幾何学と表現論

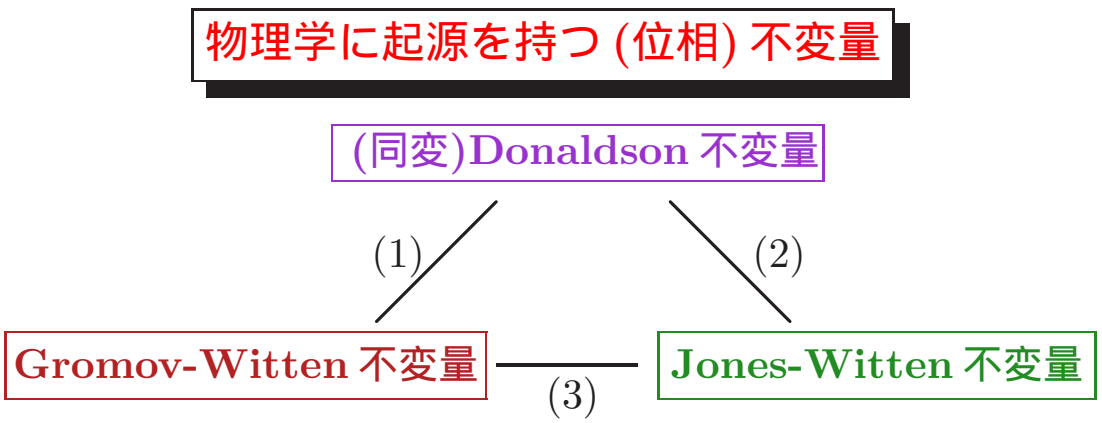
中島 啓 (Hiraku Nakajima)

京都大学・大学院理学研究科

日本数学会秋期総合分科会

企画特別講演

2003/9/26



物理では, これらの間に深い関係があることが分かりつつある.

(1) Geometric Engineering (**Katz-Klemm-Vafa**)

(2) 例. Casson 不変量 = Chern-Simons 摂動不変量

(3) large N 双対性 (**Gopakumar-Vafa**, **Ooguri-Vafa**)

問題. 数学的に正当化できるか？

一番簡単な場合

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{q^d}{d(1-e^{\hbar d})(1-e^{-\hbar d})}=-\sum_{d=1}^{\infty}\frac{q^d}{d\left(2\sinh\frac{\hbar d}{2}\right)^2}$$

$$(1)\quad =-\sum_{d=1}^{\infty}\frac{q^d}{d^3}\hbar^{-2}-\frac{1}{12}\log(1-q)\,\hbar^0$$

$$+\sum_{g\geq 2}\frac{B_{2g}}{2g(2g-2)!}\sum_{d=1}^{\infty}d^{2g-3}q^d\hbar^{2g-2}$$

ただし B_{2g} はベルヌーイ数である. $\dfrac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n}{n!}t^n$.

- q, $\hbar$: 不定元
- d, g : その次数をはかる, i.e., q^d, $\hbar^{2g-2}$

$$(a;\lambda)_\infty=(1-a)(1-a\lambda)(1-a\lambda^2)\cdots$$

$$\Gamma_\lambda(x)=\frac{(\lambda;\lambda)_\infty}{(\lambda^x;\lambda)_\infty}(1-\lambda)^{1-x}$$

(Γ 関数の量子変形)

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{e^{(x+\hbar)d}}{d(1-e^{\hbar d})(1-e^{-\hbar d})}-\sum_{d=1}^{\infty}\frac{e^{xd}}{d(1-e^{\hbar d})(1-e^{-\hbar d})}$$

$$=-\log(e^{x+\hbar};e^{\hbar})_\infty=\log\left[(e^{\hbar};e^{\hbar})_\infty^{-1}\Gamma_{e^{\hbar}}(x+1)(1-e^{\hbar})^{-x}\right]$$

よって我々の母関数は, Barnes G-function の量子変形!

アファイン平面の対称積の関数環 = 同変 Donaldson 不変量のおもちゃ

- $T^2 \curvearrowright \mathbb{C}^2 : (x, y) \mapsto (t_1 x, t_2 y)$
- $H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O})$: $\mathbb{C}^2$ の関数環は T^2 の表現空間になる
- $H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O})_{m,n}$: 固有値 $t_1^m t_2^n$ の同時固有空間

指標を次で定義する.

$$\operatorname{ch} H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O}) = \sum_{m,n \geq 0} t_1^m t_2^n \dim H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O})_{m,n}$$

命題.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \operatorname{ch} H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O}) = \exp\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{q^d}{(1-t_1^d)(1-t_2^d)d}\right)$$

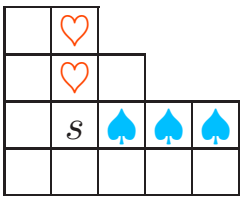
よって

$$\log\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \operatorname{ch} H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O})\right)\Bigg|_{\substack{t_1 = e^{\hbar} \\ t_2 = e^{-\hbar}}} = (1)$$

- n (or d) : 点の個数 ($=$ 次数) これは自然!
- g : $\hbar = \log t_1 = -\log t_2$ の次数をはかる
  なぜこれがリーマン面の種数と関係するのか？ 不思議?

Young 図式による表示

ヤング図式 Y と, その中の箱 $s \in Y$ に対して,



$$l_Y(s) = \text{♠の数 (leg length)}$$
$$a_Y(s) = \text{♡の数 (arm length)}$$

命題.

$$\operatorname{ch} H^0(S^n(\mathbb{C}^2), \mathcal{O}) = \sum_{|Y|=n} \prod_{s \in Y} \frac{1}{(1 - t_1^{-l_Y(s)} t_2^{1+a_Y(s)})(1 - t_1^{1+l_Y(s)} t_2^{-a_Y(s)})}$$

- 幾何学的証明：ヒルベルト概型の上で Bott の公式
- 組み合わせ論的証明：Macdonald 多項式

Set $t_1 = t_2^{-1} = e^{\hbar}$.

$$\prod_{s \in Y} \left(-2 \sinh \frac{\hbar h_Y(s)}{2} \right)^{-2} = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} (\dim_{e^\hbar} \lambda)^2$$

- $h_Y(s) = 1 + a_Y(s) + l_Y(s)$: hook length
- λ : partition corresponding to $Y \longleftrightarrow \mathrm{U}(N)$ の既約表現
- $\dim_{e^\hbar} \lambda$: 量子次元 $= Z(\text{unknot})/Z(S^3)$

resolved conifold の局所 Gromov-Witten 不変量

- X : $E = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{P}^1$ の全空間 (resolved conifold)
- $n_{g,d}$: X の局所 Gromov-Witten 不変量

$$= \int_{M_{g,0}(\mathbb{P}^1,d)^{\mathrm{vir}}} c_{\mathrm{top}}(\mathrm{forget}_* \mathrm{eval}^* E)$$

ただし $M_{g,0}(\mathbb{P}^1, d) \xleftarrow{\text{forget}} M_{g,1}(\mathbb{P}^1, d) \xrightarrow{\text{eval}} \mathbb{P}^1$

定理 (Faber-Pandharipande).

$$\sum_{g \geq 0} \sum_{d=1}^{\infty} (-1)^{g-1} n_{g,d} \, q^d \, \hbar^{2g-2} = (1)$$

二つを組み合わせると

母空間 $\sum_g M^\circ_{g,0}(\mathbb{P}^1, n)(i\hbar)^{2g-2} \stackrel{?}{=}$ アファイン平面の n 次対称積

ただし, 右肩の $^\circ$ は連結とは限らない定義域を意味する.

$M^\circ_{g,0}(\mathbb{P}^1, n) \stackrel{?}{=}$ アファイン平面の n 次対称積の '空間ローラン展開' の $(i\hbar)^{2g-2}$ 番目の係数

注意. 両者とも $n = 0$ のときは特別な取り扱いが必要で, 今は計算していない.

S^3 の Jones-Witten 不変量

- M：コンパクトな実 3 次元 C^∞ 級多様体
- G：コンパクトなリー群 $(= \mathrm{U}(N))$
- k：正の整数 (レベル)
- $[A] \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$：$G$ 接続のゲージ同値類の全体

Jones-Witten 不変量は経路積分で定義される:

$$Z(M) \equiv Z_k^G(M) = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} DA\, e^{\sqrt{-1}kS([A])}$$

$$S([A]) = \frac{1}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\left(A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right)$$

link の場合

- $L_1, L_2, \cdots$：連結成分
- $R_1, R_2, \cdots$：G の表現
- $\mathrm{Hol}_{C_i}[A]$：C_i に沿った A のホロノミー (その共役類は well-defined)

$$Z(M;L) \equiv Z_k^{G,\vec{R}}(M;L)$$

$$= \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} DA\, e^{\sqrt{-1}kS([A])} \prod_i \mathrm{tr}_{R_i}\mathrm{Hol}_{C_i}[A]$$

- 経路積分は数学的に正当化できないが, Hamiltonian 定式化で不変量を計算することが可能
- この計算法を数学的に厳密な定義にすることが可能

定理 (Witten).

$$\log Z(S^3) = -\frac{N}{2}\log(k+N) + \sum_{j=1}^{N-1}(N-j)\log\left(2\sin\frac{\pi j}{k+N}\right)$$

証明. 共形場理論の S 行列の $(0,0)$ 成分になる.

Gopakumar-Vafa の large N 双対性：(1) は

$$g_s = i\hbar = \frac{2\pi}{k+N}, \quad q = \exp\left(-\frac{2\pi i N}{k+N}\right)$$

という読み替えで, $\log Z(S^3)$ の q の正巾の部分と等しい.

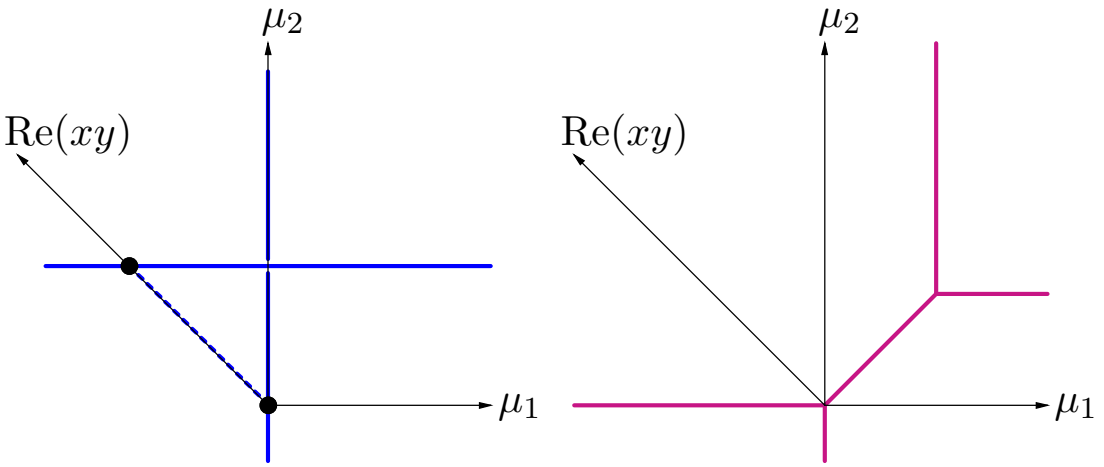
- g_s に関する展開：Chern-Simons 摂動理論の立場から自然
- q に関する展開：large N 展開 ('t Hooft) の立場から自然

conifold transition

- $0 \in \{xy = uv\} \subset \mathbb{C}^4$: conifold
- $T^*S^3 = \{xy = uv - \mu\}$ ($\mu \in \mathbb{C}^*$ はパラメータ) : deformation
- $X = \{\frac{x}{v} = \frac{u}{y} = \frac{z_0}{z_1}\}$ ($[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1$) : resolution

$$\begin{array}{ccc} & & X = \mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1) \\ & & \Big\downarrow \text{resolution} \\ T^*S^3 & \xrightarrow[\text{deformation}]{} & xy = uv : \text{conifold} \end{array}$$

- $T^2 \curvearrowright$: $(x, y, u, v) \mapsto (t_1 x, t_1^{-1} y, t_2 u, t_2^{-1} v)$
- moment map $+\mathrm{Re}(xy)$: $T^2 \times \mathbb{R}$-fibration over $\mathbb{R}^3$



- 太実線：T^2 が退化するところ
- 点線：$S^3 = T^2 \times [0,1]/\sim$

Gromov-Witten potential for X

$\Big\|$ conifold transtion

open Gromov-Witten potential for (T^*S^3, S^3)

$\Big\|$ **Witten**

Jones-Witten invariants of S^3

パラメータは次のようにして移り合う.

- (open & closed ともに)
  genus の不定元 g_s (string coupling constant) $= \frac{2\pi}{k+N}$
- open Riemann 面の境界の数の不定元 $t = i \,\mathrm{vol}\, \mathbb{P}^1 = \frac{2\pi i N}{k+N}$
  $(q = e^{-it})$

同変 K-理論版 Donaldson 不変量

- $M_0^{\mathrm{reg}}(r,n)$: $\mathbb{P}^2$ 上の階数 r, $c_2 = n$ の局所自明層の枠付きモジュライ (枠とは $\Phi\colon E|_{\ell_\infty} \to \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r}$)
- $M_0(r,n) = \bigsqcup_{k=0}^{n} M_0^{\mathrm{reg}}(r,n-k) \times S^k\mathbb{C}^2$: Uhlenbeck(部分) コンパクト化
- $M(r,n)$: $\mathbb{P}^2$ 上の階数 r, $c_2 = n$ の torsion free な層の枠付きモジュライ
- $\pi\colon M(r,n) \to M_0(r,n)$: 自然な射影

予想. $R^i\pi_*\mathcal{O}_{M(r,n)} = 0$ for $i > 0$.

- $T^2 \curvearrowright \mathbb{C}^2$: $(x,y) \mapsto (t_1x, t_2y)$
- $T^{r-1} \curvearrowright M_0^{\mathrm{reg}}(r,n), M_0(r,n), M(r,n)$: 枠の取り替え

分配関数を次で定義する:

$$Z_K^{\mathrm{inst}}(t_1,t_2,\vec{e};q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sum_i (-1)^i \operatorname{ch} H^i(M(r,n),\mathcal{O})$$

$$\overset{\text{予想}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \operatorname{ch} H^0(M_0(r,n),\mathcal{O})$$

組み合わせ論的な次の表示式を持つ. (Bott formula による)

$$\sum_{\vec{Y}} \frac{q^{|\vec{Y}|}}{\prod_{\alpha,\beta}\prod_{s\in Y_\alpha}\left(1 - t_1^{-l_{Y_\beta}(s)} t_2^{1+a_{Y_\alpha}(s)} \frac{e_\beta}{e_\alpha}\right) \prod_{t\in Y_\beta}\left(1 - t_1^{1+l_{Y_\alpha}(t)} t_2^{-a_{Y_\beta}(t)} \frac{e_\beta}{e_\alpha}\right)}$$

Geometric Engineering

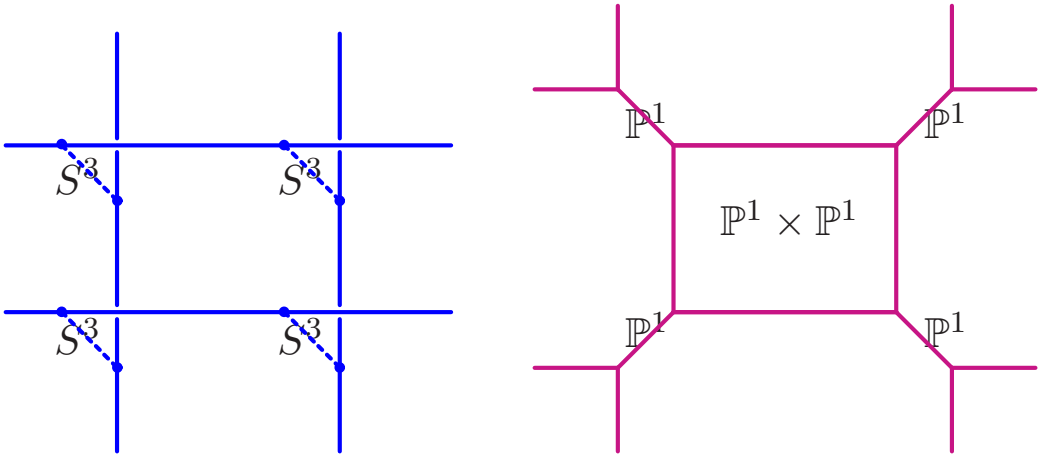
- Assume $r = 2$, $\vec{e} = \mathrm{diag}(e, e^{-1})$
- X : $E = K \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の全空間
- $\vec{d} = (d_b, d_f) \in \mathbb{Z}^2$: 次数ベクトル (base と fiber)
- $n_{g,\vec{d}}$: X の局所 Gromov-Witten 不変量

$$\sum_{g=0}^{\infty} \sum_{d_b > 0} n_{g,d}\, q_b^{d_b} q_f^{d_f} g_s^{2g-2} \stackrel{?}{=} \log Z_K^{\mathrm{inst}}(e^{ig_s}, e^{-ig_s}, e; q)$$

$$\left(q_b = \frac{2^4 q}{e},\ q_f = e \right)$$

Iqbal+Kashani-Poor (hep-th/0212279, 0306032)

large N 双対性からしたがう.



- X = (外側の $\mathbb{P}^1$ の体積 $\to \infty$)
- 4 holomorphic cylinders connecting S^3's lengths = r_b, r_f

- $\overline{Z}_{k_a}^{\mathrm{U}(N_a);Y_i,Y_j}$: Hopf 絡み目の $\mathrm{U}(N_a)$-絡み目不変量 (divided by $Z(S^3)$) $(a=1,2,3,4)$ $(i,j=1,2,3,4)$
- ヤング図式 Y_i と表現 R_i を同一視

$$Z_{\mathrm{CS}} = \sum_{Y_1,Y_2,Y_3,Y_4} e^{-r_b(|Y_1|+|Y_3|)} e^{-r_f(|Y_2|+|Y_4|)} \times \overline{Z}_{k_1}^{\mathrm{U}(N_1);Y_1,Y_4} \overline{Z}_{k_2}^{\mathrm{U}(N_2);Y_2,Y_1} \overline{Z}_{k_3}^{\mathrm{U}(N_3);Y_3,Y_2} \overline{Z}_{k_4}^{\mathrm{U}(N_4);Y_4,Y_3}$$

- $\frac{2\pi}{k_a+N_a} = g_s$ (independent of a)
- $q_a = \exp(-\frac{2\pi i N_a}{k_a+N_a})$

- $N_a \sim$ 外側の $\mathbb{P}^1$ の体積 $(a=1,2,3,4)$
- $q_1 = q_3$, $q_2 = q_4$ とし, $e^{r_b}\sqrt{q_1 q_4} = q_b$, $e^{r_f}\sqrt{q_1 q_2} = q_f$ (fixed) となるようにして, $r_b, r_f, N_a \to \infty$ とする.

$$\mathcal{Z}^{Y_i,Y_j} = \lim_{N_a\to\infty} \sum_R \sqrt{q_a}^{|Y_i|+|Y_j|} \overline{Z}_{k_a}^{\mathrm{U}(N_a);Y_i,Y_j}$$

$$K_{Y_i Y_j} = \sum_Y q_f^{|Y|} \mathcal{Z}^{Y_i,Y} \mathcal{Z}^{Y,Y_j}$$

とおくと

$$\lim Z_{\mathrm{CS}} = \sum_{Y_1,Y_2} q_b^{|Y_1|+|Y_2|} K_{Y_1 Y_2}^2$$

さらに Hopf link の Jones-Witten 不変量に関する explicit な計算を使うと, $Z_K^{\mathrm{inst}}(t_1, t_1^{-1}, \vec{e}; q)$ の組み合わせ論的な式に一致!