単項式による level 0 crystal baseの実現

David Hernandez (CNRS)　　中島 啓 (京大理)

$\mathfrak{g}$ を affine Lie algebra とし, I を単純ルートの添字集合, (c_{ij}) を Cartan 行列, $a_{ij} = 2\delta_{ij} - c_{ij}$, $\{\alpha_i\}_{i\in I}$, $\{h_i\}_{i\in I}$ を単純ルート, 単純コルートの集合とする. 基本ウェイト Λ_i, すなわち $\langle h_i, \Lambda_j\rangle = \delta_{ij}$ を満たすものが存在すると仮定する.

さらに, $s\colon I \to \{0,1\}$ で, $C_{i,j} \le -1$ のときに $s_i + s_j = 1$ をみたすものが存在するとする. (**odd cycleがない**)

$\mathcal{Y}$ を無限個の変数 $Y_{i,n}$ $(i \in I, n \in Z)$ を持つ Laurent 多項式環

$$\mathcal{Y} \overset{\text{def.}}{=} \mathbb{Z}[Y_{i,n}^{\pm}]_{i\in I, n\in Z}.$$

とし, 単項式 m に対して $u_{i,n}(m)$ を $m = \prod_{i,n} Y_{i,n}^{u_{i,n}(m)}$ によって定める. 以下では $n \equiv s_i + 1 \bmod 2$ となる n に対して $u_{i,n}(m) = 0$ となる単項式のみ考える。そのような単項式の全体を $\mathcal{B}$ で表わす.

各単項式 $M \in \mathcal{B}$ に対し $\varepsilon_{i,n}(M)$, $\varphi_{i,n}(M)$, $\mathrm{wt}_i(M)$ を

$$\varepsilon_{i,n}(M) \overset{\text{def.}}{=} -\sum_{m: m\ge n} u_{i,m}(M), \qquad \varphi_{i,n}(M) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{m: m\le n} u_{i,m}(M),$$

$$\mathrm{wt}_i(M) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{m} u_{i,m}(M)$$

によって定義し, さらに

$$\varepsilon_i(M) \overset{\text{def.}}{=} \max_n \varepsilon_{i,n}(M), \qquad p_i(M) \overset{\text{def.}}{=} \max\{n \mid \varepsilon_{i,n}(M) = \varepsilon_i(M)\},$$

$$\varphi_i(M) \overset{\text{def.}}{=} \max_n \varphi_{i,n}(M), \qquad q_i(M) \overset{\text{def.}}{=} \min\{n \mid \varphi_{i,n}(M) = \varphi_i(M)\}.$$

と定義する. このとき写像 $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B} \sqcup \{0\}$ を

$$\widetilde{e}_i(M) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} MA_{i,p_i(M)-1} & \text{if } \varepsilon_i(M) > 0, \\ 0 & \text{if } \varepsilon_i(M) = 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{f}_i(M) \overset{\text{def.}}{=} \begin{cases} MA_{i,q_i(M)+1}^{-1} & \text{if } \varphi_i(M) > 0, \\ 0 & \text{if } \varphi_i(M) = 0. \end{cases}$$

によって定義する. ただし

$$A_{i,n} = Y_{i,n-1} Y_{i,n+1} \prod_{j: j\ne i} Y_{j,n}^{c_{ji}}$$

とする.

このとき中島 [3] と柏原 [2] は, $\mathcal{B}$ と写像 wt, ε_i, φ_i, $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{f}_i$ は, 柏原の意味の crystal[1] であることを証明した. さらに M のウェイトが支配的なときには, M を含む crystal の連結成分が対応する最高ウェイト表現の crystal に同型であることも示した.

定理. (1) M がウェイトが一般のとき, M を含む crystal の連結成分は対応する extremal ウェイト表現の crystal の連結成分に同型である.

(2) $\mathfrak{g}$ が古典型のとき, M をレベル 0 基本表現のウェイトを持つように取る. (ただし適当にとる必要がある.) このとき, M を含む連結成分の元は, 適当なヤング盤によって記述できる.

(3) $\mathfrak{g}$ が例外型のとき, レベル 0 基本表現が 'あまり大きくなければ', 連結成分にあらわれるすべての単項式をリストアップできる.

たとえば $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$ $(n = 2r+1)$ のときに, $M = Y_{\ell,0}Y_{0,\ell}^{-1}$ を考える. $(\ell \le r+1$ とする.) このとき,

$$\boxed{k}_p = Y_{k-1,p+k}^{-1} Y_{k,p+k-1} \qquad \text{for } 1 \le k \le n+1,\ p \in \mathbb{Z},$$

($Y_{n+1,p}$ は $Y_{0,p}$ と解釈する) とおき, $T = (1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \le n+1)$ に対して,

$$m_{T;j} = \prod_{p=1}^{j} \boxed{i_p}_{n-\ell-2p+2j+2} \times \prod_{p=j+1}^{\ell} \boxed{i_p}_{\ell+1-2p+2j} \qquad \text{for } 0 \le j \le \ell-1$$

とすると, $m_{T;j}$ と, $Y_{*,m}$ の m を $n+1$ づつずらしたものが連結成分にあらわれる単項式のすべてである.

さらに, $m_{T;j} \sim m_{T;j+1}$ によって同一視すると, ヤング盤 T の全体に有限次元表現の crystal の構造が入る.

講演では, $D_n^{(1)}$ 型のときの記述を紹介する予定である.

References

[1] M. Kashiwara, *The crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula*, Duke Math. **71** (1993), 839–858.
[2] ———, *Realizations of crystals*, in *Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001)*, 133–139, Contemp. Math., 325, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003
[3] H. Nakajima, *t–analogs of q–characters of quantum affine algebras of type A_n, D_n*, in *Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001)*, 141–160, Contemp. Math., 325, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.