ALE GRAVITATIONAL INSTANTONS 上の ANTI-SELF-DUAL CONNECTION の構成と分類

東京大学理学部　中島 啓

MSRI のある部屋を緊張した面持で訪れた僕は、二人のうちのどちらかといえば威厳がある方に

「Are you Peter Kronheimer ?」

とたずねた。するともう一方の、僕とほとんど年も違わないような、いかにもパッとしない青年が手を上げて、「わたしだ。」と答えた。

しかし、黒板の前で僕の前の論文 [Na] について議論しはじめると、彼が非常に多くの知識を持った優れた数学者であることが、すぐに分った。そして数学者について、論文から受ける印象と、外見から感じる印象と、そして話してみて受ける印象は全く違うのだと改めて思ったのである。こうして我々の共同研究は始まった。

Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin は S^4 上の anti-self-dual connection の構成と分類の問題を提出した（[ADHM]）。いわゆる ADHM construction は、問題をある二次式をみたす行列の構成と分類に帰着させた。Peter Kronheimer と僕はこれを ‘ALE gravitational instanton’ と呼ばれる４次元多様体の上に拡張した。ここでの目的は、我々の結果についてできるだけ self-contained に解説を行うことにある。しかし ALE gravitational instanton についてその定義から解説することは、それだけでもう一つ別の論説を必要とするので、ここでは S^4 の場合について詳しく見たあとに、ALE gravitational instanton の場合には結果を state するにとどめる。

1. Vector Bundle と Connection

この節ではまず connection の一般論を復習する。より詳しくは例えば [小林-野水] や [小林] を見よ。

(X, g) を Riemannian manifold として、(E, h) をその上の hermitian vector bundle とする。すなわち E は C^∞-vector bundle であって h はその上の hermitian inner product である。E の C^∞-section の全体の空間を $\Gamma(E)$、E に値を持つ p-form の全体 (i.e. $\Lambda^p X \otimes E$ の section の全体) を $\Omega^p(E)$ と書く。

Definition 1.1. $\mathbb{C}$ 上の homomorphism $\nabla_A \colon \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$ が connection(あるいは covariant differentiation(共変微分)) であるとは、次を満たすときをいう。

$$dh(\varphi, \psi) = h(\nabla_A \varphi, \psi) + h(\varphi, \nabla_A \psi) \tag{1}$$

$$\nabla_A (f\varphi) = df \otimes \varphi + f \nabla_A \varphi \tag{2}$$

$$\text{for } \varphi, \psi \in \Gamma(E),\ f \in C^\infty(X)$$

connection が微分作用素であることをあまり意識しないときには、添字の部分だけ取って、単に A が connection であるということもある。

U を X の十分小さい open set として、U 上で E の local unitary frame field $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ を取っておく。このとき

$$\nabla_A \varphi_i = \sum_j \omega_i^j \varphi_j$$

によって $\omega_i^j \in \Omega^1(E|_U)$ を定義し、∇_A の local frame field $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ に関する connection form と言う。$\{\psi_1, \ldots, \psi_r\}$ を別の local unitary frame field とすると、

$$\psi_i = \sum_j u_i^j \varphi_j \qquad \text{for some } (u_i^j) \in U(r)$$

と書くことができる。このとき $\{\psi_1, \ldots, \psi_r\}$ に関する connection form を ${\omega'}_i^j$ とすると、

$${\omega'}_i^j = \sum_k du_i^k (u^{-1})_k^j + \sum_{k,l} u_i^k \omega_k^l (u^{-1})_l^j$$

が成り立つ。これを symbolic に $\omega' = du\, u^{-1} + u\omega u^{-1}$ と書く。

A_1 と A_2 がともに connection であるとき、その差

$$\alpha = \nabla_{A_1} - \nabla_{A_2}$$

は Endskew(E) に値を持つ 1-form である。逆に一つの connection A が fix されたとき、任意の $\alpha \in \Omega^1(\text{Endskew}(E))$ に対して、$\nabla_A + \alpha$ もまた connection である。

curve $c\colon [0,1] \to X$ が与えられたとき、$c(0)$ 上の fiber の元 $\xi \in E_{c(0)}$ に対して次の線型常微分方程式を解くことができる。

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{dc(t)}{dt}} \xi(t) = 0 \\ \xi(0) = \xi \end{cases}$$

但し、∇_A を単に ∇ と書いた。$\xi(t) \in E_{c(t)}$ を ξ の connection ∇ に関する parallel translation(平行移動) という。

Definition 1.2. connection A に対してその curvature form R_A を次で定義する。

$$R_A(v,w)\varphi = \nabla_v \nabla_w \varphi - \nabla_w \nabla_v \varphi - \nabla_{[v,w]}\varphi \quad \text{for } v, w \in TX\,,\ \varphi \in \Gamma(E)$$

容易に確かめられるように curvature はもはや微分作用素ではなく (すなわち $R_A(v,w)f\varphi = fR_A(v,w)\varphi$ for $f \in C^\infty(X)$)、$\Omega^2(\text{Endskew}(E))$ の元である。vector bundle がどのように曲っているかを測るための量である。

p-form α に対してその exterior differential operator $d\alpha$ を考えたように、connection A を用いて、E に値を取る p-form α についてその exterior differential operator $d_A\alpha$ を定義しよう。すなわち

$$d_A\colon \Omega^p(E) \to \Omega^{p+1}(E)$$

を次によって定める。

$$d_A(\varphi\alpha) = d\varphi \wedge \alpha + \varphi d\alpha \quad \text{for } \varphi \in \Gamma(E)\,,\ \alpha\colon\ p\text{-form}$$

このとき curvature は $R_A = d_A \circ d_A\colon \Omega^0(E) \to \Omega^2(E)$ で与えられる。exterior differential operator d が $d^2 = 0$ を満たしたのに対し d_A がそれを満たすとは限らないことに注意しよう。実際に

$$d_A^2\alpha = R_A \wedge \alpha \qquad \text{for } \alpha \in \Omega^p(E)$$

が成り立つ。ここに R_A は bundle の成分には End(E) の元として作用し、form の成分には外積でかけ算される。

以上の話は別に vector bundle が complex である必要性はなく、real な vector bundle でも全く同様に話ができる。

tangent bundle の Levi-Civita connection が tensor の微分を定めたように E の connection A は dual vector bundle E^* の connection やそれらの tensor product $E^{\otimes p} \otimes E^{*\otimes q}$ の connection を自然に induce する。より一般に E と F に connection があれば、$E \otimes F$ にも connection が induce される。Whitney sum $E \oplus F$ にも induce されるのももちろんである。混乱の無い限り、connection A から induce される connection はすべて A で表す。

次は R_A の定義から容易に従う。

Proposition 1.3. connection A の curvature form R_A は $\Omega^2(\mathrm{Endskew}(E))$ の元として次式を満たす。

$$d_A R_A = 0 \qquad \text{(Bianchi identity)}$$

ここで d_A は $\Omega^2(\mathrm{Endskew}(E)$ の元に作用する exterior differential operator である。

応用上一番重要なのは subbundle に自然に induce される connection である。S を E の subbundle とする。E の metric h を S に制限することにより S は自然な hermitian metric を持つ。これを h_S と書く。S の直交補空間を集めてできる E の subbundle を $S^\perp$ とする。∇_A を S と $S^\perp$ に分けて、∇_A^S と Π を次式で定義する。

$$\nabla_A \varphi = \nabla_A^S \varphi + \Pi\varphi \quad \varphi \in \Gamma(S)$$

このとき

Proposition 1.4.

(1) ∇_A^S は (S, h_S) の connection である。

(2) Π は $\mathrm{Hom}(S, S^\perp)$ に値を持つ 1-form である。(Π を second fundamental form と言う。)

(3) (Gauss equation) ∇_A^S の curvature form R^S は次式で与えられる。

$$h_S(R^S(v,w)\varphi,\psi) = h(R_A(v,w)\varphi,\psi) - h(\Pi(v)\varphi,\Pi(w)\psi) + h(\Pi(w)\varphi,\Pi(v)\psi)$$
$$\text{for } \varphi,\psi \in \Gamma(E)$$

次に principal bundle とその上の connection を定義する。

Definition 1.5. G をLie groupとして、C^∞-manifold P が X 上のprincipal bundleであるとは、G の P へのsmoothな(右からの)actionがあって、次を満たすときを言う。

(1) G の P へのactionはfreeである。(すなわち $p.g = p$ for some $p \in P$ ならば $g = e$ となる。)

(2) P の G のactionに関する商空間は X であり、自然な射影 $\pi\colon P \to X$ はsmoothである。

(3) P はlocalにtrivialである。すなわち、任意の $x \in X$ に対して近傍 U と G-equivariant-diffeomorphism $\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$ が取れる。但し $U \times G$ には G が第二成分へのかけ算としてactする。

このとき G をprincipal bundle P の構造群という。

P の例として一番よく出てくるものは、あるhermitian vector bundle E のframe bundleとなっているものである。すなわち、各 $x \in X$ に対して P_x をvector space E_x のunitary frameの全体として、$P = \bigcup_{x \in X} P_x$ にしかるべき C^∞-structureを入れたものである。構造群は $U(r)$ $(r = \mathrm{rank}\ E)$ となる。

Definition 1.6. P の上のconnectionとは、G のLie algebra $\mathfrak{g}$ に値を持つ P 上の1-form θ で次を満たすもののことを言う。

$$\theta(\xi^*) = \xi \qquad \text{for all } \xi \in \mathfrak{g} \tag{1}$$

$$R_g^*\theta = \mathrm{Ad}(g^{-1})\theta \tag{2}$$

但し、$R_g\colon P \to P$ は $p \mapsto p.g$ で定義されるdiffeomorphismのことで、また ξ^* は P 上のvector fieldで次式で定義される。

$$\xi^*(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p.\exp(t\xi)$$

P にconnectionが与えられたとき、horizontal subspace H_p を

$$H_p = \{v \in T_pP \mid \theta(v) = 0\}$$

で定義する。するとtangent space T_pP は $T_pP = T_pG(p) \oplus H_p$ と直交分解する。$G(p)$ は p を通る G-orbitである。逆にこのような直交分解で G の作用についてequivariantなものがあればconnection θ が定められる。射影 $\pi\colon P \to X$ を

通じて horizontal subspace H_p と tangent space $T_{\pi(p)}X$ は同型である。tangent vector $v \in T_xX$ に対し、対応する horizontal subspace の元を v の horizontal lift という。$p \in \pi^{-1}(x)$ を選ぶごとに horizontal lift は unique に定まる。

G の vector space V への表現 ρ が与えられると、P から associated vector bundle $E = P \times_\rho V$ が

$$E = \{(p, \xi) \in P \times V\}/\sim$$
$$\text{where } (p,\xi) \sim (p',\xi') \Longleftrightarrow p' = p.g, \xi' = \rho(g^{-1})\xi \text{ for some } g \in G$$

によって定義される。例えば P を hermitian vector bundle E の frame bundle として、$U(r)$ の標準的な $\mathbb{C}^r$ 上の表現を取ると associated vector bundle としては、E が再現される。

P に connection θ があるとき、associated vector bundle E にも connection(前に定義した意味のもの) が以下のように induce される。まず section $\varphi \in \Gamma(E)$ は G-equivariant map $\varphi\colon P \to V$ と同一視される。tangent vector $v \in T_xX$ に対してその horizontal lift を $\widetilde{v} \in H_p$ とする。($p \in \pi^{-1}(x)$ は fix する。) そこで

$$\nabla_v \varphi = d\varphi(\widetilde{v})$$

とおく。$d\varphi$ は P 上の関数と思って微分したものである。異なる $p' \in \pi^{-1}(x)$ をとっても、得られる結果は G の元で移りあうので $\nabla_v\varphi$ は well-defined である。

逆に vector bundle E に connection ∇ が与えられたときに、その frame bundle P に connection を定義することもできる。$p \in P_x$ を E_x の orthonormal frame $\{e_1, \ldots, e_r\}$ とするとき、x を出発する curve $c(t)$ を取って平行移動 $p(t) = \{e_1(t), \ldots, e_r(t)\}$ を考える。$p(t)$ は P の中の curve を与える。このとき

$$H_p = \{\frac{d}{dt}p(0) \in T_pP \mid c(t) \text{ は } x \text{ を出発する全ての curve を動く。}\}$$

で horizontal subspace $H_p \subset T_pP$ を決める。上に注意したようにこのとき P には connection が定められる。前のように frame bundle P と vector bundle E を考えたとき、それらの上の connection がこのやり方で移りあうことは容易に確かめられる。

2. Clifford algebra と Dirac operator

この section では Clifford algebra とその spin 表現、および Dirac operator について復習する。詳しくは [Atiyah-Bott-Shapiro],[Roe] などを見よ。

V を n 次元の real oriented vector space とし、さらに内積 (,) が与えられているとする。V の tensor algebra を $T(V)$ で表す。

$$T(V) = \sum_{i \geq 0} \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{i \text{ 個}}$$

$v \otimes v + (v, v)1$ ($v \in V$) で生成される $T(V)$ の ideal I を考え、quotient algebra $T(V)/I$ を V の Clifford algebra と言って $\mathrm{Cl}(V)$ で表す。V の正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を取ると、$\mathrm{Cl}(V)$ は $e_1, \dots, e_n$ で生成されて relation

$$e_i^2 = -1, \qquad e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad \text{if } i \neq j$$

を満たす。これが定義だと思ってもよろしい。特に vector space としては $\mathrm{Cl}(V)$ は外積代数 $\lambda^* V$ と同型である。(algebra としての同型ではない。) よって

$$\dim \mathrm{Cl}(V) = 2^{\dim V}$$

が成り立つ。reversion map $^*\colon \mathrm{Cl}(V) \to \mathrm{Cl}(V)$ を

$$(v_1 \cdots v_k)^* = v_k \cdots v_1 \qquad \text{for } v_i \in V$$

で定義する。$e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}$ と基底の偶数個の積で書ける元たちの linear span を $\mathrm{Cl}^0(V)$ と書く。奇数個の積で書ける元たちの linear span を $\mathrm{Cl}^1(V)$ と書く。

Definition 2.1. $\mathrm{Pin}(V) \subset \mathrm{Cl}(V)$ を次の二つの条件を満たす元の全体とする。

(1) $$x \in \mathrm{Cl}^0(V) \cup \mathrm{Cl}^1(V)$$

(2) $$xx^* = x^*x = (-1)^{\deg x}$$

(3) $$xvx^* \in V \quad \text{for } \forall v \in V$$

$\mathrm{Pin}(V)$ は Lie group である。$\mathrm{Pin}(V) \cap \mathrm{Cl}^0(V)$ を $\mathrm{Spin}(V)$ と書く。$\mathrm{Pin}(V)$ の V への表現 $\rho\colon \mathrm{Pin}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ を

$$\rho(x)v = xvx^*$$

によって定義する。

Proposition 2.2.

(1) $\rho(\mathrm{Pin}(V)) = \mathrm{O}(V)$ で次の exact sequence が存在する。

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pin}(V) \xrightarrow{\rho} \mathrm{O}(V) \longrightarrow 1$$

(2) 次の exact sequence が存在する。

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Spin}(V) \xrightarrow{\rho} \mathrm{SO}(V) \longrightarrow 1$$

(3) $\dim V \geq 2$ のとき $\mathrm{Spin}(V)$ は connected である。$\dim V \geq 3$ のとき $\mathrm{Spin}(V)$ は simply connected である。(よって $\mathrm{Spin}(V)$ は $\mathrm{SO}(V)$ の universal covering group である。)

以後 V の次元 n は偶数 $2l$ であると仮定する。

Proposition 2.3. ある複素 vector space S が存在して、

$$\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$$

という同型がある。S を the space of spinors と言う。

$\tau := (\sqrt{-1})^l e_1 \cdots e_n \in \mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C}$ とおく。$\tau^2 = 1$ が成り立つ。$S^{\pm}$ を

$$S^{\pm} := \{s \in S \mid \tau s = \pm s\} \quad \text{(the space of positive (negative) spinors)}$$

で定義する。τ と $\mathrm{Cl}^0(V)$ の元は可換なので、$\mathrm{Spin}(V) \subset \mathrm{End}(S^+) \oplus \mathrm{End}(S^-)$ となる。そこで $S^{\pm}$ を $\mathrm{Spin}(V)$ の表現空間と見て positive(negative) half spinor representation という。$\mathrm{Spin}(V)$ は compact であるから、この表現が unitary になるように $S = S^+ \oplus S^-$ に内積を定義できる。

以上はもちろん一般の次元で成り立つことだが、以下で必要になるのは 4 次元の時だけだから、そのときをより具体的に見ることにしよう。

vector space V を $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ とする。z_1, z_2 を $\mathbb{C}^2$ の標準的な座標関数として、天下り的に

$$S^+ := \text{Linear span of } \{1, \frac{1}{2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2\}$$
$$S^- := \text{Linear span of } \{\frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_1, \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_2\}$$

と定義する。$\mathrm{Cl}(V)$ の $S = S^+ \oplus S^-$ への表現を、V の real vector space としての標準的な basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ によって

$$
\begin{aligned}
e_1 \cdot 1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_1, & e_1 \cdot \frac{1}{2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_2 \\
e_2 \cdot 1 &= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} d\bar{z}_1, & e_2 \cdot \frac{1}{2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 &= -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} d\bar{z}_2 \\
e_3 \cdot 1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_2, & e_3 \cdot \frac{1}{2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_1 \\
e_4 \cdot 1 &= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} d\bar{z}_2, & e_4 \cdot \frac{1}{2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 &= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} d\bar{z}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_1 &= -1, & e_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_2 &= -\frac{1}{2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \\
e_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_1 &= \sqrt{-1}, & e_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_2 &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 \\
e_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_1 &= \frac{1}{2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2, & e_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_2 &= -1 \\
e_4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_1 &= \frac{\sqrt{-1}}{2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2, & e_4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} d\bar{z}_2 &= \sqrt{-1}
\end{aligned}
$$

で定める。上の式によって $\mathrm{Cl}(V)$ の表現が well-defined であること、$\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$ であることは直接計算によって容易に確かめられる。

$S^{\pm}$ に anti-linear map $J_{S^{\pm}}$ を

$$
\begin{aligned}
J_{S^+} 1 &= \frac{1}{2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2, & J_{S^+} \frac{1}{2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2 &= -1 \\
J_{S^-} d\bar{z}_1 &= d\bar{z}_2, & J_{S^-} d\bar{z}_2 &= -d\bar{z}_1
\end{aligned}
$$

によって定める。このとき vector space V は、real vector space として

$$
\mathrm{Hom}_J(S^+, S^-) := \{ f \in \mathrm{Hom}(S^+, S^-) \mid J_{S^-} f = f J_{S^+} \}
$$

と同型である。また $\mathrm{Hom}_J(S^+, S^-)$ は $\mathrm{Hom}(S^+, S^-)$ の real form である。$\mathrm{Spin}(V) = \mathrm{Spin}(4)$ も今の場合容易に計算することができて、$\mathrm{SU}(S^+) \times \mathrm{SU}(S^-)$ となる。この anti-linear map $J_{S^{\pm}}$ によって $S^{\pm}$ は 1 次元の quarternion vector space $\mathbb{H}$ と同一視される。また

$$
\omega_{S^{\pm}}(s, s') = (s, J_{S^{\pm}} s')
$$

によって $S^{\pm}$ に symplectic structure が定義される。これにより自然な complex isomorphism $(S^{\pm})^* \cong S^{\pm}$ がある。

4 次元の vector space V の second exterior product $\Lambda^2 V$ はよく知られているように、二つの subspace $\Lambda^+ V$ と $\Lambda^- V$ に直交分解する。V と V^* を同一視して、Hodge の star operator $*\colon \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V$ を用いると、

$$\Lambda^\pm V = \{\alpha \in \Lambda^2 V \mid *\alpha = \pm\alpha\}$$

で定義される。$*^2 = 1$ であるから、上は $*$ の固有空間分解である。

前に注意したように外積代数 $\Lambda^* V$ は Clifford algebra $\mathrm{Cl}(V)$ と vector space として同型だから、spinor space S に作用する。このとき $\Lambda^+ V$ はどのように作用するだろうか？ $\Lambda^+ V$ の basis として

$$\frac{e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4}{2}, \quad \frac{e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2}{2}, \quad \frac{e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3}{2}$$

が取れる。上の関係式を使って具体的に計算すると、S^- の元は全て 0 に移し、S^+ には上で与えられた basis を用いて、行列表示すると

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。これは $\mathfrak{su}(S^+) = \mathfrak{su}(2)$ の basis を与える。同様に $\Lambda^- V \cong \mathfrak{su}(S^-)$ で、これらを合わせて

$$\Lambda^2(V) = \Lambda^+ V \oplus \Lambda^- V \cong \mathfrak{su}(S^+) \oplus \mathfrak{su}(S^-)$$

というよく知られた関係が導かれる。$\Lambda^2(V)$ は $\mathrm{SO}(V)$ の Lie algebra と同型で、上の対応 $\mathfrak{so}(V) \cong \mathfrak{su}(S^+) \oplus \mathfrak{su}(S^-)$ は Lie algebra としての同型である。これは、covering map $\pi\colon \mathrm{SU}(S^+) \times \mathrm{SU}(S^-) \to \mathrm{SO}(V)$ の微分に他ならない。

次に Dirac operator を定義する。(X, g) を n 次元の oriented Riemannian manifold とするとき、(X, g) が *spin* であるとは、tangent bundle TX の orthonormal frame bundle P の構造群が $\mathrm{Spin}(n)$ まで reduce されるときを言う。すなわち、ある $\mathrm{Spin}(n)$ を構造群とする principal bundle P_{spin} と bundle map $P_{\mathrm{spin}} \to P$ で、各 fiber に制限するとき $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ という double covering map になっているものが存在することである。(X, g) の上の spin structure といったときには、このような principal bundle P_{spin} のことを意味することにする。

多様体の次元 n が偶数であるとして、positive (negative) spinor representation $\rho^\pm$ によって P_{spin} に associate した vector bundle

$$P_{\mathrm{spin}} \times_{\rho^\pm} S^\pm$$

を考える。これを X 上の positive (negative) spinor bundle といい、誤解を恐れず $S^{\pm}$ と書いてしまうことにする。tangent vector $v \in TX$ は Clifford multiplication によって

$$S^{\pm} \ni s \mapsto v \cdot s \in S^{\mp}$$

を定めることを注意しておく。

tangent bundle の Levi-Civita connection から induce される P 上の connection $\theta \in \Omega^1(P) \otimes \mathfrak{so}(n)$ を引き戻すことによって、P_{spin} 上に connection が定義される。従って hermitan vector bundle $S^{\pm}$ にも connection が induce される。これを ∇ と書く。

Definition 2.4. vector bundle $S^{\pm}$ の section を $S^{\mp}$ の section に移す一階の微分作用素 $D^{\pm}$ を

$$D^{\pm} s := \sum_{\mu=1}^{n} e_{\mu} \cdot \nabla_{e_{\mu}} s$$

で定義し *Dirac operator* と言う。但し、$\{e_1, \ldots, e_n\}$ は tangent bundle の local orthonormal frame である。上式が frame の取り方によらないことは容易に確かめられる。

X 上に hermitian vector bundle $E \to X$ と connection A が与えられたとき、∇ の代わりに A と ∇ から induce される $S^{\pm} \otimes E$ 上の connection を用いることによって twisted Dirac operator

$$D_A^{\pm} \colon \Gamma(S^{\pm} \otimes E) \to \Gamma(S^{\mp} \otimes E)$$

が define される。

Dirac operator に関してよく知られた性質を列挙しよう。

Proposition 2.5.

(1) $D_A^{\pm}$ は楕円型の線型偏微分作用素である。

(2) $D_A^{\pm}$ の adjoint は $D_A^{\mp}$ である。より詳しく

$$(D_A^{+} s_1, s_2) - (s_1, D_A^{-} s_2) = \operatorname{div} \alpha \qquad \text{for } \ s_1 \in \Gamma(S^{+} \otimes E)\,,\ s_2 \in \Gamma(S^{-} \otimes E)$$

が成り立つ。但し、α は $\alpha(v) = (v \cdot s_1, s_2)$ で定義される 1-form である。

(3) (X,g) は Kähler manifold とする。

(a) 「X が spin である。」$\Longleftrightarrow$ 「canonical bundle K_X の square root $K_X^{1/2}$ (i.e. line bundle で $K_X^{1/2} \otimes K_X^{1/2} = K_X$ となるもののこと) が存在する。」

(b) X が spin のとき、

$$S^+ \cong \bigoplus \bigwedge^{0,2k} \otimes K_X^{1/2}, \quad S^- \cong \bigoplus \bigwedge^{0,2k+1} \otimes K_X^{1/2}$$

であり、Dirac operator D_A^+ は

$$\sqrt{2}(\bar{\partial}_A + \bar{\partial}_A^*) \colon \bigoplus \bigwedge^{0,2k} \otimes E \otimes K_X^{1/2} \to \bigoplus \bigwedge^{0,2k+1} \otimes E \otimes K_X^{1/2}$$

に等しい。D_A^- も同様。

(4) (Weitzenböck formula)

$$D_A^{\mp} D_A^{\pm} = \nabla_A^* \nabla_A + \frac{\kappa}{4} + \mathcal{R}^E$$

但し、κ は (X,g) の scalar curvature で、$\nabla_A^* \nabla_A$ は rough Laplacian

$$\nabla_A^* \nabla_A = -\left(\sum_\mu \nabla_{e_\mu} \nabla_{e_\mu} - \nabla_{\nabla_{e_\mu} e_\mu} \right)$$

(covariant derivative ∇_A に添字を付けるときには単に ∇ と書いてしまう)、$\mathcal{R}^E$ は E の曲率から

$$\mathcal{R}^E(s \otimes \varphi) = \sum_{\mu,\nu} e_\mu \cdot e_\nu \cdot s \otimes R_A(e_\mu, e_\nu)\varphi$$

によって定められる operator である。

3. その他の基本的事実

(a) *Anti-self-dual connection*

(X,g) を 4 次元の oriented Riemannian manifold として，$(E,h)\to X$ をその上の hermitian vector bundle とする。

Definition 3.1. E 上の connection A が *anti-self-dual connection* であるとは，curvature R_A が anti-self-dual 2-form であるときを言う。すなわち Hodge の star operator を $*$ としたときに

$$*R_A = -R_A$$

が成り立つことを言う。

特に底空間 (X,g) が $(\mathbb{R}^4, g_{\mathrm{std}})$ のときは，Λ^2 の global な基底 $dx_\mu\wedge dx_\nu$ ($\mu<\nu$) が取れるから，A が anti-self-dual となるのは

$$R_{12}=-R_{34},\qquad R_{13}=R_{24},\qquad R_{14}=-R_{23}\qquad \text{where } R_A=\sum_{\mu<\nu}R_{\mu\nu}dx_\mu\wedge dx_\nu$$

を満たすときである。$\mathbb{R}^4$ の tangent space を対応

$$a\frac{\partial}{\partial x_1}+b\frac{\partial}{\partial x_2}+c\frac{\partial}{\partial x_3}+d\frac{\partial}{\partial x_4}\longleftrightarrow a+bi+cj+dk\qquad (a,b,c,d\in\mathbb{R})$$

によって quarternion $\mathbb{H}$ と同一視する。左から i,j,k を掛けることによって定められる $\mathbb{H}$ 上の $\mathbb{R}$-linear map を上の対応によって $\mathrm{End}(T\mathbb{R}^4)$ の section と思うことにする。区別するために I,J,K で表す。各 I,J,K は $\mathbb{R}^4$ 上の integrable な almost complex structure であって，metric g_{std} はどれでも Kähler metric になる。(よって $\mathbb{R}^4$ は hyper-Kähler manifold の例である。 cf. §***) 容易に確かめられるように

$$\begin{aligned} &A \text{ is anti-self-dual}\\ \Longleftrightarrow\quad & R_A(v,w)=R_A(Iv,Iw)=R_A(Jv,Jw)=R_A(Kv,Kw)\qquad \text{for all } v,w\in T\mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

が成り立つ。

4 次元の 2-form に関する顕著な性質として L^2-内積の conformal invariance がある。metric g と g' が *conformal* である (より正確には *pointwise conformal*) とは，ある正値 C^∞ 関数 f があって

$$g'(v,w)=fg(v,w)\qquad \text{for all } v,w\in TX$$

となるときを言う。α, β が 2-form であるときは，pointwise な内積の値は

$$g'(\alpha, \beta) = f^{-2} g(\alpha, \beta)$$

という関係にある。一方，volume element は

$$dV_{g'} = f^2 dV_g$$

を満たす。従って，

$$\int_X g'(\alpha, \beta) dV_{g'} = \int_X g(\alpha, \beta) dV_g$$

が成り立つ。Hodge の star operator が

$$g(\alpha, \beta) dV_g = \alpha \wedge *_g \beta$$

によって定義されていたことを思い出すと，

$$*_g \beta = *_{g'} \beta$$

が成り立つ。特に，connection A が metric g に関して anti-self-dual であることと，g' に関して anti-self-dual であることは同値である。

$\mathbb{R}^4$ は noncompact な manifold なので，end でのふるまいを規定しないと anti-self-dual connection も扱い難い。stereo graphic projection $\pi\colon S^4 \setminus \{\,北極\,\} \to \mathbb{R}^4$ を用いて S^4 の上で話を進めた方が便利なことも多い。このとき重要なのは，π^{-1} で S^4 の standard な metric を引き戻すと，$\mathbb{R}^4$ の standard な metric と conformal になることである。よって上の考察により

Proposition 3.2. S^4 上の hermitian vector bundle $E \to S^4$ とその上の anti-self-dual connection A を $S^4 \setminus \{\,北極\,\}$ に制限して π^{-1} で $\mathbb{R}^4$ に引き戻すと，$\mathbb{R}^4$ 上の anti-self-dual connection でその curvature が L^2 に属するものが得られる。

実はこの逆が成り立つことが知られている。それは Uhlenbeck の，いわゆる removable singularities theorem[Uhlenbeck] の応用であって，楕円型偏微分方程式の深い理論と幾何学的な考察から示される。(簡易化された証明は [**板東-加須栄-中島**] や [**伊藤-中島**] を見よ。)

Theorem 3.3. $\mathbb{R}^4$ 上の hermitian vector bundle E とその上の anti-self-dual connection A が

$$\int_{\mathbb{R}^4} |R_A|^2 dx < \infty$$

を満たすと仮定する。このとき stereo graphic projection $\pi\colon S^4 \setminus \{\text{北極}\} \to \mathbb{R}^4$ によって引き戻された bundle $\pi^* E$ と connection $\pi^* A$ は S^4 全体に smooth に拡張される。

(*b*) *Chern-Weil theory*

Chern-Weil theory を復習する。詳しくは [**小林-野水**] を見よ。

X を C^∞-manifold として，(E, h) をその上の rank が r の hermitian vector bundle とする。E の connection A が与えられていると仮定する。その curvature form $R_A \in \Omega^2(\mathrm{Endskew}(E))$ に対して，Chern form

$$c(E, A) = \det\left(1_E - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} R_A\right)$$

を考える。1_E は E の恒等写像である。まず even form の全体 Ω^{even} は外積に関して可換環と成るから，local frame for E を取って $1_E - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} R_A$ を Ω^{even} を成分に持つ行列と考えることによって，det を定義することができる。また $\mathrm{Endskew}(E)$ の変換性から，結果が local frame の取りかたによらず，Ω の元として well-defined であることはすぐに分る。

Proposition 3.4. Chern form $c(E, A)$ の cohomology class ($\in H^{\mathrm{even}}(X; \mathbb{R})$) は connection A の取り方によらず，total Chern class $c(E)$ に一致する。

同様にして Chern character $\mathrm{ch}(E)$ も

$$\mathrm{tr}\left(\exp - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} R_A\right)$$

で represent されることが示される。

$c(E, A)$ の $2k$-form の成分を $c_k(E, A)$ と書いて，k-th Chern form と言う。

例を与えよう。S^4 を quarternionic projective line $\mathbb{HP}^1$ と思うことにする。すなわち $\mathbb{H}^2 \setminus \{0\}$ を $\mathbb{H}^\times$ の作用 $(q_1, q_2) \mapsto (pq_1, pq_2)$ で割ったものである。homogeneous coordinate $[q_1 : q_2]$ ($q_i \in \mathbb{H}$) を取る。Hopf fibration

$$\begin{aligned} \pi\colon S^7 = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2 \mid |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1\} &\longrightarrow \mathbb{HP}^1 \\ (q_1, q_2) &\longmapsto [q_1 : q_2] \end{aligned}$$

は自然な $\mathrm{Sp}(1) = \mathrm{SU}(2)$-principal bundle の構造を持つ。$\mathrm{SU}(2)$ の自然な $\mathbb{C}^2$ への representation により associate した vector bundle を（$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の時に習って）*hyperplane bundle* と言うことにしよう。S^7 の自然な Riemannian metric によって $\mathrm{SU}(2)$ の orbit に直交する方向を選び，$\mathrm{Sp}(1)$-principal bundle $S^7 \to \mathbb{H}\mathrm{P}^1$ に connection を定める。このとき埋込

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{H} \ni x \mapsto [1 : x] \in \mathbb{H}\mathrm{P}^1$$

と，その image 上での $S^7 \to S^4$ の section

$$\mathbb{H} \ni x \mapsto \frac{(1, x)}{\sqrt{1 + |x|^2}}$$

によって connection および curvature を計算すると，hyperplane bundle が $c_1 = 0$，$c_2 = -1$ を満たすことがすぐに分る。(実は connection は self-dual である。)

我々の目的に大切なのは $c_1(E, h)$ と $c_2(E, h)$ なので，それを詳しく見よう。base manifold X は 4 次元であるとする。det のよく知られた展開式

$$\det(\lambda 1 - A) = \lambda^r - \mathrm{tr} A \lambda^{r-1} + \frac{1}{2}\left((\mathrm{tr} A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)\right) + \cdots$$

を用いると，

$$c_1(E, A) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \mathrm{tr} R_A$$
$$c_2(E, A) = -\frac{1}{8\pi^2}\left((\mathrm{tr} R_A)^2 - \mathrm{tr}(R_A^2)\right)$$

が得られる。local coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) を取って

$$R_A = \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu \qquad\qquad R_{\mu\nu} = -R_{\nu\mu}$$

と書き表すと，

$$c_2(E, A) - \frac{1}{2} c_1(E, A)^2 = \frac{1}{8\pi^2} \sum_\sigma \mathrm{sgn}\sigma\ \mathrm{tr}(R_{\sigma(1)\sigma(2)} R_{\sigma(3)\sigma(4)}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

となる。

さて，X に Riemannian metric g が与えられているとしよう。curvature R_A の self-dual part R_A^+ と anti-self-dual part R_A^- は，上の coordinate $x_1, x_2, x_3, x_4)$ が normal coodinate であるとして，その原点において

$$\begin{aligned} R_A^+ = {} & (R_{12} + R_{34})(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) + (R_{13} + R_{42})(dx_1 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_2) \\ & + (R_{14} + R_{23})(dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3) \\ R_A^- = {} & (R_{12} - R_{34})(dx_1 \wedge dx_2 - dx_3 \wedge dx_4) + (R_{13} - R_{42})(dx_1 \wedge dx_3 - dx_4 \wedge dx_2) \\ & + (R_{14} - R_{23})(dx_1 \wedge dx_4 - dx_2 \wedge dx_3) \end{aligned}$$

で与えられる。よって，Endskew(E) に $(A,B)=-\mathrm{tr}(AB)$ によって内積を入れておくと

$$|R_A^+|^2-|R_A^-|^2=-4\left(\mathrm{tr}(R_{12}R_{34})+\mathrm{tr}(R_{13}R_{42})+\mathrm{tr}(R_{14}R_{23})\right)$$

となって，

$$(|R_A^+|^2-|R_A^-|^2)\,dV=-8\pi^2(c_2(E,A)-\frac{1}{2}c_1(E,A)^2)$$

を得る。特に X が compact であるとき

$$\int_X(|R_A^+|^2-|R_A^-|^2)\,dV$$

が topological invariant で connection の取り方によらないことが分る。A が anti-self-dual ならば $R_A^+=0$ だから次の命題を得る。

Proposition 3.5. anti-self-dual connection A は Yang-Mills functional

$$A\longmapsto\int_X|R_A|^2\,dV$$

の最小値を与える。

(c) *Holomorphic vector bundles*

次に holomorphic vector bundle について必要なことを復習する。X は complex manifold であるとして，complex vector bundle $\pi\colon E\to X$ が *holomorphic vector bundle* であるとは，X のある open cover $\{U_\alpha\}$ と各 U_α 上の local trivialization $\Psi_\alpha\colon E|U_\alpha\to U_\alpha\times\mathbb{C}^r$ で，$U\alpha\cap U_\beta$ 上で変換関数が holomorphic になっているものが取れるときを言う。すなわち

$$\Psi_\alpha\circ\Psi_\beta^{-1}\colon(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{C}^r\to(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{C}^r$$

を

$$\Psi_\alpha\circ\Psi_\beta^{-1}(x,v)=(x,f_{\alpha\beta}(x)v)\qquad f_{\alpha\beta}\colon U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(r;\mathbb{C})$$

と表したとき，$f_{\alpha\beta}$ が holomorphic function となるわけである。このとき E の section ξ に対して，各 U_α 上で $\xi_\alpha=\pi_{\mathbb{C}^r}\circ\Psi_\alpha\circ\xi\colon U_\alpha\to\mathbb{C}^r$ の外微分 $d\xi_\alpha$ を考えて，その $(0,1)$-component を $\bar\partial\xi_\alpha$ とする。$U\alpha\cap U_\beta$ 上では

$$\xi_\alpha=f_{\alpha\beta}\xi_\beta$$

となっているから，$f_{\alpha\beta}$ が holomorphic であったことに注意すると

$$\bar{\partial}\xi_\alpha = f_{\alpha\beta}\bar{\partial}\xi_\beta$$

が成り立つ。よって $\{\bar{\partial}\xi_\alpha\}_\alpha$ は $\Omega^{0,1}(E)$ の元を定める。これを $\bar{\partial}\xi$ と書く。これは (p,q)-form に対しても容易に拡張されて

$$\bar{\partial}\colon \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$$

を定めて，$\bar{\partial}\circ\bar{\partial} = 0$ が成り立つ。

一方，今度は hermitian vector bundle $(E,h) \to X$ が与えられたとしよう。connection A から§2 のように exterior differential operator $d_A\colon \Omega^p(E) \to \Omega^{p+1}(E)$ を作る。これを $\Omega^{p,q}(E)$ に制限すると

$$d_A\colon \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p+1,q}(E) \oplus \Omega^{p,q+1}(E)$$

と成っていることに注意して，$\Omega^{p+1,q}(E)$-成分を ∂_A，$\Omega^{p,q+1}(E)$-成分を $\bar{\partial}_A$ と書くことにする。curvature $R_A = d_A \circ d_A$ は

$$R_A = \partial_A \circ \partial_A + (\partial_A \circ \bar{\partial}_A + \bar{\partial}_A \circ \partial_A) + \bar{\partial}_A \circ \bar{\partial}_A$$

と分解する。これは $\Omega^2(E) = \Omega^{2,0}(E) \oplus \Omega^{1,1}(E) \oplus \Omega^{0,2}(E)$ という分解に対応する。一般的には $\bar{\partial}_A \circ \bar{\partial}_A = 0$ となるとは限らないのだが，次の命題が成り立つ。

Proposition 3.6. holomorphic vector bundle $E \to X$ に hermitian metric h が与えられているとする。このとき connection A で

$$\bar{\partial} = \bar{\partial}_A$$

となるものが唯一つ存在する。ここで左辺の $\bar{\partial}$ は holomorphic vector bundle としての $\bar{\partial}$-operator であり，右辺の $\bar{\partial}_A$ は connection A から上のように作った $\bar{\partial}$-operator である。

この命題で与えられるような connection を (metric h に関する) *hermitian connection* という。A が hermitian connection であるとき，その curvature R_A の分解で $\Omega^{0,2}(E)$ の成分がないことは $\bar{\partial}_A \circ \bar{\partial}_A = 0$ から従うが，さらに A が metric を保つことを用いると $\partial_A \circ \partial_A = 0$ が分る。よって R_A は $(1,1)$-form である。実は次が成り立つ。

Proposition 3.7. hermitian vector bundle (E, h) の connection A の curvature R_A が $(1,1)$-form であるとき，すなわち X の複素構造に対応する almost complex strucuture I について

$$R_A(Iv, Iw) = R_A(v, w) \qquad \text{for all } v, w \in TX$$

が成り立つとき，E は A と compatible な holomorphic vector bundle の構造を持つ。すなわち E に holomorphic vector bundle の構造を入れて，A が metric h に関する hermitian connection に成るようにできる。

一言注意しておこう。holomorphic vector bundle E に対しては local trivialization を変換関数が holomorphic になるように取れて，hermitian vector bundle に対しては変換関数が unitary matrix に値を持つように (言い替えれば local trivialization $E|U \to U \times \mathbb{C}^r$ が各 fiber ごとの hermitian isometry を induce するように) 取ることができた。従って hermitan metric を持つ holomorphic vector bundle については，そのどちらの local trivialization も取ることができ，場合に応じて使い分けることが多いのだが，同時に holomorphic であり，かつ isometry を induce するような local trivialization は一般には取ることができない。実際そのような local trivialization が取れると connection は自動的に flat (すなわち $R_A = 0$) となってしまう。混同しないように。

(X, g) が Kähler manifold でその複素次元が 2 であったとする。ω を Kähler form とする。このとき簡単な計算から分るように

$$\Lambda^+ \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2} \oplus \langle \mathbb{C}\omega \rangle$$
$$\Lambda^- \otimes \mathbb{C} = \langle \mathbb{C}\omega \rangle^\perp \subset \Omega^{1,1}(E)$$

が成り立つ。但し $\langle \mathbb{C}\omega \rangle$ は $\Lambda^{1,1}$ のうち，Kähler form の scalar 倍になっているような form のなす subbundle で，$\langle \mathbb{C}\omega \rangle^\perp$ はその $\Lambda^{1,1}$ での直交補空間である。これから次を得る。

Proposition 3.8. A が hermitian vector bundle (E, h) の anti-self-dual connection であったとすると，E には A と compatible な holomorphic vector bundle としての構造が入る。

この節の始めに注意したことを用いれば，次の有用な命題を得る。

Proposition 3.9. $\mathbb{R}^4$ 上の hermitian vector bundle (E,h) の connection A が anti-self-dual connection である必要十分条件は，integrable な almost complex structure I,J,K のいずれを $\mathbb{R}^4$ に入れて Kähler manifold と思っても，E に A と compatible な holomorphic vector bundle の構造が入れられることである。

4. ADHM construction

この節からいよいよ本論に入る。

T を 1 次元の quarternion vector space とし、Λ^+T^* を dual space T^* の second (real) exterior power の self-dual part とする。

次の data が与えられたとしよう。

a pair of hermitian vector spaces, V and W ;

an element $\mathcal{A} \in \big(T^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Endskew}(V)\big)$;

and a homomorphism $\Psi\colon V \to S^+ \otimes W$.

(Endskew(V) は V の skew-adjoint endomorphism の全体のことである。) 同型 $T^* \cong \mathrm{Hom}_J(S^+, S^-)$ を通じて $\mathcal{A}$ は $\mathrm{Hom}(S^+ \otimes V, S^- \otimes V)$ の元と思うことができる。また $S^+ \cong (S^+)^*$ によって，Ψ は $\mathrm{Hom}(S^+ \otimes V, W)$ の元と見なすことにする。そこで，$T = \mathbb{R}^4$ 上の (trivial) vector bundle の間の homomorphism

$$\mathcal{D}\colon S^+ \otimes V \to S^- \otimes V \;\oplus\; W$$

を

$$\mathcal{D} = (\mathcal{A} - x \otimes \sqrt{-1}1_V) \oplus \Psi \qquad \text{for } \; x \in \mathbb{R}^4$$

によって定義する。x は $\mathrm{Hom}(S^+, S^-)$ の元と見なされている。S^+，V，W の hermitian product によって $\mathcal{D}$ の adjoint

$$\mathcal{D}^*\colon S^- \otimes V \;\oplus\; W \to S^+ \otimes V$$

を考える。anti-self-dual connection の住む bundle は Ker $\mathcal{D}^*$ によって定義されることになる。vector bundle として well-defined であるためには $\mathcal{D}$ が $\mathbb{R}^4$ 上、到るところ injective であることが要請される。(non-degeneracy condition)

$E :=$ Ker $\mathcal{D}^*$ は $S^- \otimes V \oplus W$ の subbundle になるから、Proposition 1.4 によって induced connection を持つ。次に要請されるのは、この connection が anti-self-dual であるための条件であるが、それを述べるために言葉を用意する。

$[\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}] \in \Lambda^2 T^* \otimes \operatorname{Endskew}(V)$ を、

$$[\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}] = \sum_{i,j} [\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] \otimes e_i \wedge e_j \quad \text{where } \mathcal{A} = \sum_i \mathcal{A}_i \otimes e_i$$

で定める。(T と T^* を同一視して、T の basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ をそのまま T^* の basis と思った。) さらにその $\Lambda^+ T^*$-component を $[\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}]^+$ で表す。Ψ の adjoint

$$\Psi^* \in \operatorname{Hom}(W, V \otimes S^+)$$

を Ψ と合成して

$$\Psi^*\Psi \in \operatorname{End}(S^+ \otimes V)$$

を考え、その $\mathfrak{su}(S^+) \otimes \operatorname{Endskew}(V)$ への射影を $\{\Psi^*, \Psi\}$ で表すことにする。S^+ の basis を用いて Ψ を

$$\Psi = (\Psi_2, -\Psi_1^*) \colon S^+ \otimes V \to W \qquad \Psi_1 \in \operatorname{Hom}(W, V),\ \Psi_2 \in \operatorname{Hom}(V, W)$$

と書くと (後の都合上このような表し方をする。) 具体的には

$$\{\Psi^*, \Psi\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\Psi_2^*\Psi_2 - \Psi_1\Psi_1^*) & -\Psi_2^*\Psi_1^* \\ -\Psi_1\Psi_2 & \frac{1}{2}(\Psi_1\Psi_1^* - \Psi_2^*\Psi_2) \end{pmatrix}$$

で与えられる。さらに同型 $\mathfrak{su}(S^+) \cong \Lambda^+ T^*$ によって、

$$\Lambda^+ T^* \otimes \operatorname{Endskew}(V)$$

の元と思うことにする。

Theorem 4.1. $\mathcal{A}$ と Ψ が次の二つの条件を満たすと仮定する。

(1) (Non-degeneracy) $\mathcal{D}$ is everywhere injective;

(2) (The ADHM equation) $[\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}]^+ + \{\Psi^*, \Psi\} = 0$.

すると the induced connection A on the bundle $E = \operatorname{Ker} \mathcal{D}^*$ は anti-self-dual connection (すなわち curvature 2-form が anti-self-dual) で、finite action (curvature が $\mathbb{R}^4$ 上 L^2 に属すること) である。また bundle E の topological な data は

$$\operatorname{rank} E = \dim W$$

$$c_1(E) = 0, \qquad c_2(E)[S^4] = \dim V$$

で与えられる。

Proof. §2のようにbasisをとって $\mathbb{R}^4$ の orthonormal basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を $\mathrm{Hom}_J(S^+, S^-)$ の元と思って行列表示すると、それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。以後、T^* の元は全て $\mathrm{Hom}_J(S^+, S^-)$ の元と思うことにする。$\mathcal{A} = \sum_i \mathcal{A}_i e_i$ を行列表示すると

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 + \sqrt{-1}\mathcal{A}_2 & -\mathcal{A}_3 + \sqrt{-1}\mathcal{A}_4 \\ \mathcal{A}_3 + \sqrt{-1}\mathcal{A}_4 & \mathcal{A}_1 - \sqrt{-1}\mathcal{A}_2 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2^* \\ \mathcal{B}_2 & -\mathcal{B}_1^* \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}_k \in \mathrm{End}(V)$$

と書ける。$[\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}]^+$ は

$$\begin{aligned} &([\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2] + [\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4])(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) + ([\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3] + [\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_2])(e_1 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_2) \\ &\qquad + ([\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4] + [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3])(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}([\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1^*] + [\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2^*]) & [\mathcal{B}_1^*, \mathcal{B}_2^*] \\ -[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2] & \frac{1}{2}([\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1^*] + [\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2^*]) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で与えられる。$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$ は

$$x = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z}_2 \\ z_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \qquad z_1 = x_1 + \sqrt{-1}x_2,\ z_2 = x_3 + \sqrt{-1}x_4$$

と表示される。これらの式を合わせて、

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}^*\mathcal{D} \\ &= (\mathcal{A}^* + ix \otimes 1_V)(\mathcal{A} - ix \otimes 1_V) + \Psi^*\Psi \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1^* + i\overline{z}_1 & \mathcal{B}_2^* + i\overline{z}_2 \\ \mathcal{B}_2 - iz_2 & -\mathcal{B}_1 + iz_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 - iz_1 & \mathcal{B}_2^* + i\overline{z}_2 \\ \mathcal{B}_2 - iz_2 & -\mathcal{B}_1^* - i\overline{z}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_2^* \\ -\Psi_1 \end{pmatrix} (\Psi_2, -\Psi_1^*) \\ &= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \mathcal{B}_k^*\mathcal{B}_k + i\overline{z}_k\mathcal{B}_k - iz_k\mathcal{B}_k^* + |z_k|^2 & [\mathcal{B}_1^*, \mathcal{B}_2^*] \\ -[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2] & \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \mathcal{B}_k\mathcal{B}_k^* + i\overline{z}_k\mathcal{B}_k - iz_k\mathcal{B}_k^* + |z_k|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_2^*\Psi_2 & -\Psi_2^*\Psi_1^* \\ -\Psi_1\Psi_2 & \Psi_1\Psi_1^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が導かれる。(spaceを節約するために i を $\sqrt{-1}$ の代わりに用いた。) 従って ADHM equation より、$\mathcal{D}^*\mathcal{D}$ は $1_{S^+} \otimes \Delta$ という形に表される。但し、$\Delta \in \mathrm{End}(V)$ は

$$\Delta = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2}(\mathcal{B}_k\mathcal{B}_k^* + \mathcal{B}_k^*\mathcal{B}_k) + i\overline{z}_k\mathcal{B}_k - iz_k\mathcal{B}_k^* + |z_k|^2 + \frac{1}{2}(\Psi_1\Psi_1^* + \Psi_2^*\Psi_2)$$

である。特に $\mathcal{D}^*\mathcal{D}$ は $J_{S^+} \otimes 1_V$ と可換である。(後にこの式が Weitzenböck formula の類似であることを見る。)

p を subbundle $E = \mathrm{Ker}\,\mathcal{D}^*$ への $S^- \otimes V \ \oplus\ W$ 内での直交射影とする。non-degeneracy condition から $\mathcal{D}^*\mathcal{D}$ は可逆だから、逆行列を F で表す。p と second fundamental form Π は

$$p = 1 - \mathcal{D}\ F\ \mathcal{D}^*$$

$$\Pi = -\mathcal{D}\ F\ (d\mathcal{D}^*) = \mathcal{D}\ F\ (dx \otimes 1_V)^* \pi_S$$

で与えられる。但し π_S は $S^- \otimes V$ への $S^- \otimes V \ \oplus\ W$ 内での直交射影である。Proposition 1.4 の Gauss equation により induced connection A の curvature は

$$R_A(v,w) = \pi_S^*\ (dx(v) \otimes 1_V)\ F\ (dx(w) \otimes 1_V)^* \pi_S - \pi_S^*\ (dx(w) \otimes 1_V)\ F\ (dx(v) \otimes 1_V)^* \pi_S$$

となる。x の微分 dx は

$$dx(Iv) = \sqrt{-1} dx(v), \quad dx(Jv) = dx(v) J_{S^+}, \quad dx(Kv) = \sqrt{-1} dx(v) J_{S^+}$$

を満たすことから、

$$R_A(v,w) = R_A(Iv,Iw) = R_A(Jv,Jw) = R_A(Kv,Kw)$$

が従う。前の section で注意したように、これは R_A が anti-self-dual であることを意味する。

次に $R_A \in L^2$ を確かめる。まず一つの方法は、Gauss equation で直接に second fundamental form の評価を行う方法である。ここではこれは省略する。第二の方法は action の conformal invariance を用いる方法で、具体的には vector bundle E と connection A とが S^4 上に拡張されることを確かめる。

S^4 を quarternionic projective line $\mathbb{HP}^1$ と思うことにする。homogeneous coordinate
$[q_1 : q_2]$ ($q_i \in \mathbb{H}$) を取る。そこで

$$\mathcal{D}_q := (q_1 \mathcal{A} - q_2 \otimes \sqrt{-1} 1_V) \oplus q_1 \Psi$$

とおく。$q_1\Psi$ では S^+ を $\mathbb{H}$ と見なした。$\mathbb{HP}^1$ 上の hyperplane bundle L を用いるならば $\mathcal{D}$ は

$$\mathcal{D}\colon L^* \otimes_{\mathbb{C}} V \to (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{C}} V) \oplus \underline{W}$$

という bundle map と見なされる。$q_1 = 1$ と取ることによって $\mathbb{R}^4$ が再現されるが、このとき $\mathcal{D}_q$ は

$$(\mathcal{A} - q_2 \otimes \sqrt{-1} 1_V) \oplus \Psi$$

となる。よって、上の $\mathbb{R}^4$ の場合の construction と一致する。また、$[q_1 : q_2] = [0 : 1]$ とおくと、

$$\mathrm{Ker}\ D_q \cong W$$

であり、その点の回りで Ker D_q は smooth vector bundle を定めている。よって Ker $\mathcal{D}_q$ は $\mathbb{H}\mathrm{P}^1$ 上の smooth vector bundle を定める。最後に上の同型が

$$E_\infty \cong W \qquad E_\infty \text{ は } E \text{ の } \infty = \text{北極} \in S^4 \text{ 上の fiber}$$

であることに注意しよう。とくに

$$\mathrm{rank}\ E = \dim W$$

が成り立つ。また

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{ch}(\mathbb{H} \otimes V) + \mathrm{ch}(W) - \mathrm{ch}(L^* \otimes V)$$

より，L が $c_2(L)[S^4] = -1$ であったことを思い出すと

$$c_2(E)[S^4] = \dim V$$

が従う。—— 証明終

Remark. 証明の途中で出てきたように、$\mathbb{R}^4$ の basis を fix すると (特に complex structure を fix すると) 与えられる data は

a pair of hermitian vector spaces, V and W;

endomorphisms $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathrm{End}(V)$;

and homomorphisms $\Psi_1 \colon W \to V$, $\Psi_2 \colon V \to W$

となり、ADHM equation は

(1) $$[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2] + \Psi_1\Psi_2 = 0$$

(2) $$[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1^*] + [\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2^*] + \Psi_1\Psi_1^* - \Psi_2^*\Psi_2 = 0$$

と書き表せる。この表示は[Donaldson] のものと一致する。

6. Inverse transform

次に逆の向きの construction を行う。すなわち、anti-self-dual connection A から V, W, $\mathcal{A}$, Ψ を構成する。実際に§4 の construction の逆に成っていることは後の節で示される。まず始めに analytic な preliminary を用意する。

(a) *Analytic preliminary*

$\mathbb{R}^4$ 上定義された hermitian vector bundle (E,h) の上の finte action anti-self-dual connection A を考える。Uhlenbeck の removable singularities theorem により、stereo graphic projection を通じて $S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ にまで拡張される。よって特に無限遠点 ∞ 上の fiber E_∞ は意味がある。無限遠点 ∞ の回りで local trivialization を取り、それを $\mathbb{R}^4$ に戻すと、$\mathbb{R}^4 \setminus B_R$ 上での local trivialization で connection form ω が

$$|\overbrace{\nabla \cdots \nabla}^{j\ \text{回}} \omega| = O(|x|^{-3-j})$$

を満たすようになる。以後、無限遠での挙動を調べるときには、この local trivialization のもとで E を $(\mathbb{R}^4 \setminus B_r) \times \mathbb{C}^r$ と思うことにする。

$\sigma = (1+|x|^2)^{1/2}$ とおき、non-negative integer k と weight $\delta \in \mathbb{R}$ に対して、weighted Sobolev space $W^{k,2}_\delta(E)$ を次の norm が finite な $\mathbb{R}^4$ 上の E の section の成す Banach space とする。

$$\|\sigma^{-\delta-2} f\|_{L^2} + \cdots + \|\sigma^{-\delta+k-2} \overbrace{\nabla_A \cdots \nabla_A}^{k\ \text{回}} f\|_{L^2}$$

$\Gamma(E)$ に対応する distribution の空間の部分空間で、$W^{k,2}_\delta(E)$ 上の bounded linear functional に延びるものの全体を $W^{-k,2}_{-4-\delta}(E)$ と書き、dual norm を導入しておく。$W^{0,2}_{-4-\delta}(E)$ が

$$W^{k,2}_\delta(E) \ni \varphi \mapsto \int_X (\varphi, \psi)\, dV_g \qquad \text{for } \psi \in W^{0,2}_{-4-\delta}(E)$$

によって、$W^{-k,2}_{-4-\delta}(E)$ に dense に入っていることに注意しよう。

まず rough Laplacian について調べる。

$$\nabla_A^* \nabla_A \colon W^{k,2}_\delta(E) \to W^{k-2,2}_{\delta-2}(E)$$

二階の線型楕円型微分作用素である。通常の $W^{k,2}$-評価から weighted Sobolev norm に関する *a priori* 評価

$$\|\varphi\|_{W^{k,2}_\delta(E)} \le C(\|\nabla_A^*\nabla_A\varphi\|_{W^{k-2,2}_{\delta-2}(E)} + \|\varphi\|_{W^{0,2}_\delta(E)})$$

が従うことは明らかである。$\nabla_A^*\nabla_A$ の adjoint は

$$\nabla_A^*\nabla_A\colon W^{2-k,2}_{-2-\delta}(E) \to W^{-k,2}_{-\delta-4}(E)$$

であり、self-adjoint であることに注意しよう。特に $\nabla_A^*\nabla_A$ の cokernel は

$$\mathrm{Ker}\ \nabla_A^*\nabla_A\colon W^{k,2}_{-2-\delta}(E) \to W^{k-2,2}_{-4-\delta}(E)$$

と同型である。(regularity から $W^{2-k,2}_{-2-\delta}(E)$ での kernel も自動的に $W^{k,2}_{-2-\delta}(E)$ に入る。)

$e \in \Gamma(E)$ が *covariant constant section at infinity* であるとは、$\mathbb{R}^4$ の compact set の外で上のような local trivialization at infinity を取ったときに、product connection A_0 に関して parallel (i.e., $\nabla_{A_0}e = 0$) であるときを言う。

Lemma 6.1.

(1) 微分作用素 $\nabla_A^*\nabla_A$ の kernel は $\delta < 0$ のとき trivial。特に $-2 < \delta < 0$ のとき $\nabla_A^*\nabla_A$ は isomorphism。

(2) 任意の covariant constant section e at infinity of E に対して、唯一つ 有界な E の harmonic section φ_e で e に収束するものが存在する。より詳しく

$$(a) \qquad \nabla_A^*\nabla_A\varphi_e = 0$$

$$(b) \qquad \varphi_e = e + O(r^{-2}), \quad \nabla_A\varphi_e = O(r^{-3})$$

逆に有界な E の harmonic section は すべて上のやり方で得られる。

Remark. Lemma 5.1 (1) より $\nabla_A^*\nabla_A$ の逆 G_A を得る:

$$G_A\colon W^{k-2,2}_{\delta-2}(E) \to W^{k,2}_\delta(E)$$

for $-2 < \delta < 0$.

Proof. weight $\delta < 0$ を取り、φ を $W^{k,2}_\delta(E)$ に属する $\nabla_A^*\nabla_A\varphi = 0$ の solution とする。すると

$$\Delta|\varphi|^2 = |\nabla_A\varphi|^2 \ge 0.$$

φ は無限遠で 0 に収束するから、maximal principle より $\varphi \equiv 0$。(1) が示された。

e を covariant constant section at infinity とする。A の無限遠での評価式より、e は

$$\nabla_A^* \nabla_A e \in W^{k-2,2}_{-3+\varepsilon}(E)$$

を any small $\varepsilon > 0$ について満たす。(1) より $\varphi_0 \in W^{k,2}_{-1+\varepsilon}(E)$ で

$$\nabla_A^* \nabla_A \varphi_0 = \nabla_A^* \nabla_A e$$

となるものが、唯一つ存在する。そこで $\varphi_e = e - \varphi_0$ とおくと、φ_e は $\nabla_A^* \nabla_A \varphi_e = 0$ と $\varphi_e \to e$ as $x \to \infty$ を満たす。harmonic function の expansion より、φ_e は

$$\varphi_e = e + ar^{-2} + \cdots \qquad \text{for some constant } a$$

と展開される。よって (2) の評価式が示された。

逆に有界な E の harmonic section φ が与えられたとしよう。再び harmonic function の expansion により

$$\varphi = e + ar^{-2} + \cdots \qquad \text{for some constant } a$$

がある covariant constant section e at infinity について成り立つ。これで (2) が示された。—— 証明終

次に Dirac operator について調べよう。$S^\pm$ を $\mathbb{R}^4$ の positive (negative) spinor bundle とする。E の connection A と合わせて、twisted Dirac operator $D_A^\pm$ を作る。weighted Sobolev space では

$$D_A^\pm : W^{k,2}_\delta(S^\pm \otimes E) \to W^{k-1,2}_{\delta-1}(S^\mp \otimes E)$$

となる。adjoint operator は

$$D_A^\mp : W^{1-k,2}_{-3-\delta}(S^\mp \otimes E) \to W^{-k,2}_{-4-\delta}(S^\pm \otimes E)$$

である。

$\mathbb{R}^4$ の tangent bundle $T\mathbb{R}^4$ の canonical な section として

$$x \mapsto (x, x) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 = T\mathbb{R}^4$$

を取る。誤解を恐れず、これも記号 x で表すことにする。spinor bundle の section s に対して、x を Clifford multiplication することによって

$$x \cdot s$$

という spinor bundle の新しい section が得られる。

Lemma 6.2. $\psi \in W_\delta^{k,2}(S^- \otimes E) \quad (\delta < 0)$ が $D_A^- \psi = 0$ の解であるとする。このとき ψ は次の asymptotic behaviour を持つ:

$$\psi = r^{-4} x \cdot \psi_\infty + O(r^{-4}),$$

但し ψ_∞ は covariant constant section of $S^+ \otimes E$ at infinity である。

Proof. $\mathbb{R}^4$ では Weitzenböck formula により、Dirac operator の自乗 $D^+ D^-$ は、Laplacian Δ に等しい。よって Dirac equation の解 s は harmonic である。harmonic polynomial のうち無限遠で decay しているもので、Dirac equation の解と成っているものを調べてみると、r^{-2} は駄目で、その次の

$$x \cdot r^{-4}$$

がＯＫであることは、すぐに分る。これから twisted Dirac operator の kernel に対する expansion も容易に従う。—— 証明終

positive spinor に対しては上とは異なり、次が成立する。

Lemma 6.3. Dirac equation $D_A^+ \psi = 0$ for $\psi \in W_\delta^{k,2}(S^+ \otimes E) \quad (\delta < 0)$ は 0 以外の解を持たない。

Proof. A は anti-self-dual だから Weitzenböck formula より

$$D_A^- D_A^+ = 1_{S^+} \otimes \nabla_A^* \nabla_A$$

よって Lemma 6.1 より結論が従う。—— 証明終

証明の途中に見たように $D_A^- D_A^+ = 1_{S^+} \otimes \nabla_A^* \nabla_A$ だから，$D_A^- D_A^+$ の逆は $1_{S^+} \otimes G_A$ で与えられる。

(b) The construction

いよいよ逆の構成に入る。

$$V := L^2\text{-kernel of } D_A^-\colon \Gamma(S^-\otimes E)\to\Gamma(S^+\otimes E)$$

$$W := \text{bounded kernel of } \nabla_A^*\nabla_A\colon \Gamma(E)\to\Gamma(E)$$

とおく。Part (a) の結果により，weighted Sobolev space を用いれば

$$V = \mathrm{Ker} D_A^-\colon W^{k,2}_{-2}(S^-\otimes E)\to W^{k-1,2}_{-3}(S^+\otimes E)$$

$$W = \mathrm{Ker}\nabla_A^*\nabla_A\colon W^{k,2}_{0.1}(E)\to W^{k-2,2}_{-1.9}(E)$$

としても同じことである。§4 の construction に続けてこの construction を行なえば元に戻ることは後に示されるのだが，V と W の次元が元のものに等しいことを注意しよう。実際，$\dim W = \mathrm{rank}\, E$ は明らかで，V については $\dim V = c_2(E)[S^4]$ に index theorem を適用すれば Lemma 6.3 と合わせて正しいことが分る。V には L^2-内積から induce される hermitian inner product が入り，W は E_∞ と同一視して，fiber metric を 2vol S^3 倍して hermitian metric を入れる。そこで endomorphism $\mathcal{A}\colon V\to T\otimes\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A}\colon V\ni\psi\longmapsto\sqrt{-1}x\cdot\psi \text{ の } V \text{ への } L^2\text{-projection}$$

で定義しよう。ここで $\mathcal{A}$ がきちんと定義されることは，慎重に確かめる必要がある。実際，ψ は $O(r^{-4})$ の decay だから $\sqrt{-1}x\cdot\psi$ は $O(r^{-3})$ しかなく，L^2 に属するとは限らない。ところが V の orthonomal basis $\{\psi_1,\dots,\psi_k\}$ を取っておくと，

$$(\sqrt{-1}x\cdot\psi,\psi_i) := \int_{\mathbb{R}^4}(\sqrt{-1}x\cdot\psi,\psi_i)\,dV$$

は ψ_i が $O(r^{-4})$ の decay を持っているおかげで有限の値が確定する。そこで L^2-projection を

$$\sum_i(\sqrt{-1}x\cdot\psi,\psi_i)\psi_i$$

で定義できるわけである。x が “real”であることから，$\mathcal{A}$ は $T^*\otimes_{\mathbb{R}}\mathrm{Endskew}(V)$ に属する。次に $\Psi\colon V\to S^+\otimes W$ は，その adjoint を

$$\Psi^*\colon S^+\otimes W\ni s\otimes\varphi\longmapsto D_A^+(s\otimes\varphi)\in V$$

によって定義する。$D_A^+(s\otimes\varphi)$ が V に属することは，Weitzenböck formula $\nabla_A^*\nabla_A = D_A^-D_A^+$ と Part (a) で見た decay estimate から確かめられる。

以上で登場人物が揃ったから，あとは ADHM equation と non-degeneracy condition を check すればよい。non-degeneracy condition はあとの section で，上の construction が§4 のものの逆であることを示すときに，同時に示される。

まず，$\Psi\colon V\to S^+\otimes W$ を計算する。

Lemma 6.4. $\psi \in V$ に対して $\Psi(\psi)$ は次の asymptotic behaviour で定められる:

$$\psi = 2r^{-4}x \cdot \Psi(\psi) + O(r^{-4})$$

Proof. 任意の $\psi \in V$ が

$$\psi \sim r^{-4}x \cdot \psi_\infty$$

という asymptotic behaviour を持つことはすでに Lemma 6.2 で見たから，あとは $\psi_\infty = 2\Psi(\psi)$ を確かめればよい。$s \otimes \varphi \in S^+ \otimes W$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle \Psi(\psi), s \otimes \varphi \rangle = \langle \psi, \Psi^*(s \otimes \varphi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^4} (\psi, D_A^+(s \otimes \varphi))\, dV \\ = -\lim_{r\to\infty} \int_{\partial B_r} (\frac{\partial}{\partial r} \cdot \psi, s \otimes \varphi) d\sigma\end{aligned}$$

但し $\frac{\partial}{\partial r}$ は the outward unit normal vector of ∂B_r である。最後の等式で $D_A^- \psi = 0$ を用いた。上の asymptotic behaviour から，上式は

$$\frac{1}{2}\langle s_\infty, s \otimes \varphi \rangle$$

に等しい。これは $2\Psi(\psi) = \psi_\infty$ を意味する。—— 証明終

今までの議論は complex structures I，J，K のいずれにも平等に行われていた。ここから symmetry を break し，complex structure I を fix して $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ と思うことにする。S^+ の basis $\{1, \omega_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2} d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2\}$ を取って，同型写像 $S^+ \cong \mathbb{C}^2$ を得る。$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \colon V \to V$ を

$$\mathcal{B}_i(\psi) = \sqrt{-1} z_i \psi \text{ の } V \text{ への } L^2\text{-projection}$$

で定義し，$\Psi_1 \colon W \to V$，$\Psi_2 \colon V \to W$ を

$$\Psi = \Psi_1^* \oplus \Psi_2 \colon V \to S^+ \otimes W$$

によって定める。ADHM equation

$$[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2] + \Psi_1 \Psi_2 = 0 \tag{1}$$

$$[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1^*] + [\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2^*] + \Psi_1 \Psi_1^* - \Psi_2^* \Psi_2 = 0 \tag{2}$$

をすべて確かめる代わりに，complex equation (1) だけ確かめれば，J に対しても対応する式が成立することから (2) も従うので十分である。

rough Laplacian に対する Green operator G_A を用いると，L^2-projection π は

$$\pi = 1 - D_A^+ (1_{S^+} \otimes G_A) D_A^-$$

に等しい。(賢明なる読者はこの formula が§4 に現れた $p = 1 - \mathcal{D}\ F\ \mathcal{D}^*$ の類似であることに気付くであろう。) $\psi \in V$ とする。

$$\sqrt{-1} z_1 \psi - \mathcal{B}_1 \psi = (1-\pi)\sqrt{-1} z_1 \psi = D_A^+ (1_{S^+} \otimes G_A) D_A^- \sqrt{-1} z_1 \psi$$
$$\sqrt{-1} z_2 \psi - \mathcal{B}_2 \psi = (1-\pi)\sqrt{-1} z_2 \psi = D_A^+ (1_{S^+} \otimes G_A) D_A^- \sqrt{-1} z_2 \psi$$

が成り立つ。Proposition 2.6 により ($\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ の canonical bundle は trivial であることに注意して) spinor bundle を $S^+ \cong \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$，$S^- \cong \Lambda^{0,1}$ と同一視して，Dirac operator を $D_A = \sqrt{2}(\bar\partial_A + \bar\partial_A^*)$ と代える。$\sqrt{-1} z_i$ が holomorphic であることから

$$\sqrt{-1} z_1 \psi - \mathcal{B}_1 \psi = 2\bar\partial_A G_A \bar\partial_A^* \sqrt{-1} z_1 \psi$$
$$\sqrt{-1} z_2 \psi - \mathcal{B}_2 \psi = 2\bar\partial_A G_A \bar\partial_A^* \sqrt{-1} z_2 \psi$$

を得る。($1_{S^+} \otimes G_A$ を単に G_A と書いた。) 従って

$$\begin{aligned}\sqrt{-1} z_1 \mathcal{B}_2 \psi - \sqrt{-1} z_2 \mathcal{B}_1 \psi &= 2\bar\partial_A (z_1 G_A \bar\partial_A^* z_2 \psi - z_2 G_A \bar\partial_A^* z_1 \psi) \\ &= D_A^+ (z_1 G_A D_A^- z_2 \psi - z_2 G_A D_A^- z_1 \psi)\end{aligned}$$

一方定義から

$$\sqrt{-1} z_1 \mathcal{B}_2 \psi - \sqrt{-1} z_2 \mathcal{B}_1 \psi = [\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2]\psi + D_A^+ G_A D_A^- (\sqrt{-1} z_1 \mathcal{B}_2 \psi - \sqrt{-1} z_2 \mathcal{B}_1 \psi)$$

だから，これらの式を合わせて

$$[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2]\psi = D_A^+ (z_1 G_A D_A^- z_2 \psi - z_2 G_A D_A^- z_1 \psi) + D_A^+ G_A D_A^- (\sqrt{-1} z_2 \mathcal{B}_1 \psi - \sqrt{-1} z_1 \mathcal{B}_2 \psi)$$

が成り立つ。特に $[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2]\psi = D_A^+ f$ と，ある bounded section f によって書ける。左辺は Ker D_A^- に属しているから f は harmonic である。従って Lemma 6.1 より f は，その極限によって一意的に定まる。上式の第二項は 0 に収束するから，第一項について調べればよい。まず ψ の asymptotic behaviour

$$\psi \sim 2r^{-4} x \cdot \Psi(\psi) = \sqrt{2} r^{-4} \big\{ (z_1 \Psi_1^*(\psi) - \bar z_2 \Psi_2(\psi)) d\bar z_1 + (z_2 \Psi_1^*(\psi) + \bar z_1 \Psi_2(\psi)) d\bar z_2 \big\}$$

より

$$D_A^- z_1\psi \sim -4r^{-4}(z_1\Psi_1^*(\psi) - \overline{z}_2\Psi_2(\psi))$$

$$D_A^- z_2\psi \sim -4r^{-4}(z_2\Psi_1^*(\psi) + \overline{z}_1\Psi_2(\psi))$$

である。trivial connection に関する (positive) Laplacian が

$$\Delta(r^{-2}x_\mu) = 4r^{-4}x_\mu$$

を満たすことから

$$G_A D_A^- z_1\psi \sim -\, r^{-2}(z_1\Psi_1^*(\psi) - \overline{z}_2\Psi_2(\psi))$$

$$G_A D_A^- z_2\psi \sim -\, r^{-2}(z_2\Psi_1^*(\psi) + \overline{z}_1\Psi_2(\psi))$$

であり，結局

$$z_1 G_A D_A^- z_2\psi - z_2 G_A D_A^- z_1\psi \sim -\Psi_2(\psi)$$

となって，

$$[\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2]\psi = -\Psi_1\Psi_2(\psi)$$

を得る。

Theorem 6.5. 上で構成された $\mathcal{A}$, Ψ は ADHM equation を満たす。

98. Hyper-Kähler manifolds and moment maps

次に我々の結果を述べるために Kronheimer の ALE gravitational instanton の構成 [Kronheimer] を復習する。なお，これ以降の section では dual space に induce される transpose と hermitian adjoint を区別するために，hermitian adjoint は右肩に † を付けて表すと約束する。

(a) *Generality for hyper-Kähler manifolds and moment maps*

ここは，東北大学における微分幾何シンポジウムの牛腸 氏の manuscript (の一部) と完全に重複するので，それを引用させてもらう。

(*b*) *ALE gravitational instantons*

Γ を SU(2) の有限部分群とし，R を Γ の regular representation とする。すなわち $R = \{f\colon \Gamma \to \mathbb{C}\}$ で，Γ の作用は，right-translation

$$\gamma f(x) := f(x\gamma)$$

で定義される。inclusion $\Gamma \subset \mathrm{SU}(2)$ が導く 2 次元の representation を Q で表す。$U_\Gamma(R)$ を R の unitary automorphism で Γ の作用と可換なものの成す group として，$G = U_\Gamma(R)/U(1)$ とおく。$U(1)$ は scalar の成す group である。quarternion vector space Y を

$$Y := \big(Q \otimes \mathrm{End}(R)\big)^\Gamma$$

group G は自然に Y に act する。その作用に関する moment map は explicit に与えることができて，

$$\begin{cases} \mu_I(y) = \dfrac{\sqrt{-1}}{2}([y_1, y_1^\dagger] + [y_2, y_2^\dagger]) \\ (\mu_J + \sqrt{-1}\mu_K)(y) = [y_1, y_2] \end{cases}$$

となる。但しここで，Q の basis を取って $y \in Y$ を (y_1, y_2) と表した。G の center Z は $\mathrm{Endskew}_\Gamma(R)$ の trace free part と同一視される。そこで $\zeta = (-2\sqrt{-1}\zeta_\mathbb{R}, \zeta_\mathbb{C}) \in (\mathbb{R} \oplus \mathbb{C}) \otimes Z$ を fix して，hyper-Kähler quotient

$$X_\zeta := \left\{ (y_1, y_2) \in Y \;\middle|\; \begin{array}{l} [y_1, y_1^\dagger] + [y_2, y_2^\dagger] = \zeta_\mathbb{R} \\ [y_1, y_2] = \zeta_\mathbb{C} \end{array} \right\} \Big/ G$$

を考える。G で割る前の，ふたつの方程式をみたすような元の全体を Y_ζ で表す。すなわち $X_\zeta = Y_\zeta / G$。このとき Kronheimer の定理 (の一部) は次の様に成る。

Theorem 98.1. generic な ζ に対しては，G の Y_ζ への action は free で，quotient space X_ζ は $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の minimal resolution と diffeomorphic な 4 次元 hyper-Kähler manifold になる。

すべての ζ に対して X_ζ が smooth な manifold になるわけではなく，例えば $\zeta = 0$ のときには $X_\zeta = \mathbb{C}^2/\Gamma$ となる。

generic な ζ に対しては，Y_ζ は manifold X_ζ 上の principal G-bundle になる。Y_ζ は Y の submanifold であるから部分多様体としての Riemannian metric をもち，G-orbit の tangent space の直交補空間を取ることによって，自然な connection が定まる。このとき hyper-Kähler quotient の一般論 [**牛腸-中島**] を用いると

Theorem 98.2. principal G-bundle $Y_\zeta \to X_\zeta$ の自然な connection は anti-self-dual で，finite action である。

Y_ζ に associate した "canonical"な vector bundle が X_ζ の上にあることを示すために，Γ の regular representation R についてもう少し詳しく見よう。R は right-translation によって Γ-module であると見なしたが，もう一つ left-translation による action もある。これらは可換であって，R は $\Gamma \times \Gamma$-module となる。$R_0, \dots, R_n$ を Γ の irreducible unitary representation とする。但し R_0 は trivial representation であると約束する。すると $\Gamma \times \Gamma$-module として R は

$$R = \bigoplus_i (R_i^{\text{left}})^* \otimes R_i^{\text{right}}$$

と分解する。R_i^{right}, R_i^{left} はそれぞれ right, left-translation から induce される action である。すると

$$U_\Gamma(R) = \prod_i U\big((R_i^{\text{left}})^*\big)$$

となるが，$G = U_\Gamma(R)/U(1)$ は $U(R_0^{\text{left}})$-成分が trivial な元から成る subgroup と同一視される。特に R は G の representation space と見なすことができる。そこで principal G-bundle $Y_\zeta \to X_\zeta$ に associate した vector bundle を

$$\mathcal{R} = Y_\zeta \times_G R$$

で定める。

$$\mathcal{R}_{\bar{i}} = Y_\zeta \times_G (R_i^{\text{left}})^*$$

とおくと，

$$\mathcal{R} = \bigoplus_i \mathcal{R}_{\bar{i}} \otimes \underline{R}_i$$

と分解する。

hyper-Käher space X_ζ の定義から *tautological* vector bundle emdomorphism と呼ばれる

$$\xi \in \Gamma(Q \otimes \mathrm{End}(\mathcal{R}))$$

が定まる。実際，$Q \otimes \mathrm{End}(\mathcal{R})$ の section は，Y_ζ から $Q \otimes \mathrm{End}(R)$ への G-equivariant な map に他ならないが，ξ は

$$Y_\zeta \ni y \longmapsto y \in Q \otimes \mathrm{End}(R)$$

で与えられる。

Lemma 98.3. E を connection A によって (complex structure I に関する) holomorphic vector bundle と思ったときに，endmorphism ξ は holomorphic である。

99. Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons

いよいよ我々の main result の statement を述べる段階に来た。

finite subgroup $\Gamma \subset \mathrm{SU}(2)$ が与えられたとする。Q を 2 次元の complex vector space とする。自然に Q は Γ-module となる。さらに次の data が与えられたとしよう。

a pair of unitary Γ-modules, V and W;

a Γ-equivariant map $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \end{pmatrix} : V \to Q \otimes V$;

and a pair of Γ-equivariant homomorphisms $V \xrightarrow{\Psi_2} W \xrightarrow{\Psi_1} \Lambda^2 Q \otimes V$

なぜ V, W が Γ-module になるのかは，X_ζ が $\zeta = 0$ のときに $\mathbb{C}^2/\Gamma$ となって，その上の anti-self-dual connection は $\mathbb{C}^2$ 上の Γ-equivariant なものに他ならないことから見ても想像できるだろう。

前の節で述べた vector bundle $\mathcal{R}$ と tautological bundle map $\xi : \mathcal{R} \to Q \otimes \mathcal{R}$ を用いて，bundle map

$$\mathcal{D} : S^+ \otimes V \otimes \mathcal{R} \to (Q \otimes V \otimes \mathcal{R}) \oplus (W \otimes \mathcal{R})$$

(S^+ は positive spinor bundle of X_ζ であるが，X_ζ は hyperkähler であるから trivial rank 2 vector bundle である。) を

$$\mathcal{D} = \left(\begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \otimes 1_{\mathcal{R}} & \mathcal{B}_2^\dagger \otimes 1_{\mathcal{R}} \\ \mathcal{B}_2 \otimes 1_{\mathcal{R}} & -\mathcal{B}_1^\dagger \otimes 1_{\mathcal{R}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1_V \otimes \xi_1 & 1_V \otimes \xi_2^\dagger \\ 1_V \otimes \xi_2 & -1_V \otimes \xi_1^\dagger \end{pmatrix} \right) \oplus (\Psi_2 \otimes 1_{\mathcal{R}}, -\Psi_1^\dagger \otimes 1_{\mathcal{R}})$$

によって定める。$\mathbb{C}^2$ を trivial Γ-module と見ることにより $\mathcal{D}$ は Γ-equivariant map になるから，Γ-invariant に制限して，

$$\mathcal{D}^\Gamma : (\mathbb{C}^2 \otimes V \otimes \mathcal{R})^\Gamma \to (Q \otimes V \otimes \mathcal{R})^\Gamma \oplus (W \otimes \mathcal{R})^\Gamma$$

を考える。その adjoint を $\mathcal{D}^{\Gamma\dagger}$ とする。

$\mathbb{R}^4$ の時と同様に大切なのは $\mathcal{D}^{\Gamma\dagger}\mathcal{D}^\Gamma$ が “real”になるための ADHM equation であるが，今度は ξ が

$$\begin{cases} [\xi_1, \xi_2] = \zeta_{\mathbb{C}} \\ [\xi_1, \xi_1^\dagger] + [\xi_2, \xi_2^\dagger] = \zeta_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

を満たすことを考慮しなくてはならない。今度の場合の ADHM equation を書き下すために ζ_V という $\mathbb{R}^3 \otimes \mathrm{Center}(\mathrm{End}_\Gamma(V))$ の元を導入する:

V を Γ-module として

$$V = \bigoplus V_i \otimes R_i$$

と既約分解する。$\zeta \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathrm{Center}(\mathrm{End}_\Gamma(R))$ が，各 $R_i \otimes R_i^*$ 成分で $\zeta(i)$ という scalar matrix (i.e. an element of $\mathbb{R}^3$ times the identity) で与えられていることに注意して，ζ_V を

$$\zeta_V = \zeta(i) \qquad \text{on } V_i \otimes R_i$$

とこれも scalar matrix で定義する。

Theorem 99.1. $\mathcal{B}$ と Ψ が次の二つの条件を満たすと仮定する。

(1) (Non-degeneracy) $\mathcal{D}^\Gamma$ is everywhere injective;

(2) (The ADHM equation)

$$\begin{cases} [\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2] + \Psi_1\Psi_2 = -(\zeta_V)_{\mathbb{C}} \\ [\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1^\dagger] + [\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2^\dagger] + \Psi_1\Psi_1^\dagger - \Psi_2^\dagger\Psi_2 = -(\zeta_V)_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

すると the induced connection A on the bundle $E = \mathrm{Ker}\ \mathcal{D}^{\Gamma\dagger}$ は anti-self-dual connection (すなわち curvature 2-form が anti-self-dual) で，finite action (curvature が L^2 に属する) である。

証明は $\mathbb{R}^4$ の時と全く同様である。subbundle の curvature formula を用いるときに，実は大きい方の bundle が anti-self-dual であれば十分であることに注意せよ。$\mathbb{R}^4$ の時には trivial vector bundle だったが，今度は Theorem 98.2 により O K である。

次に inverse construction を述べる。$E \to X_\zeta$ を hermtian vector bundle として，A をその上の anti-self-dual connection で finite action なものとする。そこで

$$V = L^2 \text{ kernel of } D_A^-\colon \Gamma(S^- \otimes E \otimes \mathcal{R}^*) \to \Gamma(S^+ \otimes E \otimes \mathcal{R}^*)$$
$$W = \text{bounded harmonic sections of } E \otimes \mathcal{R}^*$$

で定義する。$\mathcal{R}^*$ 上の Γ-action は自然に V, W を Γ-module にする。$\mathbb{R}^4$ の時と同様に W は無限遠点上の fiber $(E \otimes \mathcal{R}^*)_\infty$ と同型である。V に L^2-inner product から induce される hermitian inner product を入れ，W には $(E \otimes \mathcal{R}^*)_\infty$ の hermitian inner product を $2\mathrm{vol}\ S^3/\Gamma$ 倍したものを入れる。

endomorphism $\mathcal{B}$ と Ψ を

$$\mathcal{B}_i \colon V \ni \psi \longmapsto L^2\text{-projection of } \xi_i^* \psi \qquad \text{for } i = 1, 2$$

$$\Psi^\dagger = (\Psi_1, \Psi_2^\dagger) \colon S^+ \otimes W \ni s \otimes \varphi \longmapsto D_A^+(s \otimes \varphi) \in V$$

で定める。

Theorem 99.2. 上で定義された $\mathcal{B}$ と Ψ は ADHM eqation を満たす。

$\mathbb{R}^4$ のときと同じように実は次が成り立つ。

Theorem 99.3. 上で定義された $\mathcal{B}$ と Ψ は ADHM eqation だけでなく，non-degenracy condition も満たし，Theorem 99.1 の construction と Theorem 99.2 の construction は互いに逆の対応を与える。

——————————————- 以上 ——————————————