CONVERGENCE OF EINSTEIN METRICS AND BUBBLING OFF OF ALE SPACES

東京大学理学部　中島　啓 (Hiraku Nakajima)

§1. 動機付け

私は幾何学者であるので，偏微分方程式それ自体と言うよりもむしろ，解析学と幾何学の interplay に興味を持っている。幾何学には自然に現われるいくつかの偏微分方程式があるが，Hodge theory をはじめとしてそのどれもが深い幾何学的内容と結びついている。例えば私は index theorem は今世紀後半の幾何学の中ではいちばん深い定理であると思っている。また最近は非線形方程式もかなり扱えるようになってきたので，Donaldson の仕事に代表されるようなすばらしい応用が次々と出ている。ここでは Einstein metric について述べるが，その応用などを全て網羅することは不可能なので，必要最小限の動機付けを説明したあとに Main Theorem を述べるにとどめる。幾何学的な内容に立ち入れないのはたいへん残念なことである。

なお Main Theorem は板東さん，加須栄さんとの共同研究[BKN] によるものである。

X を first Chern class が正の compact Kähler 多様体とする。X の上に Einstein-Kähler metric が存在するかという問題を考える。すなわち　$g = (g_{i\bar{j}})$　を与えられた Kähler metric として次の Monge-Ampére 方程式を解くことを考える。

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&\det\left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right) = \det(g_{i\bar{j}})\exp(F - u)\\
&\left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right) > 0.
\end{aligned}
$$

但し F は，X 上のある C^∞ 関数で $g_{i\bar{j}}$ から定まる。ここで上の方程式は楕円型ではあるが，右辺の u に関する微分が負であるから，最大値原理が使えず C^0-estimate が難しいタイプであることに注意しよう。(すなわち $\Delta u + u = 0$ と同じタイプと言うこと)

さて上の方程式を continuity method で解くことにして，次の方程式の 1-parameter family を考える。

$$
(1_t)\qquad
\begin{aligned}
&\det\left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right) = \det(g_{i\bar{j}})\exp(F - tu)\\
&\left(g_{i\bar{j}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right) > 0.
\end{aligned}
$$

$S = \{t \in [0,1] \mid (1_t)$ が解を持つ。$\}$ とすると，S が 0 を含む開集合であることが分かるので，あとは閉集合であることを示せば $(1_{t=1}) = (1)$ が解を持つことが従う。すなわち (1_t) の解の *a priori* 評価をすることになる。しかし松島の定理や二木の不変量などの Kähler-Einstein metric の存在に対する幾何学的な obstruction があること

が知られているので (例えば[F] を見よ。)，一般の first Chern class が正の compact Kähler 多様体で (1) を解くことはできない。言い替えれば，(1_t) の評価をしようとしても (実際には C^0-評価をすれば，$C^{2,\alpha}$-評価が従うことが分かっている)t が十分に 1 に近いところでは，なんらかの条件を置かなければ不可能である。このなんらかの条件というものがくせ者で，幾何学的な条件であるので，それを解析的な評価まで結びつけるところにこの問題の難しさがある。

今のところ，こういった問題に対するアプローチの方法はあまり多くない。stable vector bundle 上の Einstein-Hermitian metric の存在という同じような性格を持っている問題が Uhlenbeck-Yau[UY] によってどのように解かれたか，振り返ってみよう。

$E \to X$ をコンパクトな Kähler 多様体 X 上の irreducible holomorphic vector bundle とする。$h = (h_{\alpha\overline{\beta}})$ を E 上の Hermitian metric とするときに (α, β は，bundle の index) 次の方程式を考える。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,\overline{j},\overline{\beta}} g^{i\overline{j}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \left(h^{\alpha\overline{\beta}} \frac{\partial}{\partial z_i} h_{\beta\overline{\gamma}} \right) = F_{\alpha\overline{\gamma}} \\
&(h_{\alpha\overline{\beta}}) > 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

但し $(h^{\alpha\overline{\beta}})$ は $(h_{\alpha\overline{\beta}})$ の逆行列，$F = (F_{\alpha\overline{\beta}})$ は X 上のある C^∞ 行列値関数で $h_{\alpha\overline{\beta}}$ から定まる。上と同じように方程式の 1-parameter family を考える。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,\overline{j},\overline{\beta}} g^{i\overline{j}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \left(h^{\alpha\overline{\beta}} \frac{\partial}{\partial z_i} h_{\beta\overline{\gamma}} \right) - (1-t)(\log h)_{\alpha\overline{\gamma}} = F_{\alpha\overline{\gamma}} \\
&(h_{\alpha\overline{\beta}}) > 0.
\end{aligned} \tag{2_t}
$$

但し log は，正値対称行列に対する対数である。(2_t) が $t < 1$ に対して解を持つことは容易に分かる。よって $t \to 1$ のときに (2_t) の解が $(2_{t=1}) = (2)$ の解に収束することが示されればよい。このためには，(2_t) の解に対して *a priori* 評価を得ればよい。しかし，E が Einstein-Hermitian metric を持てば stable であることが小林[Ko] によって示されているので，一般にはこれは不可能である。そこで Uhlenbeck-Yau は，*a priori* 評価ができないと仮定して解が爆発するときの状況を精密に見た。そして $(h_{\alpha\beta})$ が退化した計量に収束して，その退化する部分空間で定まる E の subsheaf が E の stability の条件に反することを示したのであった。

こうして，irreducible holomorphic vector bundle E が Einstein-Hermitian metric を持つことと stable であることは同値であることがわかったわけである。stable という条件は完全に代数幾何的な条件で，(2) という偏微分方程式が解けるかどうかという解析的な条件には一見何の関係もありそうにない。それが解の爆発を調べるという深い考察によって結びついたわけである。私はこの定理を思い起こすたびにその美しさと深い内容に，感銘する。そしてまた Einstein-Kähler metric に対しても同じようなことができるならば，それはたいへんすばらしいと考えるわけである。

しかし，(1_t) の解の挙動を調べることは Monge-Ampére 方程式の interior estimate がないために難しい。またそれにもましての困難は Einstein-Kähler metric が存在するための必要十分条件が，いま現在知られている obstruction が満たされるだけであるとはとても想像されないことである。(Einstein-Hermitian metric の時には stability が必要十分であると想像できるような heuristric な議論があった。) 従ってまず始めにするべきことは，heuristic でもなんでもよいから，解の爆発が起こらないことが説明できるような必要条件 (もちろん幾何学的な条件でなければ意味がない) を見いだすことである。そうは言っても上に言ったように Monge-Ampére 方程式の解の爆

発を調べるのは苦しそうなので，まずは Einstein metric それ自体が，例えば多様体の複素構造が退化したときにどうなるか，解の爆発の様子を調べて感じをつかみたいというわけである。しかもそれは，独立の問題としても複素解析学との境界領域にあって二つの分野の絡み合いが非常に面白いのである。

一言注意して置くと，Einstein metric の存在に対していわゆる変分法はほとんど無力である。その理由は今から述べるように，もし弱解を考えるとすると多様体という category か出なければならないからである。むしろ continuity method でアプローチしたほうが，解の爆発の様子が調べやすいわけである。または heat equation の解の爆発をしらべてもよい。

§2. Einstein metric の収束

定理を述べる前に Riemannian manifold の曲率について必要なことを素人向けに説明しよう。Levi-Civita connection を ∇ とするとき，曲率 R は $(3,1)$-型のテンソルで次式で定義される。

$$R(s,t)u = \nabla_s \nabla_t u - \nabla_t \nabla_s u - \nabla_{[s,t]} u$$

tangent vector t, u を fix して，$R(\cdot,t)u$ を tangent space 上の線型変換と思ってその trace を $\mathrm{Ric}(t,u)$ と書く。Ric は対称であることがすぐにわかる。さらに Ricci 曲率の trace をスカラー曲率といって S で表す。metric g が Einstein metric であるとは，$\mathrm{Ric}\, g = kg$ がある定数 k に対して成り立つことに他ならない。ある座標 $(x^1,\dots,x^n)$ をとって Ricci 曲率を表すと

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k,l} g^{kl}\left\{\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^j}\right\} + Q_{ij}(g,\partial g)$$

となる。但し $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$，$g^{ij}$ は g_{ij} の逆行列，Q_{ij} は g と ∂g の関数で ∂g に対しては homogeneous で 2 次である。R_{ij} を metric g に関する二階の偏微分作用素と考えると，$\mathrm{Ric} = kg$ は二階の偏微分方程式というわけだが，楕円型ではない。それは曲率テンソル R が diffeomorphism φ に対して不変である $(\varphi^* R_g = R_{\varphi^* g})$ ことの反映である。事情は Yang-Mills connection の方程式が楕円型にならないこととまったく同様で，Yang-Mills connection の場合は Coulomb gauge と呼ばれる特別の local trivialization をとって方程式を書いて楕円型にするのだが，Einstein metric の場合に対応するのは harmonic coordinate と呼ばれる特別な座標系である。

定義． 座標系 $(x^1,\dots,x^n)$ が metric g に関する harmonic coordinate であるとは，$\Delta x^i = 0$ が成り立つときをいう。但し Δ は g のラプラシアンである。

harmonic coordinate の下では Ricci 曲率は

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} g^{kl}\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} + \text{lower order terms}$$

で与えられ，Einstein metric の方程式は楕円型になる。いかなる Riemannian metric に対しても定義域を十分に小さくとれば harmonic coordinate がとれる。しかし Einstein metric の収束を調べたいときや，*a priori* 評価をしたいときには，harmonic coordinate の定義域の大きさまで評価しなければならない。実際に次に見るように，一般には，Einstein metric の列で harmonic coordinate の定義域がどんどん小さくなってしまうことがあり得る。

complete な多様体の topology が曲率の情報から制限を受けることは，微分幾何学の様々な定理の形で知られているが，その場合曲率テンソル R の情報が一番強く，順に Ric，S となる。例えば R が定曲率であるとすると (すなわち $R(s,t)u = k\{g(t,u)s - g(s,u)t\}$) その多様体は球面 S^n，Euclid space $\mathbb{R}^n$，hyperbolic space H^n のどれかの離散群による商空間に isometric である。それに対し Ric が定数すなわち Einstein metric の存在するための topological な restriction は，Ric が正であるための restriction を除くと，4 次元において Hitchin の不等式が知られているにすぎない。多様体の収束を扱うときには $\|R\|$ と単射半径の評価があれば，望むべきことは全てできると思ってよろしい。従って Einstein metric の収束を調べるときの point は，方程式を使っていかにこれらの評価を導くかにある。

さて主定理の前半を述べる。

定理. (X_i, g_i) を n 次元の compact smooth manifold とその上の Einstein metric で Einstein constant が k (± 1, or 0) であるものの列で，さらに次の条件を満たすとする。

$$\operatorname{diam}(X_i, g_i) \leqq D, \quad \operatorname{vol}(X_i, g_i) \geqq V, \quad \int_{X_i} |R_{g_i}|^{n/2} dV_i \leqq R$$

但し D, V, R は正定数である。このとき部分列 $\{j\} \subset \{i\}$ と compact orbifold X_∞ (有限個の点からなる singular set を $S = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X_\infty$ (possibly empty) とする) とその上の orbifold Einstein metric g_∞ で，次を満たすようなものが存在する。

$X_\infty \setminus S$ から X_j への中への diffeomorphism F_j があって，$F_j^* g_j$ は g_∞ に $X_\infty \setminus S$ 上，広義一様 C^∞ 収束する。

但し，ここで orbifold とその上の orbifold metric といったときには，

1) $X_\infty \setminus S$ は C^∞-manifold で，g_∞ の制限はその上の Riemannian metric である。
2) 各 singular point x_l のまわりにある近傍 N_l が存在し，$N_l \setminus \{x_l\}$ は $B^n(1) \setminus \{0\}/\Gamma$ と diffeo であり (Γ は $O(n)$ のある有限部分群で $B^n(1) \setminus \{0\}$ に free に作用するもの)，$N_l \setminus \{x_l\}$ の universal cover へ metric g を lift すると $B^n(1)$ に原点 0 を越えて滑らかに拡張される。(Γ は l に依存しても構わない。)

($B^n(1)$ は n 次元の単位球である。)

注意.

1) Einstein constant が 1 の時には，Meyers の定理から直径に関する仮定 $\operatorname{diam}(X_i, g_i) \leqq D$ は自動的に成り立つ。
2) 次元 n が 4 の時には，Chern-Weil theory と Einstein metric の曲率の形から仮定 $\int_{X_i} |R_{g_i}|^{n/2} dV_i \leqq R$ は，X_i のオイラー数が有界という topological な仮定と同値である。

例を挙げよう。

例 (Page[Pa]，小林-Todorov[KT]). X_∞ を 2 次元複素トーラス $T^2 = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$ を群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で割ってできた orbifold とする。但し $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は T^2 に

$$-1\colon (z_1, z_2) \bmod \mathbb{Z}^4 \longmapsto (-z_1, -z_2) \bmod \mathbb{Z}^4$$

として作用する。T^2 上の自然な metric は X_∞ 上の orbifold metricg_∞ を定め，g_∞ は orbifold Einstein metric である。また $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用は正則なので，(特異点を持った) 複素多様体の構造を持つ。その最小の特異点解消を $\pi\colon X \to X_\infty$ とする。X は

Kummer surface と呼ばれ，K3 surface の一種である。$\{x_1, \dots, x_{16}\}$ を特異点集合として，$E_1, \dots, E_{16}$ を例外集合とする。Yau による Calabi conjecture の解決により，X 上の任意の Kähler class に unique に Ricci-flat Kähler metric が存在する。そこで Ricci-flat Kähler metric の列 g_i を次のように取る。

1) X の g_i に関する体積は全て 1 に等しい。
2) 各 E_n $(n = 1, \dots, 16)$ の g_i の制限の metric に関する体積は $\frac{1}{i}$ に等しい。

すると $i \to \infty$ のとき metric g_i は各 E_n に沿って退化し，$X \setminus \cup E_n$ では $\pi^* g_\infty$ に収束する。$X \setminus \cup E_n$ は π を通じて $X_\infty \setminus \{x_1, \dots, x_{16}\}$ に diffeomorphic だから，これは定理の例を与える。

注意すべきことは，極限としてとらえるべきものは $\pi^* g_\infty$ ではなく，(X_∞, g_∞) である，ということである。従ってひとつの多様体を固定して，それに固執することは，無意味である。実際，定理の証明も Gromov や Peters, Greene-Wu による多様体の family の上の Hausdorff 距離の理論を用いて行なわれる。

定理の証明の解析的な部分は，他の幾何学に現われる変分問題の場合とほとんど同じである。Sacks-Uhlenbeck の harmonic map の存在定理[SU]，Uhlenbeck の Yang-Mills connection の compactness theorem[U]，Brezis-Coron の H-surface の収束の理論[BC] などがその例である。これらの問題を一般的に取り扱うような理論を構成することは難しいと思うが，少なくとも解析的な部分については，ひとつの問題に対して得られた結果を他の問題に期待することは自然である。唯一つ異なるところは，subharmonic function に関する *a priori* 評価をするときに (X_i, g_i) の ball B_r における Sobolev constant

$$\inf\{\frac{\|\nabla f\|_{L^1}}{\|f\|_{L^{4/3}}} \mid f \in C_0^\infty(B_r)\}$$

が i によらず一様に評価されることを用いる。直径，体積の有界性の仮定はここで用いられる。

§3.Bubbling off of ALE spaces

さらに収束の様子を詳しく調べるために，singular point のまわりで metric を rescaling して browup する。これは他の問題の時と同じ idea である。まず言葉を用意する。

定義. Riemannian manifold (M, g) が *asymptotically locally Euclidean* (ALE) of order τ であるとは，あるコンパクト集合 $K \subset X$ と有限部分群 $\Gamma \subset SO(4)$ と $X \setminus K$ 上定義された C^∞-diffeomorphism $\mathcal{X}: X \setminus K \to (\mathbb{R}^4 \setminus \overline{B_R})/\Gamma$ が存在して，metric g が座標 $\mathcal{X}$ で次のように表せることである。

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + a_{ij}(x) \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}^4 \setminus \overline{B_R},$$

但し，a_{ij} は次を満たす。

$$|\overbrace{\partial \cdots \partial}^{p \text{ times}} a_{ij}(x)| = O(|x|^{-p-\tau}) \qquad \text{for } p = 1, 2, 3, \cdots.$$

さて定理を述べよう。

定理. (X_j, g_j)，(X_∞, g_∞)，S を前定理と同様とする。このとき各 singular point x_l に対して n-dimensional Ricci-flat manifold (M_l, h_l) で ALE of order $n-1$ であって次を満たすものが存在する。

発散する正数列 $\{r_j\}$ を適当にとると，M_l から X_j への中への diffeormorphism G_j が存在して，rescale された metric の引き戻し $G_j^*(r_j g_j)$ が h_l に収束する。

もう少し詳しく説明しよう。§2 で述べたように metric g_j は次第に退化していく。このときその曲率の絶対値 $\|R_{g_j}\|$ は退化するところで ∞ に発散する。x_l での R_{g_j} の値を r_j とおく。(x_l は X_∞ の点であって X_j の点ではないからこれは意味がない。正確には，X_j の点で "ある意味で"x_l に収束する点のことである。) metric g_j を r_j 倍に拡大して $r_j g_j$ を考えると，x_l での曲率の値は 1 に normalize されている。丁度 x_l の非常に小さな近傍の様子を顕微鏡でみたという感じである。曲率が有界になっているから多様体が収束することは期待されるが，今度は直径が∞に発散してしまうから，compact な多様体が極限になることは期待できない。そこで極限になるのは noncompact な ALE manifold というわけである。

noncompact な多様体にはいろいろあるのに現れるものが ALE manifold だけになるのは不思議に思われるかも知れない。実は次の定理から導かれるのである。

定理. complete, noncompact な n 次元多様体が次の条件を満たすとき ALE of order $n-1$ である。

$$\mathrm{Ric} = 0, \quad \mathrm{vol}\, B_t(o) \geqq V t^n \quad \text{for some } o \in M, V > 0,$$
$$\int_M |R|^{n/2} dV_g < \infty.$$

体積の増大度に関する条件は M 上で Sobolev の不等式が成り立つと置き換えてもいい。

$$\inf\{\frac{\|\nabla f\|_{L^1}}{\|f\|_{L^{4/3}}} \mid f \in C_0^\infty(M)\} < \infty.$$

上の定理は，解析で言うところの entire solution の分類と言ったものに対応すると思うが，証明は純粋に解析的な部分の他に幾何学的な考察，特に加須栄さんの noncompact manifold の精細な研究[K] が重要であった。

§4. まとめ

以上の考察から始めに考えた Kähler-Einstein metric の存在の問題に対するアプローチが開けたであろうか? まず多様体の次元が複素 2 次元のとき，我々の結果を用いることにより存在定理が Tian[T] によって得られたこと報告しよう。しかし残念ながら Tian の証明はかなり 2 次元の特殊性を使っていて，高次元に拡張する望みは薄いものと思われる。我々の結果も n 次元を扱っているようであるが実際に本当に役に立つのは real 4 次元のときだけである。しかし想像するのは自由であって，高次元でも同じような結果が成立して，方程式の解の爆発の様子のすくなくとも一端は捉えているのではないかと期待するわけである。実際筆者及び板東さんは，向井さんとの議論の中から高次元でも意味を持つようなある一つの予想を得たのであるが，今現在証明からは遠いのが実情である。(GIT と関連する。)

問題は代数幾何学，微分幾何学，解析学の境界領域にあり，その全ての深い考察によってはじめて解かれることだけは間違いなさそうである。

また最近 Nadel が新しいアプローチを発見しているが，これは我々の予想の見地からすると，既存のアプローチよりはだいぶいい所まで行っている。しかし目標からはまだまだである。

References

[BKN] S.Bando, A.Kasue and H.Nakajima, *On a construction of coordinate at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth*, Invent. Math. **97** (1989), 313–349.

[BC] A.Brezis and J.Coron, *Convergence of solutions of H-systems or how to blow bubbles*, Arch. Rational Mech. Anal. **89** (1985), 21–56.

[F] A.Futaki, Springer.

[Ka] A.Kasue, *A compactification of a manifold with asymptotically nonnegative curvature*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup, **21** (1988), 593–622.

[KT] R.Kobayashi and A.Todorov, *Polarized period map for genaralized K3 surfaces and the moduli of Einstein metrics*, Tôhoku Math J. **39** (1987), 145–151.

[Ko] S.Kobayashi, *Curvature and stability of vector bundles*, Proc. Japan Acad. **58** (1982), 158–162.

[P] D.Page, *A physical picture of the K3 gravitational instantons*, Phys. Lettr. Ser. B **80** (1978), 55–57.

[SU] J.Sacks and K.Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. of Math. **113** (1981), 1–24.

[T] G.Tian, *On Calabi's conjecture for complex surfaces with positve first Chern class*, preprint.

[U] K.Uhlenbeck, *Connection with L^p-bounds on curvature*, Comm. Math. Phys. **83** (1982), 31–42.

[UY] K.Uhlenbeck and S.T.Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Comm. in Pure and Appl. Math. **39(S)** (1986), 258–293.