曲面の上の点の HILBERT SCHEME と HEISENBERG 代数, 頂点代数

中島 啓
東京大学数理科学研究科

講演でお話したことは, (Jack 多項式についての内容を除いて) 基本的に全て [10] に含まれています. 従って, ここにそれを再現することはあまり意味がないように思われます. とは言っても [10] は厚いし, 英語で書かれているので読みにくいかもしれません. そこで同じ内容を書くのは大変心苦しいのですが, [10] の要約としてこの論説を書くことにします. あるいは, この論説を読まれて興味が湧かれて, [10] を見ていただければ大変うれしく思います.

1. 知られていること

X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の準射影的な非特異代数曲面とし, $X^{[n]}$ をその上の長さが n の 0 次元部分スキームの全体をパラメトライズする Hilbert scheme とします. Hilbert scheme という言葉から何か難しいものであるという印象を持たれる方も多いかもしれませんが, $X^{[n]}$ の点, すなわち長さが n の 0 次元部分スキームは, 簡単に言えば, 曲面 X の上の n 個の点と, それをちょこっと拡張したものに他なりません. どう "ちょこっと" 拡張するか説明しましょう. X の上に相異なる n 個の点 $x_1, \dots, x_n$ が与えられたとき, その全体 $Z = \{x_1, \dots, x_n\}$ は, $X^{[n]}$ の点を定めます. これを完備化することを考えましょう. 一番安直な完備化は, 点がぶつかっても単に集合としての構造だけしか考えないことにしたもので, X の n 次の対称積 $S^nX = X^n/\mathfrak{S}_n$ となります. ($\mathfrak{S}_n$は, n 次の対称群で, X^n に成分の入れ替えとして作用します.) 一方, Hilbert scheme は, もう少し精密な情報, 具体的には Z 上の関数の空間のことですが, それまで考えて完備化した空間です.

例えば, $n = 2$ のときを考えましょう. x_1, x_2 が X 上の相異なる点であるとすると, $Z = \{x_1, x_2\}$ 上の正則関数のなす層は, X の構造層 $\mathcal{O}_X$ を, Z 上で消える正則関数, すなわち x_1 と x_2 で消える正則関数の層で割った層に他なりません. x_2 が x_1 に近づいていったとき, x_1 と x_2 で消える正則関数の全体は, どうなるでしょうか？容易に分かるように, 答えは, x_1 で消えて, さらに x_2 が x_1 に近づいた方向 $v \in T_xX$ で微分したものが消える正則関数の全体

$$\{f \in \mathcal{O}_X \mid f(x_1) = 0, df_{x_1}(v) = 0\}$$

になります. 従って, $X^{[2]}$ には, $\{x_1, x_2\}$ $(x_1 \neq x_2)$ という形のものと, $x \in X$ と接空間 T_xX の一次元部分空間 L の組みの二種類が現れてきます. 上の例では, v が張る部分空間が L です. この L まで考えたところが, 対称積と Hilbert scheme の違いです.

n が 2 よりも大きいときには, もっと高階の微分まで考える必要が出てきますので, ずっと複雑になってきますが, 次の事実が知られています.

事実 1.1 (Fogarty [4]). *(1)* X **が準射影的な非特異代数曲面のとき**, $X^{[n]}$ **も非特異で**, **その次元は** $2n$ **である**.

(2) **正則写像** $\pi\colon X^{[n]} \to S^n X$ **が定義されて**, $X^{[n]}$ **は** $S^n X$ **の特異点解消になる**. *(***この写像*** π **を** *Hilbert-Chow* **写像と呼びます***.)*

対称積 $S^n X$ は, 点の重複度によって stratify されます. 対称積の点を和の記号 $\sum m_i[x_i]$ で表わすことにします. このとき n の分割$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対して,

$$S^n_\lambda X = \left\{ \sum_i \lambda_i [x_i] \,\middle|\, x_i \text{ 達は, 互いに相異なる } X \text{ の点} \right\}$$

と定義すると,

$$S^n X = \bigcup_{\lambda \text{ は } n \text{ の分割}} S^n_\lambda X$$

となります. このとき, 次の事実も知られています.

事実 1.2 (Briançon). *(1) Hilbert-Chow* **写像** $\pi\colon X^{[n]} \to S^n X$ **は**, **上の** *stratification* **に関して**, *semi-small* **である**. **すなわち**, **各** *stratum* $S^n_\lambda X$ **上で** π **は**, *fiber bundle* **であり**, $C \in S^n_\lambda X$ **のとき**

$$2 \dim \pi^{-1}(C) \leq \operatorname{codim} S^n_\lambda X$$

が成り立つ. **より強く**, **上の** $\leq$ **は** $=$ **が成り立つ**.

(2) **各** $C \in S^n_\lambda X$ **に対して**, $\pi^{-1}(C)$ **は既約である**.

特に, $C = n[x] \in S^n_{(n)} X$ と一点に集中している場合を考えると, C を含む stratum は, X 自身に同型で複素 2 次元であり, 余次元は $2(n-1)$ ですから, その fiber $\pi^{-1}(C)$ は $n-1$ 次元ということになります. そして上の (2) より既約であるわけです. 実は, この特別な C の場合に証明しておけば一般の場合も上の事実が成り立つことが容易に分かります.

Weyl 群の Springer 表現に詳しい方は, Springer 特異点解消

$$P\colon \text{旗多様体の余接束} \to \text{巾零多様体}$$

が semi-small であり, その性質を用いて Borho-MacPherson が P の fiber のホモロジー群と巾零軌道の交叉ホモロジー群の間の関係を書いたことはよくご存じのことだと思います. Borho-MacPherson の議論を用いることによって Göttsche-Soergel[7] は, Hilbert-Chow 写像が semi-small であることと, fiber が既約であること, そして $S^n_\lambda X$ の閉包の交叉ホモロジー群が通常のホモロジー群と同型であることを組み合わせることによって, 次の Poincaré 多項式に関する公式を導きました. (最初に Göttsche[6] が Weil 予想を用いて証明しました.)

事実 1.3 ([6, 7]). $X^{[n]}$ **の** *Poincaré* **多項式** $P_t(X^{[n]})$ **の母関数は次の式で与えられる**.

$$\sum_{n=0}^\infty q^n P_t(X^{[n]}) = \prod_{m=1}^\infty \frac{(1+t^{2m-1}q^m)^{b_1(X)}(1+t^{2m+1}q^m)^{b_3(X)}}{(1-t^{2m-2}q^m)^{b_0(X)}(1-t^{2m}q^m)^{b_2(X)}(1-t^{2m+2}q^m)^{b_4(X)}}.$$

但し, $b_i(X)$ **は** X **の第** i **次** *Betti* **数である**.

Springer 特異点解消に出てくる旗多様体の余接束は, 余接束としてシンプレクティック形式を持ちます. Hilbert scheme は余接束ではないのですが, 次の事実が知られています.

事実 1.4 (Fujiki [5], Beauville [1]). *X がシンプレクティック形式を持つとき, $X^{[n]}$ もシンプレクティック形式を持つ.*

対称積 S^nX の非特異な部分 $S^n_{(1^n)}X$ は, X のシンプレクティック形式から誘導される自然なシンプレクティック形式を持ちますが, これを Hilbert-Chow 写像 π で引き戻したものを考えます. もしも, これが$\pi^{-1}(S^n_{(1^{n-2}2)})$ を足した集合まで伸びることが証明できれば, その補集合の余次元が 2 以上なので, $X^{[n]}$ 全体に伸びることが分かります. さらに, $\pi^{-1}(S^n_{(1^{n-2}2)})$ の様子は, 最初に $X^{[2]}$ を説明したことから想像がつくように, 具体的に分かるので, ここまで伸びていることはすぐに分かります.

この事実はあとで必要になるというものではないのですが, $X^{[n]}$ は大切な空間であるという心の支えになってくれます.

この章の最後に, $X = \mathbb{C}^2$ 上の点の Hilbert scheme の行列による記述を説明しましょう. $\mathbb{C}^2$ は, アファイン多様体なので部分スキームは, 座標環すなわち二変数多項式環 $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ のイデアルと同一視されます. 特に, $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ の点は, イデアル $I \subset \mathbb{C}[z_1, z_2]$ で $\mathbb{C}[z_1, z_2]/I$ の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての次元が n であるものの全体に一致します. そこで, n 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}[z_1, z_2]/I$ を V と置き, z_1, z_2 を掛けることが V に誘導する線形写像を B_1, B_2 と定義します. さらに $i\colon \mathbb{C} \to V$ を $i(1) = 1 \bmod I$ によって定義します. このとき次が成り立ちます.

命題 1.5. *$(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ と, 次の性質を満たす (B_1, B_2, i) の三つ組みの全体を $\mathrm{GL}(V)$ の自然な作用で割った商空間は同型である.*

1. $[B_1, B_2] = 0$
2. *B_1, B_2 で不変な V の部分空間 S で $i(1)$ を含むようなものは, V 自身だけである. すなわち, $i(1)$ は cyclic vector である.*

上のようにして定義された (B_1, B_2, i) が命題の性質を満たすことは, 明らかでしょう. 逆に命題の性質を満たす (B_1, B_2, i) が与えられたとき,

$$I = \{f(z_1, z_2) \in \mathbb{C}[z_1, z_2] \mid f(B_1, B_2)i(1) = 0\}$$

によってイデアル I を定めれば, $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ の点が定まり, これで一対一対応が定義されます.

この記述を用いると, Hilbert scheme の性質が行列を用いて調べられます. 例えば, 相異なる n 個の点

$$\{(z_1^1, z_2^1), \ldots, (z_1^n, z_2^n)\}$$

に対応するのは, B_1, B_2 が同時対角化可能なもので

$$B_1 = \begin{pmatrix} z_1^1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & z_1^n \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} z_2^1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & z_2^n \end{pmatrix}, \qquad i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります. 一般には, B_1, B_2 は互いに交換可能なのですが, 同時に対角化は出来ないような行列が出てきて, 複雑になります. しかし $n = 2$ の場合にはどんなものが出てくるかは

容易に分かって, 上のタイプのもの以外は,

$$B_1 = \begin{pmatrix} z_1 & \alpha \\ 0 & z_1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} z_2 & \beta \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}, \qquad i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書けます. このとき, $[\alpha : \beta]$ が, (z_1, z_2) における接空間の一次元部分空間を定めているので, 最初に説明した $(\mathbb{C}^2)^{[2]}$ の記述が再確認されます. また, 同時対角化, もしくは同時 Jordan 標準型化は出来るとは限らないのですが, 同時三角化は必ず出来て, そのときの固有値を並べることで, Hilbert-Chow 写像が与えられます.

このように Hilbert scheme の複雑さは, 交換可能な行列の複雑さと同じもので, あまり恐がらなくても大丈夫だ, と言えると思います.

また, 上のような行列による表示は, 箙多様体と非常に似ています. 実際, 上の記述は, Hilbert scheme が一つの頂点と, 頂点とそれ自身を結ぶ辺からなる図式 1 に対応する箙多様体であると言うことができます. この場合は, Kac-Moody Lie 環に対応しないのですが, 幾何学的な性質は, 通常の箙多様体と同様に調べることができます.

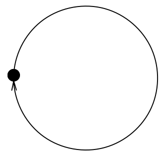

Figure 1. Hilbert scheme に対応する図式

2. Hilbert scheme のホモロジー群と Heisenberg 代数

Göttsche の Poincaré 多項式の母関数の公式を見直してみると, よく見た公式に似ていることに気付くと思います. t のべきがついているので見難いですが, Dedekind のη関数の $q^{1/24}$ を除いたものが分母に見えています. また affine Lie 環に詳しい方ならすぐ気付くとおり, 分母に見えているのは, 無限次元 Heisenberg 代数の表現空間 (すなわちボゾンの Fock 空間) の指標であり, 分子にあるのは無限次元 Clifford 代数の表現空間 (すなわちフェルミオンの Fock 空間) の指標です. これに最初に気付いたのは誰なのか, よく分かりませんが, 私は, Vafa-Witten の論文 [11] でこれを知りました.

そこで, 前に箙多様体のホモロジー群に Kac-Moody Lie 環の表現を構成したことを思い出して, Hilbert scheme のホモロジー群に, 無限次元 Heisenberg/Clifford 代数の表現を作れないかと考えたわけです. やってみれば, 意外に簡単に出来てしまいました. それを説明します.

Hilbert scheme の積 (の disjoint union) の中に次で定義される subvariety $P[i]$ を考えます. $i > 0$ のとき

$$P[i] = \coprod_n \{\, (\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \in X^{[n-i]} \times X^{[n]} \mid \mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2 \text{が成り立ち,}$$
$$\text{ある点 } x \text{ があって} \operatorname{Supp}(\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_2) = \{x\} \text{ となる} \,\}$$

と置き, $i < 0$ のときは $\mathcal{J}_1$ と $\mathcal{J}_2$ を入れ替えます. $i = 0$ のときは定義しません. 点 x を対応させることによって, 写像 $\Pi\colon P[i] \to X$ が定義されます. また, Hilbert-Chow 写像が

semi-smallであることを用いると, $P[i]$ の $X^{[n-i]} \times X^{[n]}$ 成分の次元は $2n - i + 1$ 次元であることが証明されます.

X のホモロジー群を $H_*(X)$ とし, 局所有限なチェインから出来るホモロジー群を $H_*^{lf}(X)$ と置きます. (X がコンパクトなら, 両方とも同じで通常のホモロジー群に他なりません.) そこで $i > 0$ のときには, $\alpha \in H_*^{lf}(X)$, $i < 0$ のときには $\alpha \in H_*(X)$ を取って,

$$P_\alpha[i] = \Pi^* \alpha \cap [P[i]]$$

とおきます. このとき supportがコンパクトかどうかに注意すると, 写像

$$H_*(X^{[n]}) \ni c \mapsto p_{1*}(P_\alpha[i] \cap p_2^* c) \in H_*(X^{[n-i]})$$

が定義されます. p_1, p_2 は, $X^{[n-i]} \times X^{[n]}$ における第一成分, 第二成分への射影です. 以下では, α はどちらのホモロジー群の元も表わすことにし, $P_\alpha[i]$ と書かれたときには, $i > 0$, $i < 0$ に応じてどちらのホモロジー群の元であることを暗黙の了解とします. 上でホモロジー群の次数をはっきりさせませんでしたが, 次数 $2n + k$ の部分が $2(n - i) + k + \deg \alpha - 2$ 次の部分に移されます. つまり中間次元からのずれ k が $k + \deg \alpha - 2$ と代わります. 特に $\deg \alpha = 2$ ならば中間次元からのずれは保たれます. また, n に関して直和を取り,

$$\bigoplus_n H_*(X^{[n]})$$

の線形変換が定義されますが, これを記号 $P_\alpha[i]$ で表わしてしまうことにします. このとき, 次の関係式が成り立つことが分かります.

定理 2.1 (Nakajima [9], Grojnowski [8])**.**

$$P_\alpha[i] P_\beta[j] - (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} P_\beta[j] P_\alpha[i] = (-1)^{i-1} i \delta_{i+j,0} \langle \alpha, \beta \rangle \operatorname{id}$$

ここで, $\langle \alpha, \beta \rangle$ は α と β の交叉数で, 両方が $H_*^{lf}(X)$ の元だと定義出来ませんが, $\delta_{i+j,0}$ という項があるので, 片一方が $H_*(X)$ でもう片一方が $H_*^{lf}(X)$ のときにしか出て来ないことに注意しましょう.

最初にこの定理の証明を与えたときには, $(-1)^{i-1} i$ の部分は, i だけ (特に X や α, β には無関係) で決まる定数であることだけしか分かりませんでしたが, 後に Ellingsrud-Strømme [3] が求めてくれました.

この定理の証明は, その部分を除けば初等的で単に交叉を計算すれば出てきます. $(-1)^{i-1} i$ を決めるところも基本的にはそうなのですが, i に関する帰納法が必要になってきます. 次の章で別証明について述べますが, これも帰納法が必要です.

3. 対称多項式との関係

さて, 曲面 X の中に曲線 C が入っているとし, C の定めるホモロジー類 $[C]$ に対応する作用素 $P_{[C]}[i]$ を考えます. 一方, 曲線 C の上の n 個の点のなす Hilbert scheme $C^{[n]}$ は対称積 $S^n C$ と同型ですが, これは自然に $X^{[n]}$ の subvariety と思うことが出来ます. その表わすホモロジー類 $[S^n C] \in H_{2n}(X^{[n]})$ を考えましょう. このとき次が成り立ちます.

定理 3.1. **C の対称積 S^nC の表わすホモロジー類 $[S^nC]$ の母関数は，$P_{[C]}[i]$ を用いて次の式で与えられる．**

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n[S^nC] = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i P_{[C]}[-i]}{(-1)^{i-1}i}\right) \cdot 1$$

但し，1 は，$H^0(X^{[0]}) = H^0(pt)$ の *canonical* な生成元である．

特に，$P_{[C]}[-i]$ がべき和 $p_i = \sum_m x_m^i$ に対応するようにホモロジー群と対称多項式を対応させると，上の式は，$[S^nC]$ が n 次の elementary symmetric function e_n に対応するということを示しています．

上の式の証明には，monomial symmetric function m_λ

$$m_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\alpha \in S_N \lambda} x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$$

に対応するホモロジー群まで考えて，それらに対して次数と支配順序に関する帰納法で，対称多項式と対応することを証明します．詳しいことは，[10] にゆずります．

この議論の応用として，前の章で述べた $(-1)^{i-1}i$ が次のように決定されます．$X = \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ とし，$C = \text{line}$ として，$P_{[C]}[i][S^nC]$ の交点数を考えます．C を少し動かしてもう一つ別の line C' を取ってみるとすぐ分かるように，これは $[S^{n-i}C]$ で与えられます．この式と上の母関数を見比べて，ちょこっと計算すれば定数が $(-1)^{i-1}i$ であることが容易に分かります．

References

[1] A. Beauville, *Variété kählriennes dont la première classe de Chern est nulle*, J. of Differential Geom. **18** (1983), 755–782.

[2] G. Ellingsrud and S.A. Strømme, *On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane*, Invent. Math. **87** (1987), 343–352.

[3] ______, *An intersection number for the punctual Hilbert scheme of a surface*, preprint, alg-geom/9603015.

[4] J. Fogarty, *Algebraic families on an algebraic surface*, Amer. J. Math. **90** (1968), 511–521.

[5] A. Fujiki, *On primitive symplectic compact Kähler V-manifolds of dimension four*, in "Classification of Algebraic and Analytic Manifolds", K.Ueno (ed.), Progress in Mathematics, Birkhäuser **39** (1983), 71–125.

[6] L. Göttsche, *The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface*, Math. Ann. **286** (1990), 193–207.

[7] L. Göttsche and W. Soergel, *Perverse sheaves and the cohomology of Hilbert schemes of smooth algebraic surfaces*, Math. Ann. **296** (1993), 235–245.

[8] I. Grojnowski, *Instantons and affine algebras I: the Hilbert scheme and vertex operators*, Math. Res. Letters **3** (1996), 275–291.

[9] H. Nakajima, *Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces*, to appear in Ann. of Math.

[10] ______, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, (to appear).

[11] C. Vafa and E. Witten, *A strong coupling test of S-duality*, Nucl. Phys. **431** (1994), 3–77.