“母空間” と STRING DUALITY

中島 啓
京都大学理学系研究科

1. 序

ここ数年来, 理論物理学では革命的な変革がおきている. それは, string duality と呼ばれている現象であり, 5 つある string 理論の間に今まではよく見えていなかった関係, すなわち “duality” があるというものである. そして一見別のものに見える異なる string 理論が実は一つの理論 (=究極の理論) の様々な極限であり, 結局は同じものに過ぎないのだという哲学が生まれた. しかし現在までのところ究極の理論は構成されていないので, 研究は次のように行われている.

1. どの string 理論達 (compact 化したもの) の間に duality があるかを決める. これは, いろいろな方法があるようだが (例えば理論の moduli 空間を調べる) 現在までに, かなりよく分かっているようである.
2. ある string 理論でよく知られている現象を duality で移った別の string 理論で探す. 通常は, これはそれ程やさしくない. その一つの理由は, (取り扱うことのできる) 摂動論的な現象が (取り扱いの困難な) 非摂動論的な現象に移るためである.
3. もし, string duality で移った先の string 理論に対応するものが見つからなかったら, 新しい “対象” を付け加えて説明を試みる. 例えば, brane は, このようにして重要性が再認識された対象の例である. 新しい対象が見つかれば, 他の string 理論にもフィードバックされて研究されることも有り得る. また, 逆にいえば duality で移り合わない対象は本質的でないと見なされることにもなる.

ここでは, string duality について解説することを目標とするのではなく[1], その哲学が数学に示唆することを考えてみようと思う.

上に述べたように string duality は一見遠く離れた二つの理論の間に繋がりがあることを示唆する. これはそれと関係する数学の分野についてもそうである. string 理論と関係する数学でよく現在のところ一番深く研究されているのは, アファインリー環の表現論, 特に vertex algebra(cf. [2]) と呼ばれる分野である. string duality によって, そこで扱われている対象を幾何に求めようとすると, 多くの場合対応するものが未知であることに気付く[2]. ここで筆者が説明を試みる “母空間” は, 「表現空間はウェイト空間の直和である」という極々あたりまえの事実を, string duality によって幾何で理解しようと試みたときに必要となる対象である. 一方, 母空間の係数である多様体 (多くの場合モジュライ空間である) は

[1]実際, それは筆者の力のおよぶところではない. この原稿を書いている時点ではまだ聞いていないが, 3 月の Surveys in Geometry で string duality について深谷さんが解説されるはずである.

[2]筆者は, ある分野にあるものの対応物を他の分野で考えることは,(string duality と関連せずとも) 非常に健全なことのように思える. 例えば, 「特殊関数論」があるのに「特殊多様体論」がないのは不自然に思える. どなたか教科書を書きませんか？

duality で移らない. これは, 一つ一つの多様体を考えることがあまり自然でないことを意味している. また, 現在のところ (おそらくは我々の幾何の理解が primitive であるために) そこまで行っていないが, vertex algebra の理論にも幾何からフィードバックがあることが期待される.

上の考察は, string duality を出発点にしている. 従って, なぜ **string duality** が成立するのかを説明出来る枠組みを提出するものではないことを強調したい. これは, 現在のところ想像の出来ない全く新しい対象が必要となるであろう. 少なくとも, 二つの母空間がどう繋がるのか, 母空間と vertex algebra がどう繋がるのかを理解しなければならない. 現在我々が理解しているところの "多様体" との類似で言うと, 母空間は座標系を取って表現された関数であり, string duality は座標変換に対応する. そしてそれらがまとまって出来ている多様体にあたる対象は全く理解されていない.

始めに, ここに書くことは筆者個人の経験に大きく依存していることを断る必要があるだろう. 筆者の行った仕事 [5, 6] を Vafa, Harvey-Moore[8, 3] が string duality によって説明した仕事を元に考えたものだからである. 他の人は string duality から全く違った考察を行う可能性がある. その点を了解した上で以下を読んでもらいたい.

現在のところ母空間は名前だけあって, 定義ははっきりとしたものはない. なぜ母空間と名付けることにしたかといえば[3], それは「母関数」の幾何学における対応物だからである. 母関数を用いて数を一度に扱うことによって新たな視点が開かれたように, たくさんの多様体 (通常はモジュライ空間として現れる) を一度に扱うことによって, 新たな現象が見えてくることが期待される. 特に, モジュラー形式の理論 (string duality とモジュラー形式は深くかかわっている) に対応する幾何学的な理論を構築することが目標の一つとなる. 類似を表にまとめておこう.

まとめて取り扱う	自然数	点	モジュライ空間
貼合わせる	母関数	座標近傍	母空間
	モジュラー形式	多様体	???

2. 簡単な母空間の例 その 1. ELLIPTIC GENUS

抽象的に母空間といってもあまり感じがつかめないと思うので, 非常によく分かる例として, elliptic genus を挙げよう. 詳しくは, [10] を参照して欲しい. また最近 string duality と関連して興味深い仕事があった. [1] を参照するとよい. black hole のエントロピーなどとも関連するようである.

X を spin 多様体とするとき, elliptic genus は X のループ空間 $\mathcal{L}X$ 上の elliptic operator(例えば Dirac operator や signature operator) の自然な S^1作用に関する同変指数として形式的に定義される. しかし, 無限次元空間 $\mathcal{L}X$ の上で elliptic operator の定義をすることはそれ程やさしくない[4]. そこで, 直接に elliptic operator を考える代わりに, S^1-作用の固定点が constant loop 達であり, X と同一視されることに着目して, 次のように考える. $\mathcal{L}X$ の

[3] もしも, いい名前を思い付いた方は教えて欲しい.

[4] この辺は詳しくないのであるいは, そうでないかもしれない.

上で, fixed point formula を形式的に用いると, Dirac operator $D_{\mathcal{L}X}$ の同変指数は,

$$\mathrm{Index}_q(D_{\mathcal{L}X}) = \mathrm{tr}_{\Gamma(S^+_{\mathcal{L}X})}\, q - \mathrm{tr}_{\Gamma(S^-_{\mathcal{L}X})}\, q = q^{-\dim X/24} \left\langle \widehat{A}(X)\,\mathrm{ch}\left(\bigotimes_{\ell=1}^{\infty} S_{q^\ell} T_X\right), X \right\rangle \tag{2.1}$$

で与えられる. 但し, $S^{\pm}_{\mathcal{L}X}$ は $\mathcal{L}X$ の spinor bundle で数学的な定義はない. 一方 $\widehat{A}(X)$ は X の $\widehat{A}$-genus であり, T_Xは X の tangent bundle で,

$$S_t T_X = 1 \oplus tT_X \oplus t^2 S^2 T_X \oplus \cdots$$

である. 式(2.1) の右辺は, q に関する形式的べき級数として有限次元の普通の多様体 X の言葉で完全に定義できる. そこでこの形式的べき級数 (母関数!!) を elliptic genus として定義するわけである.

一歩前に戻って,

$$\left(\bigotimes_{\ell=1}^{\infty} S_{q^\ell} T_X\right)$$

を X の K 群 に値を持つ形式的べき級数と思うこともできるであろう. それが, ループ空間の “同変 K 群” $K(\mathcal{L}X)$ (数学的には定義されない) の元 $\mathrm{symbol}(D_{\mathcal{L}X})$ に等しいというわけである.

ループ空間を持ち出すことの一つの利点は, elliptic genus の modular 変換性が説明できることにある. 有限次元の通常の多様体上の elliptic operator の指数定理がループ空間上の分配関数として書けることを思い出せば (Feynmann-Kac の公式), elliptic genus がトーラスから X への写像の空間上の分配関数として書ける. このとき, 結果がトーラスの周期にどのように依存するかを見れば modular 変換性が証明できる. (正確には, アノマリーがある.)

3. 簡単な母空間の例 その 2. 多様体の指数関数

前の節の例は母空間が何であるか最初から明らかだったので, 母空間を考えるありがたみがそれ程ない. 次に, 母空間があまりよく分からない例を挙げよう. しかし, 多様体一つ一つを取り扱うのではなく, 一度に取り扱うことで新しい現象が見えてくる本質的な例になっている.

X を多様体としたときにその対称積 $S^nX = X^n/\mathfrak{S}_n$[5]を考え, その母空間

$$\begin{aligned} S_qX = \sum_{n=0}^{\infty} q^n S^n X &= (\text{一点}) + qX + q^2 S^2 X + q^3 S^3 X + \cdots \\ &= \frac{q^0 X^0}{\mathfrak{S}_0} + \frac{qX}{\mathfrak{S}_1} + \frac{q^2 X^2}{\mathfrak{S}_2} + \frac{q^3 X^3}{\mathfrak{S}_3} + \cdots \end{aligned}$$

を考える. ここで q は不定元である. また, $+$ はあまり意味はなく, S^nX を全ての n について同時に考え, 一つの空間と見なそうということである. 東大の牛腸さんによれば, これは $\exp(qX)$ と書くべき母空間である.

[5]一般に S^nX は多様体でなく, orbifold であるが, あまり気にしないことにする.

Macdonald[4] によれば対称積の Poincaré 多項式の母関数は, 次で与えられることが知られている.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n P_t(S^n X) = \frac{(1+tq)^{b_1(X)}(1+t^3q)^{b_3(X)}\dots}{(1-q)^{b_0(X)}(1-t^2q)^{b_2(X)}(1-t^4q)^{b_4(X)}\dots}. \tag{3.1}$$

但し, $b_i(X)$ は X の Betti 数である. 分子に奇数次の Betti 数が定める項が現れ, 分母に偶数次の Betti 数が定める項が現れる. Poincaré 多項式を一つの対称積 S^nX について求めたものはきれいに表わせないが, 母関数がきれいに表わされることが象徴的である. コホモロジー群のレベルでは,

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^*(S^n X, \mathbb{Q}) = \mathbb{S}(H^*(X, \mathbb{Q})) \tag{3.2}$$

が成り立つ. 但し, $\mathbb{S}$ は super symmetric algebra を表わし, 偶数次の項では通常の symmetric algebra を取り, 奇数次の項では exterior algebra を取る. 証明は, S^nX の微分形式が X^n 上の微分形式で対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用で不変であることを考えれば明らかであろう.

対称式は, 母関数の考え方が有効に使われる対象である. その意味で, 上の公式が対称式の専門家の Macdonald によって見出されたことは, 必然的であったといっていいだろう.

もしも, 通常幾何学者が理解するように, 空間があってそのホモロジー群が定義されると考えるならば[6], 対称積の "母空間" があって, そのホモロジー群の Poincaré 多項式が(3.1)で与えられるのだ, と考えることは自然であろう. 母関数のレベルで顕著なように, 一つ一つの対称積を考えるよりも全てをまとめた母空間の方が良い対象であるという意味である.

残念ながら現在のところ対称積の母空間 $\exp(qX)$ を一つの空間としてどのようにみたらいいのかは分からない. 今現在のところ母空間を調べるために筆者が持っている唯一つの技術は, correspondence(対応) を用いることである. 母空間を現在の我々の知識で扱うためには, 二つの違った多様体を結び付けなければならない. そのためには, 二つの多様体の直積の部分多様体 (一般には, 特異点をもってもよろしい) を考えることが自然であり, それが correspondence である. あとに述べる Hilbert scheme の母空間の時にそれを扱ったのが [6] であるが, 簡単のために対称積の場合を扱って, (3.2) の別の解釈を与えよう.

二つの対称積 S^nX と $S^{n+1}X$ の積の中の部分集合を

$$P \overset{\text{def.}}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^{n+1}) \in S^nX \times S^{n+1}X \mid x_i = y_i \text{ for } i = 1, \dots, n\}$$

により定義する. すなわち, $\{y_i\}$ は $\{x_i\}$ にちょうど一点 y_{n+1} を付け加えたものである. (対称積を考えているから番号づけは意味はない.) P の点に対して y_{n+1} を対応させる写像を $\Pi\colon P \to X$ で表わす. このとき, 各 $\alpha \in H_*(X, \mathbb{Q})$ に対して, ホモロジー群の間の写像 $P_\alpha\colon H_*(S^nX, \mathbb{Q}) \to H_*(S^{n+1}X, \mathbb{Q})$ を

$$c \longmapsto (p_2)_*(p_1^* c \cap \Pi^* \alpha \cap [P])$$

[6] これは誤解であって, ホモロジー群の方がより本質的な対象であって空間は補助的なものであるという考えも有り得る. 実際, 筆者はその可能性も十分に有り得ると考えている.

によって定義する. p_1, p_2 は $S^nX \times S^{n+1}X$ における第一成分, 第二成分への射影である. ホモロジーの次数をあまりはっきりさせなかったが, 次数は保たれず α の次数によって決まった数だけずれる.

同様に, $S^{n+1}X$ と S^nX の役割を入れ替えて, $Q_\alpha\colon H_*(S^{n+1}X,\mathbb{Q}) \to H_*(S^nX,\mathbb{Q})$ が定義できる. 物理の言葉を使うなら, P_α は点の数を増やしているので生成演算子であり, Q_α は減らしているので消滅演算子である. このとき, 次が成り立つ.

定理 3.3. 上で定義された P_α, Q_α は, $\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_*(S^nX,\mathbb{Q})$ 上の作用素として次の関係式を満たす.

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0, \qquad [Q_\alpha, Q_\beta] = 0$$
$$[P_\alpha, Q_\beta] = \langle \alpha, \beta \rangle \,\mathrm{id}$$

但し, ここで $[\ ,\ ]$ は, super-Lie algebra の交換子である. すなわち, α, β が共に奇数次のホモロジー類のときには, 反交換子とし, それ以外のときは通常の交換子と解釈する.

すなわち, P_α, Q_α は (有限次元)Heisenberg 代数の関係式を満たす. さらに, (3.2) を見れば, $1 \in H_0(S^0X,\mathbb{Q})$ を highest weight ベクトルとする既約 highest weight 表現になっていることもすぐ分かる.

このように対称積のホモロジー群は非常にやさしい. 母空間を持ち出さなくとも理解できる. せいぜいきれいに書けるという程度のありがたみしかない. これは, exp が初等関数であったように, $\exp(qX)$ が初等母空間とでも呼ぶべき対象であることの反映である (と思われる).

4. 代数曲面上の点の Hilbert scheme の母空間 Heterotic string/T^4 と typeIIA string/$K3$ の間の duality

この節の題にある二つの string 理論の間の duality は, duality の中では一番分かりやすいもののように思える. 詳しい内容は, 深谷さんの Surveys in Geometry における講演で解説されていることを期待して, これがなぜ “母空間” を必要とするか説明しよう.

まず, $\Gamma_{4,20}$ を signature が $(4,20)$ の even unimodular lattice すなわち $U^{\oplus 4} \oplus (-E_8)^{\oplus 2}$ としよう. ここで $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であり, $-E_8$ は E_8 型単純リー環の Cartan 行列である. 表題に掲げた二つの string 理論の間の duality の最初の出発点は, lattice $\Gamma_{4,20}$ に付随する両側コセット空間

$$\mathrm{O}(\Gamma_{4,20}) \backslash \mathrm{O}(4,20) / \mathrm{O}(4) \times \mathrm{O}(20)$$

が二つの string 理論のモジュライ空間として共通に現れることである.

非常に雑に言えば, heterotic string では, 4 はコンパクト化するトーラスの次元であり, 20 は, それに heterotic string 理論で内部空間として現れるトーラスの次元の 16 を足したものである. 一方, type IIA string では, $K3$ 曲面の上の Einstein 計量と B-field の組みのモジュライ空間として理解することができる. 但し, そのためには, $\Gamma_{4,20}$ を $K3$ 曲面のコホモロジー格子と同一視しなければならない. このとき, $H^*(K3)$ には次数による grading が入っているので, $\mathrm{O}(\Gamma_{4,20})$ の対称性が壊されている. duality からの帰結として得られる $\mathrm{O}(\Gamma_{4,20})$ の対称性は, $K3$ 曲面の言葉で理解しようとすると, 非自明な結論を導く. 例えば,

ミラー対称性や, Fourier-向井変換と関連する (と思われる). この現象を理解するためには, 母空間は役に立たないので, これ以上述べない.

さて, 筆者の結果と関連深いのは, Witten[11] による観察で, モジュライ空間の中で次の二つの現象が起きる点が対応していることである.

- heterotic string において, gauge symmetry enhancement が起きる.
- $K3$ 曲面が特異点を持つ.

string duality の哲学では, これら二つは同じ現象と思わなければならない. gauge symmetry enhancement を $K3$ 曲面の退化の言葉で理解できるはずだと言うことが期待できる. そのためには, $K3$ 曲面でコンパクト化された type IIA string 理論において

問 1: vertex operator が働く表現空間は, そもそも何なのか？
問 2: もし表現空間が分かったとして, vertex operator は何なのか？
問 3: vertex operator 達の交換関係は, どう理解できるか？

といったことが説明される必要があるだろう.

そして, Vafa や Harvey-Moore[8, 3] の主張は, 1 については $K3$ 曲面上のベクトル束 (より正確には sheaf) のモジュライ空間のコホモロジー群の直和を考えればよいというものである. そのとき, 一つ一つのモジュライ空間のコホモロジー群は, ウェイト空間になっている. さらに, 少なくともrank 1 のとき, 筆者の点の Hilbert scheme のコホモロジー上の Heisenberg 代数の表現の構成を使えば, それから (代数的操作で)vertex operator が定義できるので, 2 が説明できるというわけである. そのとき, 交換関係は, $K3$ 曲面の交叉形式で支配される. そしてさらに, $K3$ 曲面が特異点を持つとき, その回りで ALE 空間が見えてくるので, そのとき筆者の ALE 空間上のベクトル束のコホモロジー群の直和の上のアファインリー代数の構成がぴったり, gauge symmetry enhancement に対応するという主張である.

表現空間は, あくまで (点の数を走らせた) 全ての Hilbert scheme のコホモロジー群の直和であり, 一つ一つの Hilbert scheme にはそれ程意味はない. 従って, Hilbert scheme の母空間

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n X^{[n]} = (\text{一点}) + qX + q^2 X^{[2]} + q^3 X^{[3]} + \cdots$$

を考えることが大切である. さらに, よく知られているように, その Euler 数は, modular form になる. これは, 母空間が modular 変換性を持つことの反映であるはずだが, それをどのように説明したらいいのかは分からない.

母空間を考える必要がある理由は, これだけではない. vertex operator algebra の利点は, べき級数を積極的に扱って[7]交換関係等をきれいに書き下すことができることにある. 展開した係数の間の交換関係式は恐ろしく汚く, 誰もそれでは扱わない. 対応することは幾何ではやられていない. 例えば, vertex operator を幾何的に理解することを考えよう. それらは, Hilbert scheme の積の中のサイクルとして実現されるはずであるが, もともと vertex operator が形式的べき級数であるから, 必然的にサイクルを係数とする母関数でなければならない. それは, 母空間の中の部分母空間が表わす基本類に他ならない. そして, vertex operator の交換関係式が, 部分母空間の交叉の様子を調べることによって直ちに (計算することなしに) 分からなければ, 本当に分かったとは言えないであろう.

[7]収束したものを取り扱えるときは, もっと分かりやすい.

最後に問題を提出して終わろう. 共形場理論では, q は複素平面上を動くことが出来て, そう考えることが本質的であった. しかし, 現在の我々の母空間の理解はそのレベルまで遠く達しない. 複素平面, より一般にリーマン面を母空間の中にどう見るか今後の課題であろう.

References

[1] R. Dijkgraaf, G. Moore, E. Verlinde and H. Verlinde *Elliptic Genera of Symmetric Products and Second Quantized Strings*, preprint, hep-th/9608096.

[2] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, “Vertex operator algebras and the Monster”, Pure and Appl. Math. **134**, Academic Press, 1988.

[3] J.A. Harvey and G. Moore, *On the algebras of BPS states*, preprint, hep-th/9609017.

[4] I.G. Macdonald, *The Poincaré polynomial of a symmetric product*, Proc. Camb. Phil. Soc. **58** (1962), 563–568.

[5] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. **76** (1994), 365–416.

[6] H. Nakajima, *Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces*, to appear in Ann. of Math.

[7] ———, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, (to appear).

[8] C. Vafa, *Instantons on D-branes*, preprint, hep-th/9512078.

[9] C. Vafa and E. Witten, *A strong coupling test of S-duality*, Nucl. Phys. **431** (1994), 3–77.

[10] E. Witten, *Elliptic genera and quantum field theory*, Comm. Math. Phys. **109** (1987), 525–536.

[11] ———, *String theory dynamics in various dimensions*, preprint, hep-th/9503124.