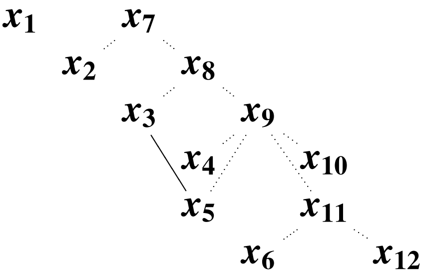
1 4 19 63 95 23

1 5 4 16 6

1 5 23 11 26

1 6 4 3 9

E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7 5

1 3 3 13 34 14

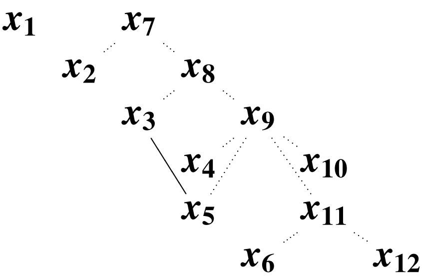
1 4 19 63 95 23

1 5 4 16 6 4

1 5 23 11 26

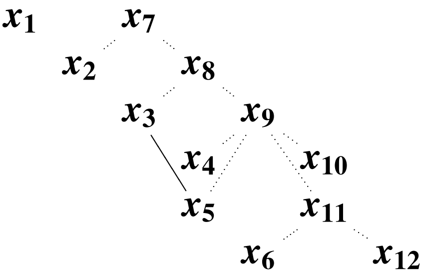
1 6 4 3 9

E_6 型



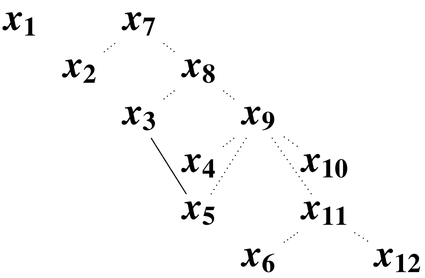
ルール $x_9 = \frac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2	2	7	5
1	3	3	13	34	14
1	4	19	63	95	23
1	5	4	16	6	4
1	5	23	11	26	8
1	6	4	3	9	



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2	2	7	5
1	3	3	13	34	14
1	4	19	63	95	23
1	5	4	16	6	4
1	5	23	11	26	8
1	6	4	3	9	1



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7 5 3

1 3 3 13 34 14

1 4 19 63 95 23

1 5 4 16 6 4

1 5 23 11 26 8

1 6 4 3 9 1

E_6 型

$x_1 \quad x_7$

$x_2 \quad x_8$

$x_3 \quad x_9$

$x_4 \quad x_{10}$

$x_5 \quad x_{11}$

$x_6 \quad x_{12}$

ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7 5 3

1 3 3 13 34 14 5

1 4 19 63 95 23

1 5 4 16 6 4

1 5 23 11 26 8

1 6 4 3 9 1

E_6 型

x_1 x_7

x_2 x_8

x_3 x_9

x_4 x_{10}

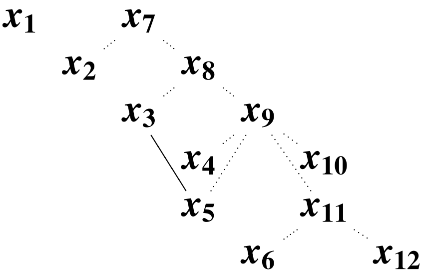
x_5 x_{11}

x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2	2	7	5	3
1	3	3	13	34	14	5
1	4	19	63	95	23	7
1	5	4	16	6	4	
1	5	23	11	26	8	
1	6	4	3	9	1	

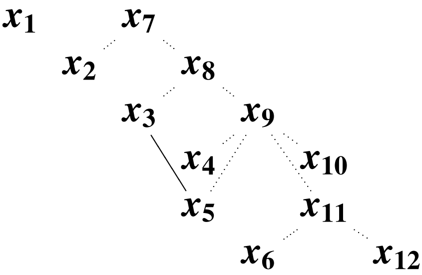
E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2	2	7	5	3
1	3	3	13	34	14	5
1	4	19	63	95	23	7
1	5	4	16	6	4	2
1	5	23	11	26	8	
1	6	4	3	9	1	

E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7 5 3

1 3 3 13 34 14 5

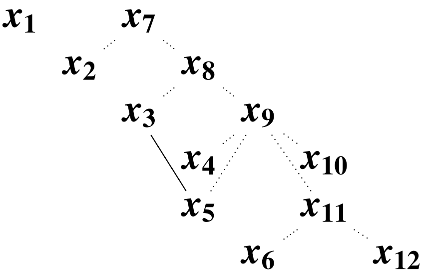
1 4 19 63 95 23 7

1 5 4 16 6 4 2

1 5 23 11 26 8 1

1 6 4 3 9 1

E_6 型



ルール $x_9 = \frac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7 5 3 2

1 3 3 13 34 14 5

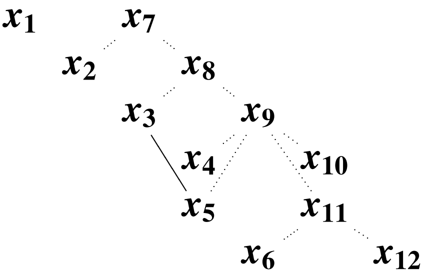
1 4 19 63 95 23 7

1 5 4 16 6 4 2

1 5 23 11 26 8 1

1 6 4 3 9 1

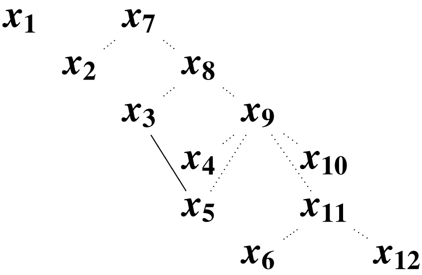
E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7 5 3 2
1 3 3 13 34 14 5 3
1 4 19 63 95 23 7
1 5 4 16 6 4 2
1 5 23 11 26 8 1
1 6 4 3 9 1

E_6 型



ルール $x_9 = \frac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7 5 3 2

1 3 3 13 34 14 5 3

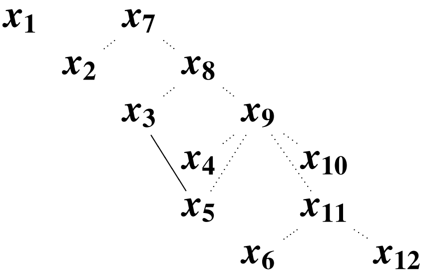
1 4 19 63 95 23 7 1

1 5 4 16 6 4 2

1 5 23 11 26 8 1

1 6 4 3 9 1

E_6 型



ルール $x_9 = \frac{1+x_8x_4x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7 5 3 2

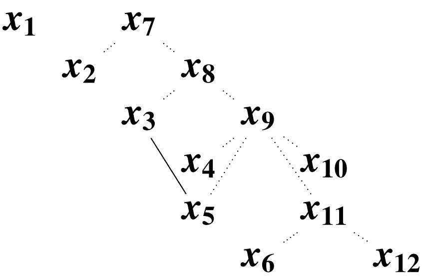
1 3 3 13 34 14 5 3

1 4 19 63 95 23 7 1

1 5 4 16 6 4 2 1

1 5 23 11 26 8 1

1 6 4 3 9 1



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2	2	7	5	3	2	2
1	3	3	13	34	14	5	3	
1	4	19	63	95	23	7	1	
1	5	4	16	6	4	2	1	
1	5	23	11	26	8	1		
1	6	4	3	9	1			

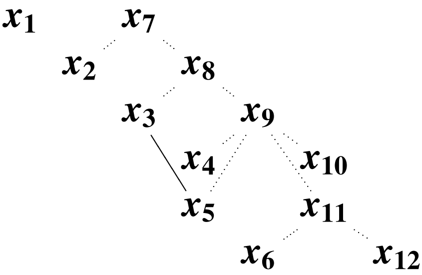
E_6 型

x_1 x_7
x_2 x_8
x_3 x_9
x_4 x_{10}
x_5 x_{11}
x_6 x_{12}

ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1	2	2	2	7	5	3	2	2	
1	3	3	13	34	14	5	3	1	
1	4	19	63	95	23	7	1		
1	5	4	16	6	4	2	1		
1	5	23	11	26	8	1			
1	6	4	3	9	1				

E_6 型



ルール $x_9 = \dfrac{1 + x_8 x_4 x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7 5 3 2 2 1

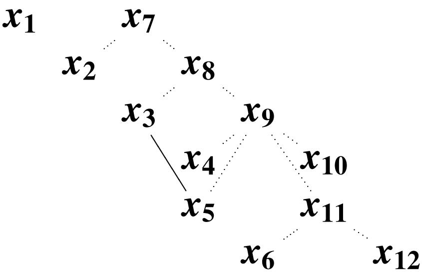
1 3 3 13 34 14 5 3 1

1 4 19 63 95 23 7 1

1 5 4 16 6 4 2 1

1 5 23 11 26 8 1

1 6 4 3 9 1



ルール $x_9 = \frac{1+x_8x_4x_5}{x_3}$

1 2 2 2 7 5 3 2 2 1

1 3 3 13 34 14 5 3 1

1 4 19 63 95 23 7 1

1 5 4 16 6 4 2 1

1 5 23 11 26 8 1

1 6 4 3 9 1

分子は難しいので、分母だけ見てみよう。

$$A_2 : \begin{array}{ccccccc} x_1 & & {}^{*}/x_1 & & {}^{*}/x_2 & & x_2 \\ & x_2 & & {}^{*}/x_1 x_2 & & x_1 & \end{array}$$

+1 の部分を除いて定める規則

$$\begin{bmatrix} f & \\ & g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & g/f \\ g & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & f \\ g & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f & \\ & f/g \end{bmatrix}$$

で最初を除き決まっている。

分子は難しいので、分母だけ見てみよう。

$$B_2: \begin{smallmatrix} x_1 & & {*}/x_1 & & {*}/x_1x_2 & & x_1 & \\ & x_2 & & {*}/x_1^2x_2 & & {*}/x_2 & & x_2 \end{smallmatrix}$$

+1 の部分を除いて定める規則

$$\begin{bmatrix} f & \\ & g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & g/f \\ g & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & f \\ g & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f & \\ & f^2/g \end{bmatrix}$$

で最初を除き決まっている。

分子は難しいので、分母だけ見てみよう。

$$G_2 : \begin{array}{cccccccccc} x_1 & & {}^*/x_1 & & {}^*/x_1^2x_2 & & {}^*/x_1x_2 & & x_1 & \\ & x_2 & & {}^*/x_1^3x_2 & & {}^*/x_1^3x_2^2 & & {}^*/x_2 & & x_2 \end{array}$$

+1 の部分を除いて定める規則

$$\begin{bmatrix} f & \\ & g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & g/f \\ g & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & f \\ g & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f & \\ & f^3/g \end{bmatrix}$$

で最初を除き決まっている。

分子は難しいので、分母だけ見てみよう。

$$A_2^{(2)}: \begin{matrix} x_1 & & */x_1 & & */x_1^3x_2 & & */x_1^5x_2^2 & & */x_1^7x_2^3 \\ & x_2 & & */x_1^4x_2 & & */x_1^8x_2^3 & & */x_1^{12}x_2^5 & \end{matrix}$$

+1 の部分を除いて定める規則

$$\begin{bmatrix} f & \\ & g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & g/f \\ g & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & f \\ g & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f & \\ & f^4/g \end{bmatrix}$$

で最初を除き決まっている。

分子は難しいので、分母だけ見てみよう。

$$A_1^{(1)}: \quad \begin{matrix} x_1 & & {}^*/x_1 & & {}^*/x_1^3x_2^2 & & {}^*/x_1^5x_2^4 & \\ & x_2 & & {}^*/x_1^2x_2 & & {}^*/x_1^4x_2^3 & & \cdots \end{matrix}$$

+1 の部分を除いて定める規則

$$\begin{bmatrix} f & \\ & g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & g^2/f \\ g & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & f \\ g & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f & \\ & f^2/g \end{bmatrix}$$

で最初を除き決まっている。

A_3 型の分母だけ見てみよう。

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & & {}^*/x_1 & & & {}^*/x_2x_3 & & x_3 & \\
& x_2 & & {}^*/x_1x_2x_3 & & & {}^*/x_2 & & x_2 \\
x_3 & & {}^*/x_3 & & & {}^*/x_1x_2 & & x_1 &
\end{array}
$$

+1 の部分を除いて定める規則

$$
\begin{bmatrix} f & \\ & g \\ h & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & & g/f \\ & g & \\ h & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & & f \\ & g & \\ h & & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & f \\ g & \\ & g/h \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} & f \\ g & \\ & h \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f & \\ & fh/g \\ h & \end{bmatrix}
$$

で最初を除き決まっている。

D_4 型の分母だけ見てみよう

$$
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & & */x_1 & & */x_2x_3x_4 & & */x_1x_2 & & x_1 & \\
& x_2 & & */x_1x_2x_3x_4 & & */x_1x_2^2x_3x_4 & & */x_2 & & x_2 \\
x_3 & & */x_3 & & */x_1x_2x_4 & & */x_2x_3 & & x_3 & \\
x_4 & & */x_4 & & */x_1x_2x_3 & & */x_2x_4 & & x_4 &
\end{array}
$$

+1 の部分を除いて定める規則

$$
\begin{bmatrix} f & & \\ & g & \\ h & & \\ i & & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & & g/f \\ & g & \\ h & & \\ i & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & & f \\ & g & \\ h & & \\ i & & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & & f \\ & g & \\ & & g/h \\ i & & \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} & & f \\ & g & \\ & & h \\ i & & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & f \\ g & \\ & h \\ & g/i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & f \\ g & \\ & h \\ & i \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f & \\ & fhi/g \\ h & \\ i & \end{bmatrix}
$$

で最初を除き決まっている。

正多面体