

幾何学と表現論

中島 啓 (Hiraku Nakajima)

京都大学・大学院理学研究科

日本数学会秋期総合分科会

企画特別講演

2003/9/26

1

物理学に起源を持つ (位相) 不変量

(同変) Donaldson 不変量



Gromov-Witten 不変量

Jones-Witten 不変量

物理では, これらの間に深い関係があることが分かりつつある.

(1) Geometric Engineering (Katz-Klemm-Vafa)

(2) 例. Casson 不変量 = Chern-Simons 摂動不変量

(3) large N 双対性 (Gopakumar-Vafa, Ooguri-Vafa)

問題. 数学的に正当化できるか?

2

一番簡単な場合

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{d(1-e^{\hbar d})(1-e^{-\hbar d})} = - \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{d(2 \sinh \frac{\hbar d}{2})^2} \\
 (1) \quad & = - \sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{d^3} \hbar^{-2} - \frac{1}{12} \log(1-q) \hbar^0 \\
 & \quad + \sum_{g \geq 2} \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!} \sum_{d=1}^{\infty} d^{2g-3} q^d \hbar^{2g-2}
 \end{aligned}$$

ただし B_{2g} はベルヌーイ数である. $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$.

- q, \hbar : 不定元
- d, g : その次数をはかる, i.e., q^d, \hbar^{2g-2}

$$(a; \lambda)_{\infty} = (1-a)(1-a\lambda)(1-a\lambda^2) \cdots$$

$$\Gamma_{\lambda}(x) = \frac{(\lambda; \lambda)_{\infty}}{(\lambda^x; \lambda)_{\infty}} (1-\lambda)^{1-x}$$

(Γ 関数の量子変形)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d=1}^{\infty} \frac{e^{(x+\hbar)d}}{d(1-e^{\hbar d})(1-e^{-\hbar d})} - \sum_{d=1}^{\infty} \frac{e^{xd}}{d(1-e^{\hbar d})(1-e^{-\hbar d})} \\
 & = -\log(e^{x+\hbar}; e^{\hbar})_{\infty} = \log \left[(e^{\hbar}; e^{\hbar})_{\infty}^{-1} \Gamma_{e^{\hbar}}(x+1)(1-e^{\hbar})^{-x} \right]
 \end{aligned}$$

よって我々の母関数は, Barnes G -function の量子変形!

**アファイン平面の対称積の関数環
= 同変 Donaldson 不変量のおもちゃ**

- $T^2 \curvearrowright \mathbb{C}^2 : (x, y) \mapsto (t_1x, t_2y)$
- $H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O}) : \mathbb{C}^2$ の関数環は T^2 の表現空間になる
- $H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O})_{m,n} : \text{固有値 } t_1^m t_2^n \text{ の同時固有空間}$

指標を次で定義する.

$$\text{ch } H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O}) = \sum_{m,n \geq 0} t_1^m t_2^n \dim H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O})_{m,n}$$

5

命題.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ch } H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O}) = \exp \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{(1-t_1^d)(1-t_2^d)d} \right)$$

よって

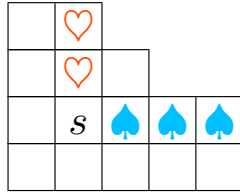
$$\log \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ch } H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O}) \right) \Big|_{\substack{t_1=e^{\hbar} \\ t_2=e^{-\hbar}}} = (1)$$

- n (or d) : 点の個数 (= 次数) これは自然!
- $g : \hbar = \log t_1 = -\log t_2$ の次数をはかる
なぜこれがリーマン面の種数と関係するのか? 不思議?

6

Young 図式による表示

ヤング図式 Y と、その中の箱 $s \in Y$ に対して、



$$l_Y(s) = \spadesuit \text{ の数 (leg length)}$$

$$a_Y(s) = \heartsuit \text{ の数 (arm length)}$$

命題.

$$\begin{aligned} & \text{ch } H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O}) \\ &= \sum_{|Y|=n} \prod_{s \in Y} \frac{1}{(1 - t_1^{-l_Y(s)} t_2^{1+a_Y(s)})(1 - t_1^{1+l_Y(s)} t_2^{-a_Y(s)})} \end{aligned}$$

- 幾何学的証明：ヒルベルト概型の上で Bott の公式
- 組み合わせ論的証明：Macdonald 多項式

7

Set $t_1 = t_2^{-1} = e^{\hbar}$.

$$\prod_{s \in Y} \left(-2 \sinh \frac{\hbar h_Y(s)}{2} \right)^{-2} = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} (\dim_{e^{\hbar}} \lambda)^2$$

- $h_Y(s) = 1 + a_Y(s) + l_Y(s)$: hook length
- λ : partition corresponding to $Y \longleftrightarrow U(N)$ の既約表現
- $\dim_{e^{\hbar}} \lambda$: 量子次元 = $Z(\text{unknot})/Z(S^3)$

8

resolved conifold の局所 Gromov-Witten 不変量

• $X : E = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ の全空間 (resolved conifold)

• $n_{g,d} : X$ の局所 Gromov-Witten 不変量

$$= \int_{M_{g,0}(\mathbb{P}^1, d)^{\text{vir}}} c_{\text{top}}(\text{forget}_* \text{eval}^* E)$$

$$\text{ただし } M_{g,0}(\mathbb{P}^1, d) \xleftarrow{\text{forget}} M_{g,1}(\mathbb{P}^1, d) \xrightarrow{\text{eval}} \mathbb{P}^1$$

定理 (Faber-Pandharipande).

$$\sum_{g \geq 0} \sum_{d=1}^{\infty} (-1)^{g-1} n_{g,d} q^d \hbar^{2g-2} = (1)$$

二つを組み合わせると

$$\text{母空間 } \sum_g M_{g,0}^\circ(\mathbb{P}^1, n) (i\hbar)^{2g-2} \stackrel{?}{=} \text{アフィン平面の } n \text{ 次対称積}$$

ただし, 右肩の \circ は連結とは限らない定義域を意味する.

$$M_{g,0}^\circ(\mathbb{P}^1, n) \stackrel{?}{=} \text{アフィン平面の } n \text{ 次対称積の '空間ローラン展開' の } (i\hbar)^{2g-2} \text{ 番目の係数}$$

注意. 両者とも $n = 0$ のときは特別な取り扱いが必要で, 今は計算していない.

S^3 の Jones-Witten 不変量

- M : コンパクトな実 3 次元 C^∞ 級多様体
- G : コンパクトなリー群 ($= U(N)$)
- k : 正の整数 (レベル)
- $[A] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$: G 接続のゲージ同値類の全体

Jones-Witten 不変量は経路積分で定義される:

$$Z(M) \equiv Z_k^G(M) = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} DA e^{\sqrt{-1}kS([A])}$$
$$S([A]) = \frac{1}{4\pi} \int_M \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right)$$

11

link の場合

- L_1, L_2, \dots : 連結成分
- R_1, R_2, \dots : G の表現
- $\text{Hol}_{C_i}[A]$: C_i に沿った A のホロノミー (その共役類は well-defined)

$$Z(M; L) \equiv Z_k^{G, \vec{R}}(M; L)$$
$$= \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} DA e^{\sqrt{-1}kS([A])} \prod_i \text{tr}_{R_i} \text{Hol}_{C_i}[A]$$

- 経路積分は数学的に正当化できないが, Hamiltonian 定式化で不変量を計算することが可能
- この計算法を数学的に厳密な定義にすることが可能

12

定理 (Witten).

$$\log Z(S^3) = -\frac{N}{2} \log(k + N) + \sum_{j=1}^{N-1} (N - j) \log \left(2 \sin \frac{\pi j}{k + N} \right)$$

証明. 共形場理論の S 行列の $(0, 0)$ 成分になる.

Gopakumar-Vafa の large N 双対性 : (1) は

$$g_s = i\hbar = \frac{2\pi}{k + N}, \quad q = \exp \left(-\frac{2\pi i N}{k + N} \right)$$

という読み替えで, $\log Z(S^3)$ の q の正巾の部分と等しい.

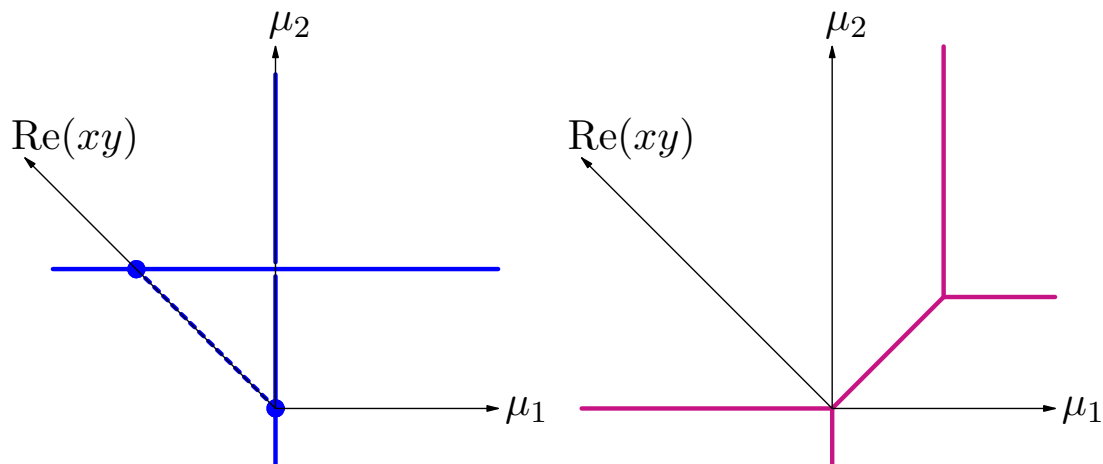
- g_s に関する展開 : Chern-Simons 摂動理論の立場から自然
- q に関する展開 : large N 展開 ('t Hooft) の立場から自然

conifold transition

- $0 \in \{xy = uv\} \subset \mathbb{C}^4$: conifold
- $T^*S^3 = \{xy = uv - \mu\}$ ($\mu \in \mathbb{C}^*$ はパラメータ) : deformation
- $X = \left\{ \frac{x}{v} = \frac{u}{y} = \frac{z_0}{z_1} \right\}$ ($[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1$) : resolution

$$\begin{array}{ccc}
 & & X = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \\
 & & \downarrow \text{resolution} \\
 T^*S^3 & \xrightarrow{\text{deformation}} & xy = uv : \text{conifold}
 \end{array}$$

- $T^2 \curvearrowright: (x, y, u, v) \mapsto (t_1 x, t_1^{-1} y, t_2 u, t_2^{-1} v)$
- moment map + $\text{Re}(xy) : T^2 \times \mathbb{R}$ -fibration over \mathbb{R}^3



- 太実線 : T^2 が退化するところ
- 点線 : $S^3 = T^2 \times [0, 1] / \sim$

15

Gromov-Witten potential for X

|| conifold transtion

open Gromov-Witten potential for $(T^* S^3, S^3)$

|| **Witten**

Jones-Witten invariants of S^3

パラメータは次のようにして移り合う.

- (open & closed ともに)
genus の不定元 g_s (string coupling constant) = $\frac{2\pi}{k+N}$
- open Riemann 面の境界の数の不定元 $t = i \text{vol } \mathbb{P}^1 = \frac{2\pi i N}{k+N}$
($q = e^{-it}$)

16

同変 K-理論版 Donaldson 不変量

- $M_0^{\text{reg}}(r, n) : \mathbb{P}^2$ 上の階数 r , $c_2 = n$ の局所自明層の枠付きモジュライ (枠とは $\Phi: E|_{\ell_\infty} \rightarrow \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r}$)
 - $M_0(r, n) = \bigsqcup_{k=0}^n M_0^{\text{reg}}(r, n-k) \times S^k \mathbb{C}^2 : \text{Uhlenbeck(部分)コンパクト化}$
 - $M(r, n) : \mathbb{P}^2$ 上の階数 r , $c_2 = n$ の torsion free な層の枠付きモジュライ
 - $\pi: M(r, n) \rightarrow M_0(r, n) : \text{自然な射影}$
- 予想. $R^i \pi_* \mathcal{O}_{M(r, n)} = 0$ for $i > 0$.

17

- $T^2 \curvearrowright \mathbb{C}^2 : (x, y) \mapsto (t_1 x, t_2 y)$
- $T^{r-1} \curvearrowright M_0^{\text{reg}}(r, n), M_0(r, n), M(r, n) : \text{枠の取り替え}$

分配関数を次で定義する:

$$Z_K^{\text{inst}}(t_1, t_2, \vec{e}; q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_i (-1)^i \text{ch } H^i(M(r, n), \mathcal{O})$$

$$\stackrel{\text{予想}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ch } H^0(M_0(r, n), \mathcal{O})$$

組み合わせ論的な次の表示式を持つ. (Bott formula による)

$$\sum_{\vec{Y}} \frac{q^{|\vec{Y}|}}{\prod_{\alpha, \beta} \prod_{s \in Y_\alpha} \left(1 - t_1^{-l_{Y_\beta}(s)} t_2^{1+a_{Y_\alpha}(s)} \frac{e_\beta}{e_\alpha} \right) \prod_{t \in Y_\beta} \left(1 - t_1^{1+l_{Y_\alpha}(t)} t_2^{-a_{Y_\beta}(t)} \frac{e_\beta}{e_\alpha} \right)}$$

18

Geometric Engineering

- Assume $r = 2$, $\vec{e} = \text{diag}(e, e^{-1})$
- $X : E = K \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の全空間
- $\vec{d} = (d_b, d_f) \in \mathbb{Z}^2$: 次数ベクトル (base と fiber)
- $n_{g, \vec{d}}$: X の局所 Gromov-Witten 不変量

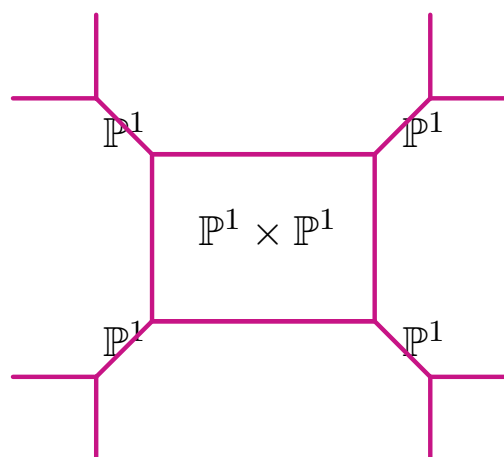
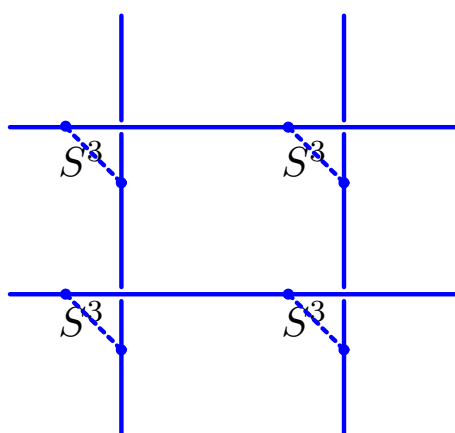
$$\sum_{g=0}^{\infty} \sum_{d_b > 0} n_{g, d} q_b^{d_b} q_f^{d_f} g_s^{2g-2} \stackrel{?}{=} \log Z_K^{\text{inst}}(e^{ig_s}, e^{-ig_s}, e; q)$$

$$\left(q_b = \frac{2^4 q}{e}, q_f = e \right)$$

19

Iqbal+Kashani-Poor (hep-th/0212279, 0306032)

large N 双対性からしたがう.



- $X =$ (外側の \mathbb{P}^1 の体積 $\rightarrow \infty$)
- 4 holomorphic cylinders connecting S^3 's lengths = r_b, r_f

20

- $\overline{Z}_{k_a}^{U(N_a); Y_i, Y_j}$: Hopf 絡み目の $U(N_a)$ -絡み目不変量 (divided by $Z(S^3)$) ($a = 1, 2, 3, 4$) ($i, j = 1, 2, 3, 4$)
- ヤング図式 Y_i と表現 R_i を同一視

$$Z_{CS} = \sum_{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4} e^{-r_b(|Y_1|+|Y_3|)} e^{-r_f(|Y_2|+|Y_4|)} \\ \times \overline{Z}_{k_1}^{U(N_1); Y_1, Y_4} \overline{Z}_{k_2}^{U(N_2); Y_2, Y_1} \overline{Z}_{k_3}^{U(N_3); Y_3, Y_2} \overline{Z}_{k_4}^{U(N_4); Y_4, Y_3}$$

- $\frac{2\pi}{k_a + N_a} = g_s$ (independent of a)
- $q_a = \exp\left(-\frac{2\pi i N_a}{k_a + N_a}\right)$

21

- $N_a \sim$ 外側の \mathbb{P}^1 の体積 ($a = 1, 2, 3, 4$)
- $q_1 = q_3, q_2 = q_4$ とし, $e^{r_b} \sqrt{q_1 q_4} = q_b, e^{r_f} \sqrt{q_1 q_2} = q_f$ (fixed) となるようにして, $r_b, r_f, N_a \rightarrow \infty$ とする.

$$\mathcal{Z}^{Y_i, Y_j} = \lim_{N_a \rightarrow \infty} \sum_R \sqrt{q_a}^{|Y_i|+|Y_j|} \overline{Z}_{k_a}^{U(N_a); Y_i, Y_j}$$

$$K_{Y_i Y_j} = \sum_Y q_f^{|Y|} \mathcal{Z}^{Y_i, Y} \mathcal{Z}^{Y, Y_j}$$

とおくと

$$\lim Z_{CS} = \sum_{Y_1, Y_2} q_b^{|Y_1|+|Y_2|} K_{Y_1 Y_2}^2$$

さらに Hopf link の Jones-Witten 不変量に関する explicit な計算を使うと, $Z_K^{\text{inst}}(t_1, t_1^{-1}, \vec{e}; q)$ の組み合わせ論的な式に一致!

22