インスタントンの数え上げ - NEKRASOV の予想, 戸田階層, BLOWUP 公式

中島 啓

この論文は, Nekrasov の予想 [10] に関する, 神戸大学の吉岡康太氏との共同研究 [9] に基づく.

ここでの主役は, Nekrasov による $\mathcal{N}=2$ **SUSY Yang-Mills 理論の deform された分配関数**である. これは物理的には, 接続の空間の上の経路積分で定義されるものであるが, ここでは数学的に厳密な取り扱い (これも Nekrasov による) を行う. まず, §1 で分配関数の幾何学的な定義を与え, 次に §2 でヤング図形による組み合わせ論的な定義を与える. 幾何学に興味のない読者はこ組み合わせ論的な定義を出発点にしてかまわない. そして §3 で分配関数の満たす微分方程式を紹介する. この微分方程式は分配関数を特徴づけるのでる. その幾何学的な由来により, この微分方程式を **blowup 方程式**とよぶ. しかし, blowup 方程式が意味するところの研究 (これはおそらく可積分系と深くかかわる) は, まだ始まったばかりである. また, 現在までのところ, blowup 方程式の組み合わせ論による証明は与えられていない. これはヤング図形に関する興味深い問題と思われる. (特にマクドナルド多項式との関連) 最後に §4 で, 分配関数のパラメータを特殊化したものを, Seiberg-Witten 曲線という Riemann 面の言葉で記述する. これがもともとの Nekrasov の予想である. Seiberg-Witten[13] は, $\mathcal{N}=2$ SUSY Yang-Mills 理論の prepotential と呼ばれる物理量を, Seiberg-Witten 曲線で記述した. その議論は, prepotential の物理的な要請から満たすべき性質によって prepotential を特徴づけるというものであった. §1 で与えられるような Yang-Mills 理論に関係した幾何学的な対象を用いて定義される分配関数が, そのような性質を持つかどうかは数学的には非自明なことである. 我々のアプローチは, Seiberg-Witten 曲線で記述された prepotential が満たす微分方程式を, §3 で導いた微分方程式の極限として導く, というものである.

1. 幾何学的な分配関数の定義

$M(r,n)$, $M_0(r,n)$ を図 1 の有限グラフに付随した箙多様体とする.

つまり, 次の条件を満たす四つぐみ (B_1,B_2,i,j) を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の作用で割った商空間が $M(r,n)$ である：$B_1,B_2\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, $i\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^n)$, $j\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^r)$

(1) $[B_1,B_2]+ij=0$,

Supported by the Grant-in-aid for Scientific Research (No.15540023), JSPS.

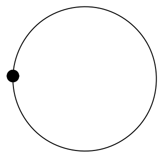


図 1

(2) there exists no proper subspace $S \subsetneq \mathbb{C}^n$ such that $B_\alpha(S) \subset S$ ($\alpha = 1, 2$) and $\operatorname{im} i \subset S$

ただし $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の作用は

$$g \cdot (B_1, B_2, i, j) = (gB_1g^{-1}, gB_2g^{-1}, gi, jg^{-1})$$

である. また, (2) の条件をはずして幾何学的不変式論の意味で商空間を取ったのが $M_0(r,n)$ である. すなわち, $\operatorname{Spec} M_0(r,n)$ が (1) の方程式を満たすアファイン多様体上の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-不変な関数の全体になるように定められたアファイン多様体である. 定義から, 写像 $\pi\colon M(r,n) \to M_0(r,n)$ が存在する.

いくつか知られていることをまとめる:

(1) $M(r,n)$ は非特異な準射影的多様体で, 次元は $2rn$.
(2) π は, 特異点解消.
(3) $M(r,n)$ は, $\mathbb{P}^2$ の上の連接層の枠付きモジュライ空間である. すなわち, 次のような (E, φ) をパラメトライズする: E は $\mathbb{P}^2$ 上の捻じれをもたない連接層, φ は, E の line ℓ_∞ への制限と $\mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r}$ の間の同型写像. (ℓ_∞ は $\mathbb{P}^2$ の line である.)

$r = 1$ のときは, $M(1,n)$ はアファイン平面 $\mathbb{C}^2$ の n 点のヒルベルト概型になる. $M_0(1,n)$ の方は n 次対称積 $S^n(\mathbb{C}^2)$ になり, $\pi\colon \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \to S^n(\mathbb{C}^2)$ はヒルベルト-チャウ写像というものになる. (この辺のことは, 私が昔書いたもの [6] を見てください.)

$\pi\colon M(r,n) \to M_0(r,n)$ はいろいろな意味で Springer 写像 $T^*\mathcal{B} \to \mathcal{N}$ の類似と考えられる. 類似についても上の論説を参照してください.

図 1 のグラフは, Kac-Moody Lie 環のカルタン行列に対応しないので, [4, 5] の結果は適用できないが, 幾何学的な構造はほとんど同じである. 一つ違うことは, $\pi^{-1}(0)$ はラグランジアン部分多様体ではなく, それよりも一次元低いことぐらいである. (平行移動の群が働くので, それで割っておけばラグランジアン部分多様体になる.) また, 以下で述べることも, 一般の箙多様体でも同様のことが成り立つことが期待される. もしもこれが本当ならば, 量子展開環 (おそらくは量子トロイダル環) の表現論とつながってくることが期待される.

$\widetilde{T}=T^2\times T^{r-1}$ を $r+1$ 次元トーラスとし, $M(r,n)$, $M_0(r,n)$ への自然な作用を考える. すなわち,

$$(B_1,B_2,i,j)\longmapsto (t_1B_1,t_2B_2,ie^{-1},t_1t_2ej),$$
$$\text{for } t_1,t_2\in\mathbb{C}^*,\ e=\mathrm{diag}(e_1,\dots,e_r)\in(\mathbb{C}^*)^r,\ \det e=1.$$

である. $H^0(M(r,n),\mathcal{O})=H^0(M_0(r,n),\mathcal{O})$ を $M(r,n)$, $M_0(r,n)$ の上の関数の全体のなす環とする. これを $\widetilde{T}$-module と考え,

$$\operatorname{ch} H^0(M(r,n),\mathcal{O})$$

をその指標とする. 各ウェイト空間が有限次元でこれが well-defined であること, また $t_1^{\pm},t_2^{\pm},e_1^{\pm}$, $\dots,e_r^{\pm}$ の有理関数になることは容易に示される. また $H^k(M(r,n),\mathcal{O})$ は, $k>0$ のときに 0 であることが予想される. このとき Nekrasov の問題は

$$Z_K^{\mathrm{inst}}(t_1,t_2,\vec{e};\mathfrak{q})=\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{q}^n\sum_i(-1)^i\operatorname{ch}H^i(M(r,n),\mathcal{O})\overset{\text{conjecturally}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{q}^n\operatorname{ch}H^0(M_0(r,n),\mathcal{O})$$

を計算せよ, というものである. ここで $\mathfrak{q}$ は, 形式的な変数であり, $\vec{e}=(e_1,\dots,e_r)$ $(\prod e_\alpha=1)$ である. 我々が答えたのは, 上の degenerate version:

$$Z^{\mathrm{inst}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\vec{a};\mathfrak{q})=\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{q}^n\sum_i(-1)^i\lim_{t\to 0}\operatorname{ch}H^i(M(r,n),\mathcal{O})\Big|_{\substack{t_1=e^{-t\varepsilon_1}\\ t_2=e^{-t\varepsilon_2}\\ e_\alpha=e^{-ta_\alpha}}}$$

を計算せよ, という問題である. ($\vec{a}=(a_1,\dots,a_r)$, $\sum a_\alpha=0$) これは大まかにいうと, $M(r,n)$ の ‘体積’

$$\int_{M(r,n)}1$$

を同変コホモロジーの意味で計算せよ, という問題である.

もう少し正確に定義するためには (Borel-Moore) 同変ホモロジー群が必要になる. π が導く押し出し写像を

$$\pi_*\colon H_*^{\widetilde{T}}(M(r,n))\to H_*^{\widetilde{T}}(M_0(r,n))$$

とし, 基本類 $[M(r,n)]$ の像 $\pi_*([M(r,n)])$ を考える. $M_0(r,n)$ の $\widetilde{T}$ 作用の固定点が一点 0 のみからなることに注意して, 埋め込み写像を $\iota_0\colon\{0\}\to M_0(r,n)$ とすると, $\iota_{0*}\colon H_*^{\widetilde{T}}(\{0\})\to H_*^{\widetilde{T}}(M(r,n))$ を考える. 一点の同変ホモロジー群は, 多項式環 $\mathbb{C}[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\vec{a}]$(の次数を逆にしたもの) である. Atiyah-Bott の局所化定理によると, $\mathbb{C}[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\vec{a}]$ の商体 $\mathcal{S}=\mathbb{C}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\vec{a})$ を tensor すると, 同型写像になる:

$$\mathcal{S}\underset{\cong}{\xrightarrow{\iota_{0*}}}H_*^{\widetilde{T}}(M_0(r,n))\otimes_{S(\widetilde{T})}\mathcal{S}$$

このとき $\int_{M(r,n)} 1$ は $(\iota_{0*})^{-1}\pi_*([M(r,n)])$ に他ならない.

$r=1$ のときは, 答えはすぐ求まる. というのも, このときは $M_0(1,n)$ が対称積となって商特異点しか持たず, そこで '体積' を計算すれば十分だからである:

$$Z_K^{\mathrm{inst}}(t_1,t_2;\mathfrak{q}) = \exp\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{q}^d}{(1-t_1^d)(1-t_2^d)d}\right) \tag{1.1}$$

degenerate した方は,

$$Z^{\mathrm{inst}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2;\mathfrak{q}) = \exp\left(\frac{\mathfrak{q}}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right) \tag{1.2}$$

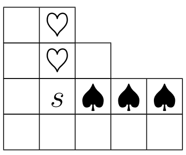
となる.

ここで notation に関する注意をしておく. $\vec{a}=(a_1,\dots,a_r)$ $(\sum a_\alpha = 0)$ は, $\mathfrak{sl}_r$ のカルタン部分環 $\mathfrak{h}$ の元と見なすべきである. 単純コルート $\alpha_i^\vee = (0,\dots,0,\overset{i}{1},\overset{i+1}{-1},0,\dots,0)$ を取って $\vec{a}=\sum_i a^i\alpha_i^\vee$ で表わす. よって $(a^1,\dots,a^{r-1})$ が本当の座標である. また $\mathfrak{sl}_r$ のコルート格子を Q とする. すなわち $Q=\{\vec{k}=(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}^r \mid \sum k_\alpha = 0\}$ である. これも $\vec{k}=\sum_i k^i\alpha_i^\vee$ とあらわす. これらの notation は §4 でも使われる.

2. 組み合わせ論的な分配関数の定義

同変 K 群や同変コホモロジーには, 局所化公式というものがある. (その一端を前節でもすでに紹介した.) これを用いて $Z_K^{\mathrm{inst}}(t_1,t_2,\vec{e};\mathfrak{q})$ や $Z^{\mathrm{inst}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2;\mathfrak{q})$ を組み合わせ論的な式で表わすことができる. その導出は原論文にまかせることとして, ここでは結論の式だけを紹介する.

まず, ヤング図式 Y と箱 $s\in Y$ に対して,



$$\begin{aligned} l_Y(s) &= \text{number of } \spadesuit \\ a_Y(s) &= \text{number of } \heartsuit \end{aligned}$$

によって leg length $l_Y(s)$ と arm length $a_Y(s)$ を定義する. Macdonald 多項式に詳しい方ならば, この定義には見覚えがあるだろう. しかし, 通常はヤング図形の中にある箱に対してのみ定義されるが, ここでは箱は図形の外にあってもかまわないものとし, よって $l_Y(s)$, $a_Y(s)$ は負の値を取るかも知れないものと約束する. このような定義は, 今まで聞いたことがないが, 我々の計算には自然に現れた.

r 個の組 $\vec{Y}=(Y_1,\dots,Y_r)$ に対し,

$$N_{\alpha,\beta}^{\vec{Y}}(t_1,t_2,\vec{e}) = e_\beta\, e_\alpha^{-1} \times \left\{ \sum_{s\in Y_\alpha} \left(t_1^{-l_{Y_\beta}(s)} t_2^{a_{Y_\alpha}(s)+1} \right) + \sum_{t\in Y_\beta} \left(t_1^{l_{Y_\alpha}(t)+1} t_2^{-a_{Y_\beta}(t)} \right) \right\}.$$

によって有理式 $N^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}(t_1,t_2,\vec{e})$ を定義する．$(1\le\alpha,\beta\le r)$ このとき

$$Z_K^{\mathrm{inst}}(t_1,t_2,\vec{e};\mathfrak{q})=\sum_{\vec{Y}}\frac{\mathfrak{q}^{|\vec{Y}|}}{\prod_{\alpha,\beta=1}^{r}N^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}(t_1,t_2,\vec{e})} \tag{2.1}$$

が成り立つ．ここで $|\vec{Y}|$ は, Y_α の箱の個数の総和である．

degenerate した方は,

$$Z(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\vec{a};\mathfrak{q})=\sum_{\vec{Y}}\frac{\mathfrak{q}^{|\vec{Y}|}}{\prod_{\alpha,\beta}n^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\vec{a})}, \tag{2.2}$$

である．ここで

$$\begin{aligned}n^{\vec{Y}}_{\alpha,\beta}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\vec{a})=\prod_{s\in Y_\alpha}&\left(-l_{Y_\beta}(s)\varepsilon_1+(a_{Y_\alpha}(s)+1)\varepsilon_2+a_\beta-a_\alpha\right)\\&\times\prod_{t\in Y_\beta}\left((l_{Y_\alpha}(t)+1)\varepsilon_1-a_{Y_\beta}(t)\varepsilon_2+a_\beta-a_\alpha\right).\end{aligned}$$

である．

$r=1$ のときに(1.1) と(2.1) が等しいことは, Hilbert 概型の幾何を用いなくても, Macdonald 多項式の組み合わせ論を使って証明することができる．すなわち, (1.1) の定義を出発点として Z_K^{inst} が計算できるということだ．しかし現在までのところ $r\ge 2$ に対して Z_K^{inst} (or Z^{inst}) を組み合わせ論的に求めることはできていない．我々の方程式も, 幾何学的な考察を用いて求められている．

3. 分配関数の満たす微分方程式

ここからあとは, degenerate version である Z^{inst} のみを取り扱う．というのも Z_K^{inst} については対応する結果はまだ得られていないからである．

関数等式の形がきれいになるように, 分配関数の '摂動項' を定義する．摂動という言葉が意味する通り, 本来は経路積分で定義される分配関数の摂動展開によって求められる項であるが, その意味をここでは述べないことにする．([8] を参照のこと.)

$\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x;\Lambda)$ を

$$\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(x;\Lambda)=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\frac{\Lambda^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{dt}{t}t^s\frac{e^{-tx}}{(e^{\varepsilon_1 t}-1)(e^{\varepsilon_2 t}-1)}$$

によって定義する．そこで, 完全な分配関数を

$$Z(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\vec{a};\mathfrak{q})=\exp\left[-\sum_{\alpha\neq\beta}\gamma_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(a_\alpha-a_\beta;\Lambda)\right]Z^{\mathrm{inst}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\vec{a};\mathfrak{q})$$

によって定義する. ここで $\Lambda = \mathfrak{q}^{\frac{1}{2r}}$ とする.

さらに次の広田微分の拡張を用意する.

$$\begin{aligned}\left(D_x^{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}\right)^m (f\cdot g) &= (\frac{d}{dy})^m f(x+\varepsilon_1 y)g(x+\varepsilon_2 y)\Big|_{y=0}\\ &= \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_1^k \varepsilon_2^{m-k}\binom{m}{k}\frac{d^k f}{dx^k}\frac{d^{m-k}g}{dx^{m-k}}.\end{aligned}$$

$(D_x^{(1,-1)})^m$ が通常の広田微分である.

Theorem 3.1 ([9])**.** (1) 分配関数は次の微分方程式を満たす.

$$Z(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\vec{a};\mathfrak{q}) = \sum_{\vec{k}} Z(\varepsilon_1,\varepsilon_2-\varepsilon_1,\vec{a}+\varepsilon_1\vec{k};\mathfrak{q})Z(\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_2,\vec{a}+\varepsilon_2\vec{k};\mathfrak{q}),$$

$$0 = \sum_{\vec{k}}\left(D_{\log\mathfrak{q}}^{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)} - \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(r-1)}{12}\right)^d \left(Z(\varepsilon_1,\varepsilon_2-\varepsilon_1,\vec{a}+\varepsilon_1\vec{k};\mathfrak{q})\cdot Z(\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_2,\vec{a}+\varepsilon_2\vec{k};\mathfrak{q})\right)$$

for $1\le d\le 2r-1$. ただし, $\vec{k}$ はコルート格子 $Q=\{\vec{k}\in\mathbb{Z}^r \mid \sum k_\alpha = 0\}$ を走る.

(2) さらに, $d=1,2$ の下の微分方程式と摂動項の上の形は, 分配関数を特徴づける.

広田微分は KP 階層の理論に現れたが, 上のように格子で足し上げるようなものは見たことがない. ご存じの方があれば, お教えいただきたい.

証明はここでは述べないが, blowup を用いるとだけ注意しておく. そのために上の方程式を 'blowup 方程式' とよんでいる.

原論文では, 摂動項を入れていないために, 方程式の形が上のものとは一見異なっていることに注意されたい. 摂動項をいれるときれいになることは, Nekrasov に教えてもらった.

4. Seiberg-Witten 曲線

ここで, $\mathcal{N}=2$ SUSY Yang-Mills 理論の関する, 数学にかかわる重要と思われる結果をあげる.

- **1988:** Witten [14] が, Donaldson 不変量を $\mathcal{N}=2$ SUSY Yang-Mills 理論の twisted version の相関関数として書けることを観察した. とくに Donaldson 不変量は, 経路積分で記述できる.
- **1994:** Seiberg-Witten [13] が, $\mathcal{N}=2$ SUSY Yang-Mills 理論のプレポテンシャルがリーマン面の族で記述されることを発見した.
- **1997:** Moore-Witten [3] が, $b_+=1$ の Donaldson 不変量が Seiberg-Witen 不変量と上のリーマン面で書ける量の二つで記述されることを示した.

これらの結果は, すべてプレポテンシャル, 相関関数に関する物理的な考察に依存しており, 数学的に厳密なものとはいえない. たとえば, プレポテンシャル自身が, 数学的に何を意味しているのかは明らかではなかった.

一方で, これまでのべてきた Nekrasov の分配関数は, 数学的に厳密に定義されるものであり, またそれが, 上のプレポテンシャルの変形になっていることは, 物理的には明らかなことである. したがって, これをプレポテンシャルの数学的な定義と考え, 上で示されていたような結果を数学的にきちんと証明するということは, 意味のある問題になった.

[9] で我々が証明したのは, Seiberg-Witten の結果, すなわちリーマン面の族でプレポテンシャルを記述する, というものであった. そこで, ここでは記述がどのようなものであったのかを説明する.

$\vec{u} = (u_2, \dots, u_r)$ でパラメトライズされる曲線

$$C_{\vec{u}} : \Lambda^r \left(w + \frac{1}{w} \right) = P_r(z) = z^r + u_2 z^{r-2} + u_3 z^{r-3} + \cdots + u_r$$

を考える これを **Seiberg-Witten 曲線**と呼ぶ. パラメータの空間 $\{\vec{u} \in \mathbb{C}^{r-1}\}$ を **u-平面**とよぶ. ここで Λ もパラメータであるが, そもそもの起源が $\vec{u}$ とは異なるので, 分けて考える. 射影 $C_{\vec{u}} \ni (w, z) \mapsto z \in \mathbb{P}^1$ が超楕円曲線の構造を定める. $z_1, \dots, z_r$ を $P_r(z) = 0$ の解とし (相異なると仮定する), $|u| \gg |\Lambda|$ とすると, z_α の近くの $z_\alpha^\pm$ で $P_r(z_\alpha^\pm) = \pm 2\Lambda^r$ となるものがただ一つに定まる. $z = z_\alpha^\pm$ が, $C_{\vec{u}} \to \mathbb{P}^1$ の $2r$ 個の分岐点を与える. ∞ は分岐点ではなく, ∞_+ $(w = \infty)$ と ∞_- $(w = 0)$ が, $\infty \in \mathbb{P}^1$ の逆像の二点であることに注意しよう. $C_{\vec{u}}$ の genus は $r - 1$ である.

通常のように, $C_{\vec{u}}$ を, Riemann 球面に z_α^- と z_α^+ の間にカットを入れて作った二重被覆と考える. このとき, $C_{\vec{u}}$ 上のサイクル A_α $(\alpha = 1, \dots, r-1)$ を z_α^+ と z_α^- を結ぶカットを回るサイクルとし, B_α を z_α^- と z_r^- をそれぞれのシートで回るサイクルとする. 向きを適当に入れて, シンプレクティックな基底になるようにしておく. $(A_\alpha \cdot A_\beta = 0 = B_\alpha \cdot B_\beta,\ A_\alpha \cdot B_\beta = \delta_{\alpha\beta}.)$

dS を

$$dS = \frac{1}{2\pi i} z \frac{dw}{w}$$

で定め, **Seiberg-Witten 微分**とよぶ. $\infty_\pm$ に極をもつ有理型微分である. このとき

$$a_\alpha = \int_{A_\alpha} dS, \qquad a_\alpha^D = \int_{B_\alpha} dS$$

で u-平面 $(|u| \gg |\Lambda|)$ 上の関数を定義する. このとき $\vec{a} = (a_1, \dots, a_r)$ $(\sum a_\alpha = 0)$ は, u 平面の局所座標系を定める. (便宜的に $a_r = -\sum_{\alpha \neq r} a_\alpha$ で定めた.)

また w を定数とおいて, dS を u_p で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial u_p} dS\Big|_{w=\mathrm{const}} = \frac{z^{r-p}}{P'(z)} \frac{dw}{w}$$

となって, $p = 2, \ldots, r$ のとき $C_{\vec{u}}$ の正則微分の基底を与える. Riemann の双線型関係式により $\frac{\partial a_\alpha^D}{\partial a_\beta}$ は α, β に関して対称になり, したがって

$$a_\alpha^D = \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial a_\alpha}$$

となる u-平面 ($|u| \gg |\Lambda|$) 上の関数 $\mathcal{F}_0$ が存在する. $\mathcal{F}_0$ は定数をのぞき unique に定まる. 定数の部分は, $\mathcal{F}_0$ が, 2 次の同次式であるという要請

$$\left(\sum a^i \frac{\partial}{\partial a^i} + 2r\mathfrak{q}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{q}} \right) \mathcal{F}_0 = 2\mathcal{F}_0$$

で固定する. ここにあるように以下では a^i という座標を用いる.

以上の準備により, Nekrasov の予想は完全に数学的な主張としてのべられる.

Conjecture 4.1. (1) $F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{a}; \mathfrak{q}) = \varepsilon_1\varepsilon_2 \log Z(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{a}; \mathfrak{q})$ は, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ で正則である.

(2) $F(0, 0, \vec{a}; \mathfrak{q})$ は Seiberg-Witten プレポテンシャル $\mathcal{F}_0$ に等しい.

[9] の主定理は, この予想が正しい, というものである. (Nekrasov-Okounkov [11] も独立に証明した.)

残念ながら我々の証明は, 間接的なものであり, blowup 方程式に基づく. ただし, blowup 方程式は, 極限だけでなく $F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{a}; \mathfrak{q})$ を調べるのにも有効であるので, それ自身意味があるものであると考えている. まず, $d = 1$, 2 の blowup 方程式を使って, (1) を示す. $\mathfrak{q}$ の係数に関する帰納法で示すことができる.

次に, $d = 2$ の blowup 方程式を $Z(\varepsilon_1, \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \vec{a}; \mathfrak{q})Z(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2, \vec{a}; \mathfrak{q})$ で割って, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ の極限を取る. (1) で示したことにより極限は存在して,

$$(\mathfrak{q}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{q}})^2 F_0^{\mathrm{inst}}(\vec{a}; \mathfrak{q}) = \sum_{i,j} \frac{\partial u_2}{\partial a^i}\frac{\partial u_2}{\partial a^j} \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial \tau_{ij}} \log \Theta_E(0|\tau), \tag{4.2}$$

という微分方程式になる. ここで F_0^{inst} は $\varepsilon_1\varepsilon_2 \log Z^{\mathrm{inst}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{a}; \mathfrak{q})$ で $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ と置いたものである. また,

$$u_2 = \mathfrak{q}\frac{\partial F_0}{\partial \mathfrak{q}}(\vec{a}; \mathfrak{q}), \qquad \tau_{ij} = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{\partial^2 F_0}{\partial a^i \partial a^j}(\vec{a}; \mathfrak{q}),$$

であり, これらは Seiberg-Witten 曲線のパラメータの一つ, Seiberg-Witten 曲線の周期と identify できる. 最後に $\Theta_E(0|\tau)$ はリーマンのテータ関数で,

$$\Theta_E(\vec{\xi}|\tau) = \sum_{\vec{k}\in Q} \exp\left(\pi\sqrt{-1} \sum_{i,j} \tau_{ij} k^i k^j + 2\pi\sqrt{-1} \sum_i k^i (\xi^i + \frac{1}{2}) \right),$$

によって定義される.

一方, [1] によれば, $\mathcal{F}_0$ がこの方程式を満たすことが証明できる. (テータ関数に関する等式を使う.) この方程式の解はただ一つなので, 予想 4.1 が証明されたことになる.

最後に可積分系との関係を述べよう. まず, 最初の観察は, Seiberg-Witten 曲線が, $\widehat{\mathfrak{sl}}_r$-型の戸田格子のスペクトル曲線である, ということである. これを最初に指摘したのが誰かは知らないが, $\mathfrak{sl}_r$ 以外の一般の Lie 群に対する Seiberg-Witten 曲線を考えるときには, 対応するアファイン・リー環の戸田格子を考えればよい, と予想することができる. (ただし, 正確には $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Langlands 双対を取らなくてはいけないことが, いろいろな物理的考察から分かっている.) しかし, この観察がどのような数学的な意味を持つかはよくわからない. スペクトル曲線でなく, 戸田格子自身をゲージ理論から見ることはできるのだろうか？

上で $r = 1$ のときは, 分配関数が explicit に求まることを説明した. ところが, 1 だけでなく, 他のコホモロジー類を積分すると, 面白いつながりが見つかってくる. 詳しくは [2] にゆずるが, ヤング図式による記述を使うと, それが Okounkov-Pandharipande [12] の $\mathbb{P}^1$ の Gromov-Witten 不変量 (ただし, 定義域についてはすべての genus について足し上げる) の記述に等しいことが分かる. 特に, [12] の結果から分配関数が, 両側無限の A_∞ 型戸田階層の τ 関数になることが分かる. これが何を意味するかは, 上のときよりは少しは分かる. というのも, Hilbert 概型のコホモロジー群は Fock 空間と同型で ([6] 参照), コホモロジー類たちは, 可換なハミルトニアンと考えることができるからである. しかし, 通常の τ 関数の出方とはちがい, 変数はハミルトニアンにかかっているので, [12] を経ないと今のところは, τ 関数であることの証明はできない.

References

[1] A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov, *RG equations from Whitham hierarchy*, Nucl. Phys. B **527** (1998), 690–716.

[2] A. Losev, A. Marshakov and N. Nekrasov, *Small instantons, little strings and free fermions*, preprint, hep-th/0302191.

[3] G. Moore and E. Witten *Integration over the u-plane in Donaldson theory*, Adv. Theor. Math. Phys. **1** (1997), 298–387.

[4] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. **76** (1994), 365–416.

[5] ______, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. **91** (1998), 515–560.

[6] ______, 曲面上の点の Hilbert 概型と Heisenberg 代数, 数学 **50**, (1998) 385–398.

[7] ______, *Moduli of sheaves on blown-up surfaces*, in 'Proceedings of RIMS Project 1999/2000, Algebraic Geometry and Integrable Systems related to String theory', RIMS Kokyuroku **1232** (2001), 29–33; available from `http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/TeX/blowup.ps.gz`

[8] ______, 幾何学と表現論, 日本数学会 2003 年度秋季総合分科会 企画特別講演; available from `http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Talks/jkikaku.ps.gz`

[9] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I*, preprint, math.AG/0306198.

[10] N. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, preprint, hep-th/0206161.

[11] N. Nekrasov and A. Okounkov, *Seiberg-Witten theory and randaom partitions*, preprint, hep-th/0306238.

[12] A. Okounkov and R. Pandharipande, *Gromov-Witten theory, Hurwitz theory, and completed cycles*, preprint, math.AG/0204305.
[13] N. Seiberg and E. Witten, *Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory* Nuclear Phys. B **426** (1994), 19–52; Erratum, Nuclear Phys. B **430** (1994), 485–486.
[14] E. Witten, *Topological quantum field theory*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 353–386.
[15] K. Yoshioka, *Chamber structure of polarizations and the moduli of stable sheaves on a ruled surface*, Internat. J. Math. **7** (1996), 411–431.

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学大学院理学研究科数学教室
E-mail address: `nakajima@math.kyoto-u.ac.jp`