インスタントンの数え上げとドナルドソン不変量

中島 啓 （京都大学数理解析研究所）

2011−09−29 日本数学会年会・秋季総合分科会
場所：信州大学

目次

1. 数え上げとは
2. Donaldson不変量
3. インスタントンの数え上げ ····吉岡康太氏との共同研究
4. Witten予想の代数曲面の場合の証明 ····Lothar Göttsche，吉岡康太両氏との共同研究

1. 数え上げとは

留数定理

f: 領域 $U \subset \mathbb{C}$ で定義された正則関数
$C = \partial U$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = \sum_{a \in U} \mathrm{Res}_a f$$

証明) ストークスの定理

$\boxed{\text{積分が有限和に局所化する。}}$

応用

α: 複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の有理微分形式

$$\sum_{a \in \mathbb{P}^1} \mathrm{Res}_a \alpha = 0$$

$\cdots\to$ 後で使う。

固定点公式

- プロトタイプ：ガウス・ボンネの定理 ＋ ポアンカレ・ホップの定理
  Σ：コンパクトで向きづけられた 2次元 リーマン多様体
  X：ベクトル場　(有限個の零点しかもたない)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma K\,dA = e(\Sigma) = \sum_{p\in\Sigma} \mathrm{Index}_p X$$

(有限和)

- 今回は Bott の residue formula とよばれるものを使う。

T：トーラス $\curvearrowright$ M：複素多様体
M^T ＝ 固定点集合

$$\boxed{M\text{上の積分を } M^T \text{上の有限和で表わす。}}$$

厳密な定式化には，同変コホモロジー群を用いる。⟶ 今回は省略

α: M上のコホモロジー類（微分形式）としたとき

$$\int_M \alpha = \sum_{p \in M^T} \frac{\alpha_p}{e(T_pM)}$$

Lefschetz, Bott
Atiyah-Bott
Berline-Vergne

ここで
- α_p: α の p への制限
- $e(T_pM)$: 接空間 T_pM の同変オイラー類
  $=$ T の作用に関するウェイトの積

例. $S^1 \curvearrowright \mathbb{P}^1$ $[z_0 : z_1] \mapsto [z_0 : tz_1]$

$\Longrightarrow$ 固定点 $p_0 = [1:0]$, $p_\infty = [0:1]$ の2点

p_0, p_∞ のまわりの座標は，それぞれ $z = \dfrac{z_1}{z_0}$, $w = \dfrac{z_0}{z_1}$

S^1-作用で $z \mapsto tz$, $w \mapsto t^{-1}w$

$\therefore$ $e(T_p\mathbb{P}^1)$ は 1 と -1

例つづき

$L =$ $\mathbb{P}^1$ 上のトートロジカル直線束 $= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$

$= \{([z_0 : z_1], v_0, v_1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{C} \quad (v_0, v_1) = \lambda (z_0, z_1)\}$

$S^1 \curvearrowright L \quad ([z_0 : t z_1], v_0, t v_1)$

$p_0 = [1:0]$ におけるファイバー　$([1:0], v_0, 0)$ ← S^1 は自明に作用

$p_\infty = [0:1]$　〃　$([0:1], 0, v_1)$ ← t 倍で作用

$\Longrightarrow \quad \alpha = c_1(L)$ とすると　$\alpha_{p_0} = 0 \ , \ \alpha_{p_1} = 1$

固定点公式は次のようになる：

$$\int_{\mathbb{P}^1} c_1(L) = \underset{\substack{\uparrow \\ p_0\text{の寄与}}}{\frac{0}{1}} + \underset{\substack{\uparrow \\ p_1}}{\frac{1}{-1}} = -1$$

コンパクトでない場合

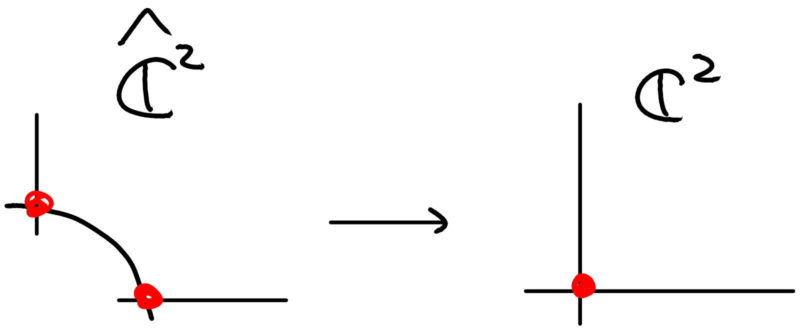
観察 固定点公式の右辺は M^T が有限個であれば意味をもつ。

例 ・ $M = \mathbb{C}^2 \curvearrowleft T^2 \quad (t_1 x, t_2 y)$

$M^T = \{0\}$ 　　ウェイト： $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$\therefore \int_{\mathbb{C}^2} 1 = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

左辺は微分型式の次数 $\neq \dim_{\mathbb{R}} M$ なので意味が分からない。
右辺は何を意味するのだろうか？



・ $M = \hat{\mathbb{C}}^2 \curvearrowleft T^2$

原点におけるブローアップ

$$\int_{\hat{\mathbb{C}}^2} 1 = \frac{1}{\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} + \frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_2} = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

同じ答えになる：$\int_{\widehat{\mathbb{C}}^2} 1 = \int_{\mathbb{C}^2} 1$ 幾何学的な意味は？

これは $\widehat{\mathbb{C}}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{C}^2$ によって 1 on $\widehat{\mathbb{C}}^2$ を押し出したものが 1 on $\mathbb{C}^2$ になることを意味する。

あるいは，ポアンカレ双対性を用いると，

$$p_*[\widehat{\mathbb{C}}^2] = [\mathbb{C}^2]$$

である。これは，p が "ほとんど" 同相写像であるから当然である。

教訓 $\int_M \alpha$ そのものの意味が分かりにくくとも，似たようなものも考えることで，幾何学的意味がでてくるかもしれない。

○対称積とヒルベルト概型

$T^2 \curvearrowright \mathbb{C}^2$ ：前と同じ作用 $\rightsquigarrow$ 対称積 $S^n\mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^n / S_n$

$$\int_{S^n\mathbb{C}^2} 1 = \frac{1}{\# S_n} \int_{\mathbb{C}^{2n}} 1 = \frac{1}{n!\ (\varepsilon_1\varepsilon_2)^n}$$

母関数を取ると $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n \int_{S^n\mathbb{C}^2} 1 = \exp\left(\frac{\mathfrak{q}}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right)$

ヒルベルト概型

$$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) = \left\{ I \subset \mathbb{C}[x,y] \mid \text{イデアル},\ \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x,y]/I = n \right\}$$

↖ $S^n\mathbb{C}^2$ の特異点解消

$p : \mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2 \longrightarrow S^n\mathbb{C}^2$ は"ほぼ"同相写像である。

$$\therefore \int_{S^n\mathbb{C}^2} 1 = \int_{\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2} 1 = \sum_{p \in (\mathrm{Hilb}^n\mathbb{C}^2)^T} \frac{1}{e(T_p \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2))}$$

↑ ヤング図形でパラメトライズされ

組合せ論的に書ける。

（Jack 多項式の Cauchy 公式が幾何学的に示された。）

2. Donaldson不変量

コンパクトで向き付けられたC^∞級4次元多様体Xに対し、
その上にRiemann計量を取り、インスタンントン方程式と呼ばれる
非線形偏微分方程式を考える。

$$F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] \text{ (曲率) が } \quad *F_A = -F_A \quad \text{をみたす。}$$

解の(同値類の)全体の成す空間，モジュライ空間を作り、
その上である自然なコホモロジー類を積分する。

$\Longrightarrow$ Xの(微分)位相不変量が定まる。

強力な不変量であるが，モジュライ空間を調べるのが難しいので
具体的な計算は難しい。

しかも，モジュライ空間は，離散パラメータ

$$\mathfrak{z} = c_1 \quad , \quad n = c_2$$

に応じて考えることができるので，∞コの不変量が定義される。

ところが 1994年に大きく理解が進んだ。

Kronheimer-Mrowka の構造定理

∞コの不変量の母関数が 有限個の量 + 古典的な不変量
で与えられる。

U(1)-モノポール方程式

Witten (もしくは Seiberg-Witten)

上の 有限個の量 は、よく似た偏微分方程式、しかしより簡単なもののモジュライ空間を用いて、D不変量と同様に定義される
(Seiberg-Witten 不変量)

よって D不変量と SW不変量は等価である。

しかし、Witten の議論は数学的に厳密な基礎付けが与えられていない物理的な考察に基づいている。

⟶ 厳密な証明を与えたい!!
(現在のところいまだ未解決)

Witten予想

(3) $$\mathcal{D}^{\mathfrak{z}}(\alpha) = 2^{(K_X^2)-\chi_h(X)+2}(-1)^{\chi_h(X)} e^{(\alpha^2)/2} \sum_{\mathfrak{s}} SW(\mathfrak{s})(-1)^{(\mathfrak{z},\mathfrak{z}+c_1(\mathfrak{s}))/2} e^{(c_1(\mathfrak{s}),\alpha)}$$

$\mathfrak{s}$: spin^{c}構造

- $c_1 = \mathfrak{z} \in H^2(X)$ はfixし，$c_2 = n$については和を取る
- $\alpha \in H_2(X)$ (α^2)：αの自己交点数
- (K_X^2), $\chi_h(X)$ ：Xの古典的な位相不変量（オイラー数とsignatureで与えられる）

Pidstrigach-Tyurin, Feehan-Leness によるU(2)-モノポール方程式を用いたアプローチにより、技術的な仮定のもと次が示された：

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{D}^{\mathfrak{z}}(\alpha) = \sum_{\mathfrak{s}} f(\chi_h(X), (K_X^2), \mathfrak{s}, \mathfrak{z}, \alpha, \mathfrak{s}_0)\, SW(\mathfrak{s})$$

fを決めることは一般には難しいと思われる。

あとで付け加えられたspin^{c}構造

多くの4次元多様体（含む代数曲面）に対して，技術的仮定のもとWitten予想が成立つ。

望月によるアプローチ

X：複素代数曲面と仮定する。

$\Longrightarrow$ インスタントンのモジュライ空間の代わりに
安定正則ベクトル束（連接層）のモジュライ空間を
用いることができる。（Hitchin－小林対応）

$\Longrightarrow$ 代数幾何の道具がいろいろ使える。
特に Gromov－Witten不変量の研究に有効だった
仮想的基本類の理論を同様に展開できる。

$\Longrightarrow$ 上のFeehan-Lenessの式と同じ式が証明できるが，
係数 f が Xの点のヒルベルト概型 $\mathrm{Hilb}^n X$ の二つの積の
上の積分として，具体的に表わされる。

$$\operatorname*{Res}_{a=\infty} \int_{\mathrm{Hilb}^{n_1}X \times \mathrm{Hilb}^{n_2}X} \cdots\cdots \, da$$

この式の証明にも
固定点公式が使われている。
（Resが現われるのは，そのため）

∴ この積分を計算しきれば Witten予想が証明できる。
次節では，その準備を行う。

3. インスタントンの数え上げ

$M_0(r,n)$ = $\mathbb{R}^4$上の $SU(r)$-インスタントンの(枠付き)モジュライ空間

$T^2 \times T^r$　　T^2の作用は，$\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$への作用
　　　　　　　T^rの作用は，枠への作用

Nekrasovの分配関数

$$Z^{inst}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{a}; \Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^{2rn} \int_{M_0(r,n)} 1$$

$M_0(r,n)$は特異点をもつので，固定点公式を直接適用して右辺を定めることができない。

方法 1. 同変ホモロジー群を用いる。
もしくは，〃 2. $M_0(r,n)$の特異点解消を用いる。

いずれにせよ，上は数学的に厳密に定義することができる。

Nekrasovの予想 = NY, NO, BEにより証明された

$$\log Z^{inst}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{a}, \Lambda) = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\left(\mathcal{F}^{inst}(\vec{a}, \Lambda) + O(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \right)$$

(超)楕円曲線の周期で書ける。

(これは、ミラー対称性の一種であると捉えることができる。)

<u>証明のポイント</u>

$M_0(r,n)$と$\hat{M}_0(r,k,n)$　　　$(k = -\langle c_1(E), [C] \rangle)$

$\mathbb{C}^2$の一点ブローアップ上の同様のモジュライ空間

を考え、$\pi : \hat{M}_0(r,k,n) \longrightarrow M_0(r,n)$によって微分形式を押し出す。

押し出しの性質を詳しく調べるとZ^{inst}を決定する関数方程式が導出される。

超楕円曲線側でも独立に同じ式を導出。

4. Witten予想の代数曲面の場合の証明

ステップ1°. ヒルベルト概型上の積分の普遍性 (Ellingsrud-Göttsche-Lehn)

$$\int_{\mathrm{Hilb}^{n_1} X \times \mathrm{Hilb}^{n_2} X} \cdots$$

は、複素曲面 X の チャーン類等で普遍的な形をしている。
但し、これは存在定理であって普遍な形の具体形までは教えてくれない。

もう少し詳しくいうと、望月の公式に出てきた"係数" f は

$$f = \operatorname*{Res}_{a=\infty} \exp \int_X \left(c_1(X),\, c_2(X),\, \mathfrak{s},\, \xi,\, \alpha,\, \mathfrak{s}_0,\, a \text{ の多項式} \right)$$

で与えられる。

コホモロジーの次数を考えると は(aを除き)高々2次式で
かなり簡単になる。特に トーリック曲面について計算すれば
十分であることが分かる。

注. トーリック曲面の上でDonaldson不変量を考えているのではなく、係数 f を考えている。

ステップ2 トーリック曲面 X については固定点公式を適用できる。

$$\coprod_n \left(\mathrm{Hilb}^n X\right)^T = X^T \text{に台をもった0次元 subschemeたちの和}$$

$$= (\text{分割全体}) \times \underbrace{\cdots}_{\#X^T \text{コだけ生じる。}} \times (\text{分割全体})$$

この分解に従い

$$\exp \int_X \cdots = \exp \sum_p (\text{各 } p \in X^T \text{ からの寄与})$$

という形になり，各寄与は $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ の場合の計算に帰着される。

→ さらに Nekrasov の分配関数（但し物質場付きのもの）

$$\sum_n \Lambda^{3n} \int_{M(2,n)} e(\mathcal{V})$$

$\mathcal{V}$: $M(r,n)$ 上の階数 n の ベクトル束（自然なもの）

で書けることが分かる。 $U(2)$-モノポールのモジュライ空間を使って望月の公式が示されているので当然である。

ステップ3　最後の計算

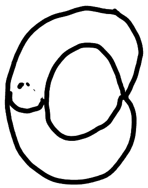
$$\log Z^{inst} = \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left[\mathcal{F}^{inst} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)H^{inst} + \varepsilon_1\varepsilon_2 A^{inst} + \frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}{3}B^{inst} + \cdots\right]$$

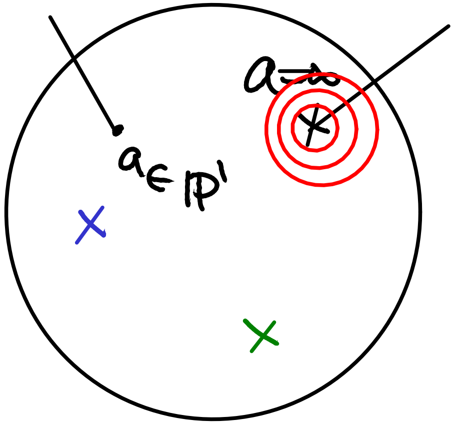
ともう少し先まで展開しておく。ステップ2の計算には、ここまでしか必要ないことが分かる。

$\mathcal{F}^{inst}$の他、H^{inst}, A^{inst}, B^{inst}も具体的に楕円曲線で書ける。

但し、・物質場付きのヴァージョンであること
・物質場のパラメータが特殊化されていること

$\Longrightarrow$ 退化した楕円曲線 ＝ 有理曲線の族になる。





$\mathrm{Res}_{a=\infty}$ を求めたかった。このaがパラメータ

族の底空間はもともとは $a=\infty$ であったが解析接続によって $\mathbb{P}^1$ に伸びる。

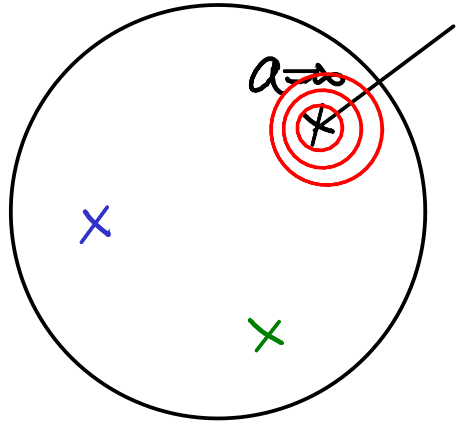
他の極における留数を計算する。

他の極は2つ（2種）

× Witten予想にあらわれるもの

× superconformal point

（Seiberg-Wittenの議論には出てこなかったが
Mariño-Moore-Peradzeが解析した）



$$\operatorname*{Res}_{a=\infty}\alpha = -\operatorname*{Res}_{a=\times}\alpha - \operatorname*{Res}_{a=\times}\alpha$$

Witten予想が正しいとすれば、$a=\times$ の寄与は 0 でなければいけない。

実際には $\operatorname*{Res}_{a=\times}\alpha \neq 0$ だが $\sum \mathrm{SW}不変量 \times \operatorname*{Res}_{a=\times}\alpha = 0$ が成立している。

これは、SW不変量に非自明な関係式が成立していることを意味する。
（superconformal simple type）

今の場合はこれもモジュライ空間の幾何から示すことができる。