“母空間”とstring duality

中島 啓

京都大学理学系研究科

1997 年 4 月 4 日

言いたいこと

- 幾何学者はコンパクトで連結な多様体が好き.

  しかし, 全ての “空間” がそうではない.

- 他の分野にはあるが, 幾何にはない概念がある. (e.g. 母関数はあるのに母空間はない. 特殊関数はあるのに特殊空間論はない.) (逆もまた真なり)

母空間

定義　幾何学的対象 (ベクトル束, 位相空間など) を係数とする形式的べき級数を母空間という.

$$X_0 + qX_1 + q^2X_2 + \cdots$$

$+$ には, あまり意味はない. 一つ一つの幾何学的対象でなく, 全ての対象 X_n を取りまとめて扱うことを強調する意味で母空間と呼ぶ.

他の分野で対応する対象: 母関数, 表現空間のウェイト空間分解

簡単な母空間の例 その 1. elliptic genus

$$
\begin{aligned}
X &= \text{多様体} \\
\mathcal{L}X &= X \text{ のループ空間} \\
\mathcal{L}X \text{ 上の } S^1\text{作用} &: S^1 \text{ を回す} \\
X \subset \mathcal{L}X &: \text{固定点} \\
\text{elliptic genus} &= \mathcal{L}X \text{ 上の Dirac operator の } S^1 \text{ 作用に関する同変指数} \\
&= q^{-\dim X/24} \left\langle \widehat{A}(X) \mathrm{ch} \left(\bigotimes_{\ell=1}^{\infty} S_{q^\ell} T_X \right), X \right\rangle
\end{aligned}
$$

但し,

$$S_t T_X = 1 \oplus t T_X \oplus t^2 S^2 T_X \oplus \cdots$$

ループ空間を持ち出すことの利点は elliptic genus の modular 変換性

簡単な母空間の例 その 2. 多様体の指数関数

$$
\begin{aligned}
X &= \text{多様体} \\
S^n X &= X \text{ の } n \text{ 次対称積} \\
S_q X &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n S^n X \quad \text{対称積の母空間}
\end{aligned}
$$

Macdonald の公式

$$
\sum_{n=0}^{\infty} q^n P_t(S^n X) = \frac{(1+tq)^{b_1(X)}(1+t^3q)^{b_3(X)}\dots}{(1-q)^{b_0(X)}(1-t^2q)^{b_2(X)}(1-t^4q)^{b_4(X)}\dots}
$$

i.e.,

$$
\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^*(S^n X, \mathbb{Q}) = \mathbb{S}(H^*(X, \mathbb{Q}))
$$

注意 多様体の zeta 関数は, 対称積の有理点の個数の母関数である.

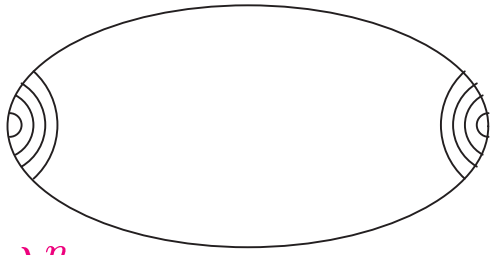
Duality とは

場の量子論

$$\begin{aligned} \lambda &= \text{パラメータ} \\ A(\lambda) &= \int D\varphi\, e^{iS(\varphi;\lambda)}(\cdots) \quad \text{分配, 相関関数} \\ &\sim \sum a_n \lambda^n \quad \text{摂動展開} \end{aligned}$$

Duality で二つの理論がつながる: $A(\lambda) \approx \tilde{A}(\tilde{\lambda})$

e.g. ミラー対称性 (T-duality)



理論 A

$A(\lambda) \sim \sum a_n \lambda^n$

理論 B

$\tilde{A}(\tilde{\lambda}) \sim \sum \tilde{a}_n \tilde{\lambda}^n$

例: σ-model の T-duality

$$\varphi\colon \Sigma \to T^n \qquad \text{smooth map}$$

$$\int D\varphi \ \exp(-\lambda \int d\varphi \wedge *d\varphi)$$

補助場 A (1-form) を加える

$$= \int DA D\varphi \ \exp(-\frac{1}{\lambda}\int A \wedge *A + iA \wedge *d\varphi)$$

A について積分する : $dA = 0 \Longrightarrow A = d\tilde{\varphi}$

$$= \int D\tilde{\varphi} \ \exp(-\frac{1}{\lambda}\int d\tilde{\varphi} \wedge *d\tilde{\varphi})$$

このとき

$$\tilde{\varphi}\colon \Sigma \to (T^n)^* \ (\text{dual torus})$$

となる.

- 理論 A における action と 理論 B における action は通常異なる.
- 理論 A と 理論 B が共存するような記述があるとは限らない. (あれば, duality は証明される ?)
- BPS states は対応する.

位相的場の量子論

a_n : 位相不変量

モジュライ空間の “交点数”, オイラー数

例: Donaldson 不変量の母関数

$$D(\exp(h+\lambda x)) = \sum c_{m,n}\lambda^n \mu(h)^m \mu(x)^n [\mathcal{M}_{m+2n}]$$

S-duality

非摂動的な対応である: $\tilde{\lambda} = -\lambda^{-1}$

特に, 理論 A と 理論 B が同じ場合は, 分配関数がモジュラー不変性を持つ.

(例. $D = 4$, $N = 4$ 超対称 Yang-Mills 理論)

S-duality の特徴

古典論	$\longleftrightarrow$	量子論
(摂動論	$\longleftrightarrow$	非摂動論)
T-duality	$\longleftrightarrow$	S-duality
string のモード展開	$\longleftrightarrow$	母空間

String duality の展開

1. どの string 理論達 (compact 化したもの) の間に duality があるか?
2. ある string 理論でよく知られている現象を duality で移った別の string 理論で探す.
3. もし, 対応するものが見つからなかったら, 新しい “対象” を付け加えて説明を試みる. また, 逆にいえば duality で移り合わない対象は本質的でないと見なされることにもなる.

モジュライ空間をまとめて取り扱うと母空間になる．それを貼りあわせてできるもの (???) が string duality を説明するためには必要である．

	まとめて取り扱う	貼合わせる
自然数	母関数	モジュラー形式
点	座標近傍	多様体
モジュライ空間	母空間	???

Heterotic string/T^4 と typeIIA string/$K3$ の duality

- $L = \Gamma_{4,20}$: charge の成す lattice
- $\mathcal{M} = \mathrm{O}(\Gamma_{4,20})\backslash\mathrm{O}(4,20)/\mathrm{O}(4)\times\mathrm{O}(20)$：理論のモジュライ空間
- L に associate した Fock 空間：BPS states

	Hetero	IIA
L	$\pi_1(T^4)\oplus\pi_1(T^4)^*\oplus E_8\oplus E_8$	$H_*(K3,\mathbb{Z})$
$\mathcal{M}$	flat metric, B-field flat connection	Ricci-flat metric B-field

Fock 空間

$$
\begin{aligned}
L &= \text{even lattice } (\text{内積 } \langle \mid \rangle) \\
\widetilde{\mathfrak{h}}_L &= \text{Heisenberg Lie algebra associated with } L \\
&= \text{generators } \alpha(n)\ (\alpha \in L, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}), K \\
&\quad \text{relations } (a\alpha + b\beta)(n) = a\alpha(n) + b\beta(n) \\
&\qquad\qquad [K, \alpha(n)] = 0 \\
&\qquad\qquad [\alpha(m), \beta(n)] = \langle \alpha \mid \beta \rangle m \delta_{m+n,0} K \\
\widetilde{\mathfrak{h}}_L^{\leqslant 0} &= \text{subalgebra generated by } \alpha(n)\ (n \leqslant 0) \\
S(\widetilde{\mathfrak{h}}_L^{<0}) &= \mathrm{Ind}_{\widetilde{\mathfrak{h}}_L^{\geq 0} \oplus \mathbb{Q}K}^{\widetilde{\mathfrak{h}}_L} \mathbb{Q} \quad (\text{Fock 表現}) \\
&\qquad \alpha(n)1 = 0 (n > 0), \quad K1 = 1
\end{aligned}
$$

Lattice から Vertex algebra を構成する

$\varepsilon(\ ,\ ): L \times L \to \{\pm 1\}$: multiplicative 2-cocycle を fix し,

$$V_L = \mathrm{Ind}_{\widetilde{\mathfrak{h}}_L^{\geq 0} \oplus \mathbb{Q}K}^{\widetilde{\mathfrak{h}}_L} \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}[L]$$

とおく. 作用を次で定める.

$$e^{\alpha} e^{\beta} = \varepsilon(\alpha, \beta) e^{\alpha+\beta}, \quad \alpha(n)\ (n \neq 0) \text{ は, } \alpha(n) \otimes 1 \text{ で作用}$$

$$\alpha(0) v \otimes e^{\beta} = \langle \alpha \mid \beta \rangle v \otimes e^{\beta}$$

vertex operator を次で定義する.

$$Y(v, z) = {:}\frac{\partial^{n_1} \phi_{\alpha_1}(z)}{(n_1 - 1)!} \cdots \frac{\partial^{n_k} \phi_{\alpha_k}(z)}{(n_k - 1)!} Y(e^{\beta}, z){:}$$

$$\text{where } \phi_{\alpha}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \alpha(n) \frac{z^{-n}}{-n} + \alpha(0) \log z + \alpha$$

$$v = \alpha_1(-n_1) \cdots \alpha_k(-n_k) \otimes e^{\beta}$$

BPS states

Heterotic Side

perturbative BPS states = モード展開の量子化で得られる Fock 空間

typeIIA Side

BPS states = H^*(D-branes のモジュライ空間)

D-brane with a given charge = sheaf with a given Mukai vector

例: N 0-branes + one 4-brane = Hilbert scheme of points

代数曲面の上の点の Hilbert scheme

X = 非特異射影代数曲面

S^nX = X の n 次対称積

$X^{[n]}$ = length n の 0 次元部分スキームの成すヒルベルトスキーム

$\pi\colon X^{[n]} \to S^nX$: 特異点解消

定理 (N., Grojnowski (1995))

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_*(X^{[n]}) = \mathbb{S}(\widetilde{\mathfrak{h}}_L^{<0}) \quad (L = H_*(X))$$

$$\left(cf. \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_*(S^nX) = \mathbb{S}(L) \right)$$

Proof. $i > 0$ に対し, 次の correspondence を考える.

$$P[i] = \coprod_{n=0}^{\infty} \{(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \in X^{[n-i]} \times X^{[n]} \mid$$
$$\mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2, \mathrm{Supp}(\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_2) = \{x\} \text{ for some } x \in X\}$$
$$\Pi \colon P[i] \to X,$$
$$p_1 \colon X^{[n-i]} \times X^{[n]} \to X^{[n-i]}, \quad p_2 \colon X^{[n-i]} \times X^{[n]} \to X^{[n]}$$

$\alpha \in H_*(X)$ に対して次で operator を定義する.

$$P_\alpha[i] \colon \bigoplus_n H_*(X^{[n]}) \to \bigoplus_n H_*(X^{[n-i]})$$
$$c \longmapsto p_{1*}\left(p_2^* c \cap \Pi^* \alpha \cap \left[P[i]\right]\right)$$

$i < 0$ のときは, p_1 と p_2 を入れ替える.

$$P_\alpha[i] \colon \bigoplus_n H_*(X^{[n-i]}) \to \bigoplus_n H_*(X^{[n]})$$

このとき次の (super)Heisenberg 代数の関係式が成り立つ.

$$\Big[P_\alpha[i], P_\beta[j]\Big] = (-1)^{i-1} i\delta_{i+j,0}\langle\alpha \mid \beta\rangle \mathrm{id}$$

さらに $\bigoplus_n H_*(X^{[n]})$ は, $1 \in H_0(X^{[0]})$ を highest weight vector として持つ. □

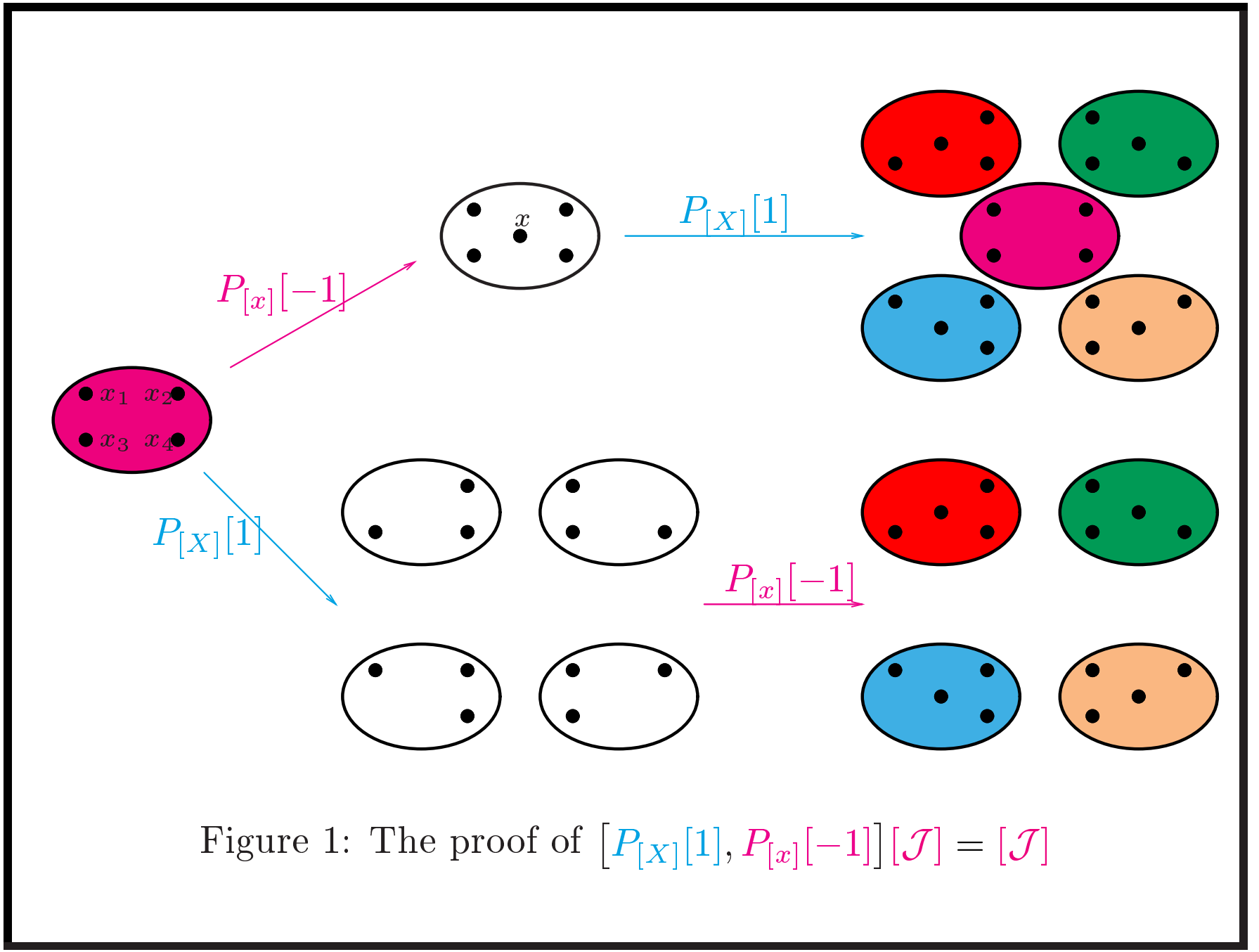


Figure 1: The proof of $\big[P_{[X]}[1], P_{[x]}[-1]\big][\mathcal{J}] = [\mathcal{J}]$