中島 啓 (東京大学数理科学)

1. 序

一昨年および昨年に 4 次元のゲージ理論 (特にトポロジーへの応用) は様相を一変させました. その契機となったのは, Seiberg-Witten という物理学者による "双対性" の研究でした. これは 70 年代に発見された Olive-Montonen の "電気-磁気双対性予想" を $N = 2$ の超対称 Yang-Mills 理論に適応するように modify したものです. この研究を通じて SU(2) インスタントン方程式の双対であるところの U(1) モノポール方程式が発見されて, Donaldson 理論では主に技術的な理由で困難であった数々の問題が次々と解かれていきました. また純粋に物理的な動機づけからも "双対性" は $N = 2$ の超対称 Yang-Mills 理論だけでなく, 様々な弦理論について活発に研究されています.

これらの "双対性" において実は, ゲージ群は, Langlands dual に変えなければなりません. また, なぜだか理由はよく分かりませんが[1]様々な場所に楕円曲線が顔を覗かせています. これらを聞いて Langlands 双対性を思いおこすのは私だけではないでしょう[2]. 今のところ登場人物が共通しているというだけで, これからどう発展していくのか海のものとも山のものとも分かりませんが, Langlands 双対性の高次元化への第一歩として考えて見たらどうだろうかと思います[3].

さて, Langlands 双対性を念頭において, モジュラー形式の対応物としてインスタントンのモジュライ空間のホモロジー群をとることにします[4]. 次に考えなければならない対象は, いささかこじつけ的であると思われるかもしれないが, "Hecke 環" です. §3 で局所大域原理と質量の類似を説明するときに詳しく述べますが, 高次元の理論である為に 4 次元多様体の中に埋め込まれた部分多様体に対応する Hecke 作用素も導入する必要がでてきます. するともとの Langlands 対応の場合と大きく異なることとして "Hecke 環" が非可換になります. その理由を標語的に言えば, 「リーマン面の上の二つの点は一般には交わらないが, 4 次元多様体の中の部分多様体は, 少々動かしても交わらないようには出来ない」からです.

この論説の内容に近い話しを賢島の Langlands 対応の研究会でしました. そちらの講演の記録を数理研の斎藤さんに作っていただく予定になっていますので, そちらのほうも合わせてご覧ください. また, [10] も参考にしてください.

[1]私だけが分かっていないという意味でなく, だれも分かっていないという意味です

[2]実際, Ginzburg-Kapranov-Vasserot も Langlands reciprocity for surfaces などと言い出しています. [4]

[3]同じく物理から動機づけられた双対性としてミラー対称性があり, 活発に研究されていることはご存じのことであると思います. ゲージ理論の双対性も活発に研究されてしかるべきと思いますがそうでもないことが残念です.

[4]インスタントンのモジュライ空間の上の何かを考えることは自然です. しかしホモロジー以上に精密な構造を取り扱うことは現在のところほとんど不可能であります.

多項式の成す Lie 環を central extension したものですが，これが 2 次元の理論，例えば共形場理論と馴染みやすいのは当然であります．ところがどう想像しても結び付きそうもない 4 次元の理論にも，何故か affine Lie 環が現れるわけです[6]．今のところ希望でしかありませんが，affine Lie 環が現れる理由と，“双対性”において楕円曲線が現れる理由は何らかの関係があることが分かればよいと思います．例えば 4 次元ゲージ理論の裏のどこかに (今はまだだれも見ることが出来ないが) 楕円曲線が隠れており，その上の共形場理論を通じて affine Lie 環が現れるということになると私は非常にうれしいです．

モジュラー形式の理論	4 次元多様体のゲージ理論
素数 = Spec $\mathbb{Z}$	4 次元多様体上の点や 部分多様体 C
モジュラー形式 の空間	インスタントンのモジュライ空間の ホモロジー群
Hecke 作用素	我々の Hecke 作用素
Hecke 環	affine Lie 環

一般の 4 次元多様体ではなく代数曲面しか扱っていない理由は，一般のときにはモジュライ空間を調べる方法がないという技術的なものですが，埋め込まれた部分多様体としては 0 と 2 次元のものしか考えていないのは，4 次元ゲージ理論において本質的な対象であるだろうからと思っています．もし，将来 Calabi-Yau 空間においても同じような考察ができる時代がくれば，実 3 次元の部分多様体が本質的な役割をはたすに違いありません．([11])

以上のようなわけで，現在までのところ理解したという状態からは程遠いのですが，ここでは幾つかの affine Lie 環が現れる例について，城崎では述べる時間のあまりなかった ALE 空間まで含めて紹介したいと思います．いわばこれらは，現象の理解を深めて行くための「実験」です[7]．理論を構築することは，今後の大きな課題としたいと思います．

弦理論の “双対性” について最近の動向を紹介することは私の能力をはるかに越えてしまいますので，私に取って一番分かりやすい $N = 4$ の超対称 Yang-Mills 理論 (場の理論であって弦理論ではない) における “双対性” を §2 でまず紹介します．これが以降の話しの動機づけとなります．そして，§3 において Langlands 哲学の根底にある局所大域原理と物理学における質量の概念の類似について述べます．これは，高次元 Langlands 哲学における Hecke 環の重要性を説明してくれるものと思います．この論説で数学の結果が述べられているのは §4,§5 だけで，

[5]Donaldson の定理によって代数曲面の場合にはインスタントンのモジュライ空間と同じ．但し安定なベクトル束のみを取ってくる必要があります

[6]そもそも affine Lie 環にたどり着いたのも一朝一夕ではありませんでした．私の動機は，Ringel と Lusztig の量子展開環の上三角部分の箙による構成を Kronheimer-Nakajima の ALE 空間上の ADHM 構成により理解することにありました．また Göttsche や吉岡くんがモジュライの Betti 数を計算して，そこに affine Lie 環の指標を発見しました．これら数々の状況証拠から今書いているような考えにいたったのです．

[7]この意味で私のやっていることは「実験数学」です

appendix に Heisenberg 代数と affine Lie 環についてまとめておきました. [7] の教科書の必要な部分だけを取り出してきたものです.

2. Vafa-Witten による $N=4$ 超対称 Yang-Mills 理論の双対性[8]

序で述べた "双対性" が顕著に現れる例として, $N=4$ の超対称 Yang-Mills 理論について紹介しましょう. "双対性" が成立することの意味は, Langlands 双対性では L 関数が一致することとして解釈されますが, 物理では分配関数が一致することとなります. しかし, 一般に分配関数を計算することは非常に難しいので, 70 年代から予想はあったもののなかなか意味のある根拠づけを与えることが出来ませんでした. Vafa-Witten [14] のアイデアは $N=4$ 理論で Lagrangian を少し modify してやることによって, 位相的な不変量を分配関数として書いてやり, それを計算してチェックするということでした.

X を向き付けられた 4 次元多様体 (とりあえず、コンパクトとします) とします. G を半単純コンパクト・リー群として, $G^\vee$ をその Langlands dual とします. G を構造群とする位相的なバンドル P を考えて, 対応する反自己双対接続のモジュライ空間を $\mathfrak{M}(P)$ とします. モジュライ空間のオイラー数 $\chi(\mathfrak{M}(P))$ の定める母関数を考えます.

$$Z(\tau, G) = q^{-\chi(X)/12} \sum_P q^{k(P)} \chi(\mathfrak{M}(P)); \qquad q = \exp(2\pi i \tau)$$

但し、$k(P)$ は、P のインスタントン数 (第二チャーン類みたいなものです) です. 一般には整数にはなりませんが, 例えば $G = \mathrm{SU}(2)$ なら整数ですし, $G = \mathrm{SO}(3)$ なら整数を 4 で割った有理数です. また、上の和は全てのバンドルを動かして取ります. (第一チャーン類と第二チャーン類を動かすと思ってください.) $\chi(X)$ は, X のオイラー数とします.

このとき, "双対性" は

$$Z(-\frac{1}{\tau}, G) = \pm \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\chi(X)/2} Z(\tau, G^\vee)$$

となることを予想します. 一般に G と $G^\vee$ は異なるので注意が必要ですが, 上の式は, $Z(\tau, G)$ が weight $\chi(X)/2$ のモジュラー形式であることをほぼ意味します[9]. 実際, Vafa-Witten は $Z(\tau, \mathrm{SU}(2))$ が, $\Gamma_0(4)$ に関してモジュラーであることを上の式から導いています. ($G^\vee$ の Langlands dual が G であることと, $q \mapsto q+4$ で $Z(\tau, \mathrm{SO}(3))$ が不変であることを使えばすぐでてきます.)

これは恐しく強い結果で, 無限個ある P のうち, 有限個の $\chi(\mathfrak{M}(P))$ の値が決まってしまうだけで他の全ての値も決まることが, モジュラー形式の有限次元性から従います. 異なる P のモジュライ空間の間にはそれ程明らかな関係はありませんから, これは非常に驚くべきことです.

さて, Vafa-Witten はいろいろな 4 次元多様体 X について上の式をチェックしました. 基本的に数学者の計算を使います. 数学者の結果があるのは X が代数曲面のときだけで, そのときは $\chi(\mathfrak{M}(P))$ を Gieseker-Maruyama のコンパクト化, すなわち semistable な torsion-free sheaves

[8] この節の内容は, http://www.math.tohoku.ac.jp/ の私のホームページにおいて紹介されています.

[9] 境界条件については何も分かりませんが...

よって計算されていて, 本質的に Dedekind の η 関数になります (§4 参照). また射影平面のときには, 吉岡君の計算 [18] があります. 但し, この場合は, weight が 3/2 という難しいモジュラー形式が出てきてしまうので, 私は良く理解しておりません. 詳しいことは, 文献も含めて [14] を見てください. そしてコンパクトではありませんが, ALE 空間のときには, 私の計算によって affine Lie algebra の string function が出てきます[11].

実は, 上の議論は話しを分かりやすくするために, 少し嘘を書いてしまいました. 一般にインスタントンのモジュライ空間 $\mathfrak{M}(P)$ は, 1) コンパクトとは限らない, 2) オイラー数 $\chi(\mathfrak{M}(P))$ は X のリーマン計量の取り方に依存する, という困難があります. このうち 2) の方は, 本当は, 次のような方程式のモジュライ空間の個数を数えるということで説明されます.

$$(1) \qquad \begin{cases} d_A B + d_A^* C = 0 \\ F_A^+ + [B \wedge C] + \{C, C\} = 0 \end{cases} \qquad A \text{ は } P \text{ の接続}, B \in \Omega^0(\operatorname{Ad} P), C \in \Omega^+(\operatorname{Ad} P)$$

ここで $\{C, C\}$ の定義は述べませんが, C の二次式です[12]. この方程式の virtual な次元は 0 であり, pertubation を行えば実際にモジュライ空間は 0 次元の多様体, すなわち点の union になります. このあたりの議論は, 通常の SU(2) インスタントンのモジュライ空間のときと同様に証明できるはずです. (細部はチェックしてませんが. (^_^;))

また, $B = C = 0$ はインスタントン方程式 $F_A^+ = 0$ に一致しますが, このとき (1) の上の式の右辺をモジュライ空間の上のベクトル場 α を $\Omega^1(\operatorname{Ad} P)$ であると思ったもので置き換えて perturb すると $\alpha = 0$ となる点の個数を勘定することになりますから, オイラー数という感じもつかんでいただけるのではないでしょうか...

但し, 今のところ perturb した後のモジュライ空間がコンパクトになるかどうかがよく分かりませんので, 不変量を数学的に定式化するまでには至っていません.

また, モジュライ空間の Gieseker-Maruyama コンパクト化が特異点を持つときは数学者の結果はありませんが, オイラー数は整数と仮定してしまうとうまくモジュラーになってくれません. 例えば, K3 曲面のときには $c_1 = 0$ で c_2 even のときの モジュライのオイラー数をモジュラー性から逆算すると, (整数)/4 といった数が現れます.

先に進む前に §1 で述べたことと関連して一言注意しておくと, 楕円曲線の周期 τ は母関数のパラメータとして出てきているので, 楕円曲線を見るためには全てのインスタントン数のモジュライ空間を同時に取り扱うことが必要であると思われます. 通常の幾何では, 異なるインスタントン数のモジュライ空間の間に関係を見ることはそれ程容易ではありません. 以下の節で, “Hecke 環” を通じて, モジュライ空間達を一度に扱うことを見ます.

---

[10]Roan によれば, 一般の 4 次元多様体のときには, Uhlenbeck のコンパクト化のオービフォールド・オイラー数を使うとうまくいくのではということでしたが....

[11]どうでもいいことだけど, 物理屋 ： 数学屋 = 理論 ： 実験という式が成り立っていますねえ.

[12]Seiberg-Witten 方程式によく似ていることがお分かりいただけるかも知れません. (B, C) に関して hyper-Kähler moment map であるという共通点を持っています.

ムの講演録の原稿を少し手直ししたものです.

そもそもの局所大域原理は数論における Hasse 原理, すなわち整数解があるかどうか調べるのに各素数 p について $\mod p$ で解があるかどうか考えるとよい, というような素朴な考えなのですが[13], いろいろなところで本当に成立する例が知られています. 局所をまとめて大域を調べるというアイデアを生かして, 4 次元多様体についても SU(2)- ゲージ理論を各点毎に局所で調べて, 大域な対象であるところのインスタントンのモジュライ空間を調べることができないだろうか, と考えるわけです.

なぜそういったことが成り立つことが期待できるのだろうか, ということについては物理においては明快な説明があります. そもそも Donaldson の理論や上で扱った Vafa-Witten の理論など, 数学で扱っているものはすべて多様体の微分構造にしかよらない理論で, 定義をするときに人工的に Riemann 計量を導入する必要がありますが, 最終的な答えは計量にはよらないものです. そこで計量に正の数をかけてどんどん大きくしていくことを考えます. 二つの異なる点の距離はどんどん離れていきます. 相互作用を司る粒子がもし質量を持てば, 遠い距離の二点の間を行き来することができません. 結局, 極限では異なる二点の間の相互作用は 0 になってしまうわけですから, 4 次元多様体はバラバラになっていると思ってよいと言うわけです. これが局所大域原理が成立することの物理的な説明です. (私の解釈ですので間違っていたらすいません.)

上の素朴な議論が成り立つのであれば, 多様体がどのようにつながっているかはほとんど関係なくなって, そもそも Donaldson 理論で深い不変量が導かれるはずがありません. その理由は粒子の質量が 0 であるからに他なりません. (物理では mass gap がないと言う.) そこで Witten[15] は, 4 次元多様体が射影曲面のときに, 正則 2 形式 (すなわち標準束 K_X の切断) を用いて無理矢理に質量を与えることによって局所大域原理が成立する状況に持っていってやったのです. ところが, 正則 2 形式が消えているところ (=曲面の標準因子) には質量を与えることができないので, そのホモロジー類が Donaldson 理論を統制する Kronheimer-Mrowka の basic class[14]として見えてくるわけです. よって, basic classes は局所大域原理が成立しない障害であると考えたらよいのではないかと思われます. もしくは, basic class は 2 次元の部分多様体であるのだが, それはもはや分割できないという意味で, 点であると考えたらよいかと思います.

上の議論では一般の 4 次元多様体については質量を与えることができませんでした. しかし Seiberg-Witten の双対性によって質量を持たない粒子の正体が U(1)-モノポールであることが分かったので, それが局所大域原理の障害であるところの basic class に関係するわけです.

さて, 元々の局所大域原理において local から global に戻るときにキーとなるものとして, Hecke 環と言う対象があります. Hecke 環の元は, 局所的な対象を用いて定義されます. 各素数

[13] 局所大域原理, およびそれが顕著にあらわれる Langlands 哲学については, Gelbart の論説 [3] がいい文献です.

[14] ここでは basic class の説明はしない. basic class は 4 次元多様体の不変量で, Donaldson 不変量がこれと交叉形式で決まることが知られている

古典的な 複素 1 次元 = 実 2 次元の場合と違って, 我々の場合には 2 次元の部分多様体も "点" であると考えなければいけないので, それに対応する Hecke 環も考える必要があるわけです. 名前については問題もあるかもしれませんが, 取り敢えず "Hecke 環" と呼ぶことにします.

4. Heisenberg algebra と代数曲面上の点の Hilbert scheme

さて今までの節でお話をしてきたことを実際に確かめることにしましょう. とは言っても, インスタントンのモジュライ空間, もしくは正則ベクトル束のモジュライ空間のホモロジー群を調べることはそれ程やさしいことではありません. というわけで, 最初に小手調べとして Hilbert scheme を考えることにします. これは階数 1 の torsion-free sheaf E で, その double dual $E^{\vee\vee}$ が trivial な $\mathcal{O}_X$ であるもののモジュライ空間であるという意味で, 階数 1 のゲージ理論であると考えることが出来ます.

また, 高い階数のときも Gieseker-Maruyama コンパクト化の境界には, torsion-free sheaf が現れ, $E^{\vee\vee}/E$ は有限個の点に台を持った層であり, その情報は Hilbert scheme の様子とほとんど同じであるはずと期待されています.

先の節で述べた局所大域原理が成り立つであろうことは, Hilbert scheme の場合には直感的にはほぼ明らかではないでしょうか？ 実際, そうであって, 本当の点に対応する Hecke 対応だけでホモロジーが全部表わされてしまうことを以下説明します.

X を射影曲面とし, $S^n(X)$ を X の n 次の対称積とし, $X^{[n]}$ を X の colength n の $\mathcal{O}_X$ のイデアルの成す Hilbert scheme の成分とします. このときイデアルに対してその support をおもみ付きで対応させることによって写像 $\pi\colon X^{[n]} \to S^n(X)$ が定義されます.

このとき次のことが知られています.

命題 2. π は特異点解消である.

Göttsche は Ellingsrud-Strømme [2] の $X = \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ のときの結果を踏まえて一般の射影曲面について $X^{[n]}$ の Betti 数を計算しました. 結果は次の通りです.

定理 3 (Göttsche[5])**.** $X^{[n]}$ の Poincaré 多項式を $P_t(X^{[n]})$ とするとき, その母関数は次で与えられる.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n P_t(X^{[n]}) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1+t^{2m-1}q^m)^{b_1(X)}(1+t^{2m+1}q^m)^{b_3(X)}}{(1-t^{2m-2}q^m)^{b_0(X)}(1-t^{2m}q^m)^{b_2(X)}(1-t^{2m+2}q^m)^{b_4(X)}}$$

但し, $b_i(X)$ は X の i-th Betti 数である.

$H_*(X)$ の基底 $\{[C^1], \dots, [C^N]\}$ を取り, それぞれは C^i という (実) 部分多様体で表現されていると仮定します. 交叉形式に関するその双対基底 $\{[D^1], \dots, [D^N]\}$ もやはりまた (実) 部分多様体で表現されていると仮定しましょう. このとき, 各 i と $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して Hilbert

$$n \qquad \left\{ \{(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \mid \mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2,\ \mathrm{Supp}(\mathcal{J}_2/\mathcal{J}_1) = \{p\},\ p \in C^i\} \quad (m > 0) \right.$$

ここで, Hilbert scheme の点は ideal sheaf と思って包含関係を書きました. また $\mathrm{Supp}(\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_2) = \{p\}$ は $\mathcal{J}_1$ と $\mathcal{J}_2$ が 点 p の外では同型であるという意味です.

さて, $P_i[m]$ のホモロジー類は, 次により $X^{[n]}$ のホモロジー群の直和の上に線形写像を引き起こします. (correspondence から写像を作るいつものやり方だが, 成分が無限個出てきていることに注意)

$$\begin{gathered}\bigoplus_n H_*(X^{[n]}) \to \bigoplus_n H_*(X^{[n+m]}) \\ c \mapsto (p_1)_* \left((p_2)^* c \cap [P_i[m]]\right)\end{gathered}$$

ここで, p_i は $X^{[n+m]} \times X^{[n]}$ の第 i 成分への射影とします. また $P_i[m]$ の (成分の) 次元によってホモロジーの次数のずれが決まることに注意します. n によって次元が異なっているので, ずれは n によって異なります.

さて, 上の写像も同じ記号 $P_i[m]$ で表わすことにします.

定理 4. $\bigoplus H_*(X^{[n]})$ に働く operator として次の関係式が成立する[15].

$$P_i[m]P_j[n] = (-1)^{\dim_{\mathbb{R}} C^i \dim_{\mathbb{R}} C^j} P_j[n]P_i[m] + \delta_{ij}\delta_{m+n,0}(-1)^{n+1} n \cdot 1 \tag{5}$$

但し, 1 は恒等写像である.

各 i ごとに, $P_i[m]$ $(m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ 達は代数を定義しますが, 上の (5) は, $\dim C^i$ が偶数のときは無限変数の Heisenberg 代数の, 奇数のときは Clifford 代数の基本関係式に他なりません. ($P_i[0]$ は 何でもよい.) また異なる i に対しては, 作用は可換です.

$X^{[0]}$ は一点からなりますので, その 0 次元ホモロジー群 $H_0(X^{[0]})$ は canonical な vector 1 を持ちます. このベクトルに対して上で出来た Heisenberg/Clifford 代数を作用させて既約表現が出来ます. このとき, 指標公式 (8),(9) と Göttsche の公式を比較してみると, 次の系が分かります.

系 6. $\bigoplus H_*(X^{[n]})$ は, Heisenberg/Clifford 代数の表現空間として既約である[16].

これらの結果は, D^i や C^i を代数サイクル (奇数次のときは無理ですが) で表わせば, おそらく Chow 群で formulate 出来ると思います. 但し, 一般には D^i と C^i を同時に代数サイクルでは実現できないでしょうから, その場合には (5) において δ_{ij} のところを D^i と C^j の交叉数に代えなければならないでしょう.

---

[15] $(-1)^{n+1}n$ という数は最初は 0 でないことしか証明できませんでしたが, Ellingsrud-Strømme が計算してくれました

[16] 今のところ, Göttsche の公式を用いない証明はない. Göttsche の公式の証明には Weil 予想が用いられるので, (射影的でない) 複素曲面に対して同じ公式が成り立つかどうかは不明

環でなく, 有限次元 Lie 環の作用しか考えていなかったので, その様な記述になっています. また, 一番簡単な A_1 型のときに限ることにします.

まず X を A_1 型 ALE 空間, ここでは $\mathbb{C}^2/\{\pm 1\}$ の極小特異点解消, すなわち $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ の cotangent bundle とします. 通常のコンパクトな空間上の正則ベクトル束のモジュライを記述するときは, 階数 と Chern class を止めるのですが, noncompact な空間を扱っている関係上, 境界条件として無限遠 $S^3/\{\pm 1\}$ の上の平坦な接続 ρ を決めることにします. そして正則ベクトル束としては, 対応する接続が ρ に収束しているものを考えます. モジュライ空間を $\mathfrak{M}(\rho, c_1, c_2)$ で表わすことにします. 正確には, torsion-free sheaves のモジュライ空間 (i.e., Gieseker-Maruyama のコンパクト化) を考えなければいけません. 以後, このあたりはあまり気にしないことにします. 但し, 階数 1 のときだけは直線束だけ扱っているのではないことに注意しなければいけません.

平坦な接続と言っても, 基本群 $\{\pm 1\}$ の有限次元表現のことです. McKay 対応[17]によって, 既約表現は affine Dynkin graph の頂点に対応しますが, A_1 型ですから trivial な表現とそうでない表現の二つの頂点に他なりません. 一般の表現に対しては, 表現の既約分解 $\rho = \rho_0^{\oplus m_0} \oplus \rho_1^{\oplus m_1}$ を考えれば, $m_0\Lambda_0 + m_1\Lambda_1$ を対応させることによって affine Lie 環の 0 でない dominant weight を対応させることが出来ます. (Λ_0, Λ_1 は基本ウェイト. すなわち, appendix の h_0, h_1, d の dual basis が Λ_0, Λ_1, δ になるように決めたものです.) あとで構成される表現の highest weight がこの weight に一致することになります.

さて, 表現の作り方は前節とまったく同様で, モジュライ空間の積の中にしかるべく correspondence を与えて, モジュライ空間のホモロジー群の上に operator を作ればよいのです. これには非常に自然なものが あって, parabolic holomorphic vector bundle のモジュライ空間 $\mathfrak{P}(c_1, c_2, \rho)$ を使えばよろしいのです. この空間は, elementary modification

$$0 \to E' \to E \to \mathcal{O}_\Sigma(-1) \to 0$$

の空間 (E, E') を開集合として含みます. ここで Σ は例外集合の $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ です.

この correspondence と E と E' を入れ替えた correspondence で e_0 と f_0 を定義します. また e_1 と f_1 は, $\mathcal{O}_\Sigma(-1)$ を $\mathcal{O}_\Sigma$ で置き換えたものです. ただ一つ前節と違うことは, correspondence の次元がモジュライ空間の積の次元の丁度半分であり, これから中間次元のホモロジー群が中間次元のホモロジー群に移されることが分かります.

また Cartan の元 h_0 は, first Chern class c_1 をはかる operator に なります. そして d は second Chern class (or second Chern character) をはかり, K が identity の階数倍になるようにします. すなわちレベルが階数に等しく, ウェイト空間は, c_1, c_2 を止めたモジュライ空間のホモロジー群に等しいようになります. ρ はずっと固定されていて, elementary modification でも変わらないことに注意してください.

主結果は次の通りです.

[17]McKay 対応については数理研講究録 883 をご覧ください

この例や前節で調べた例を見ても分かる通り, 有限次元 Lie 環でなく, affine Lie 環が出てくる理由は, c_2 も parametrize しているからに他なりません. 代数曲面の H_2 の交叉形式がルート系の Cartan 行列に似たものであることは, ALE 空間, すなわち単純特異点の特異点解消だけにとどまらずいろいろなところで観察されているわけですが, モジュライ空間を考えて H^4 の情報も取り入れたところに affine 化された理由があるのではと思っています.

6. その後の進展について

序で少しほのめかしたように, 物理で現在話題になっているのは弦理論の双対性です. 弦理論の classical な極限として場の理論があり, 上で見たような場の理論の双対性は, 弦理論の双対性から従っているのだというというものです. しかし, なぜ双対性が成立しているのかという根源的な問いかけに答えることはまだ出来ていないようです.

弦理論には, タイプ IIA, タイプ IIB, ヘテロティックなどの幾つかのバージョンがあり, それらの間に双対性があることが予想されています. 弦理論では target space の 10 次元の時空が $\mathbb{R}^d \times$ (curved space) となっている状況を考えるのですが, 双対性で理論を移るときに (curved space) は変わります. 我々の状況と近いのは, curved space = K3 曲面のタイプ IIA 理論と curved space = T^4 のヘテロティック理論です. Vafa [13] によれば, K3 が特異点を持つときに, 対応するヘテロティック理論を考えることによって, 我々の affine Lie 環の作用が物理的に説明されるということです. 残念ながら私は, このヘテロティック弦理論について何も理解していないのですが, 数学にも応用が期待できるようです. [1, 17].

以上の動向により, 楕円曲線が現れた理由を説明できる第一候補として, 弦理論をあげてよいのだろうと思います. もしも, 数学者が弦理論を本格的に考えなければならない段階にきたとすれば, 非常にうれしいことだとおもいます.

Appendix A. Heisenberg 代数と Clifford 代数

Heisenberg 代数と Clifford 代数とその表現論について簡単にまとめておきます. 参考文献は [7, §9.13] です.

無限次元の Heisenberg 代数 $\mathfrak{s}$ は生成元 $p[m]$ $(m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ と K を持ち, 次の関係式で定義される Lie 代数です.

$$[\,p[m], p[n]\,] = m\delta_{m+n,0}K$$

各 $a \in \mathbb{C}^*$ と $d \in \mathbb{C}$ に対して, 無限個の変数の多項式の全体の空間 $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ の上に $\mathfrak{s}$ の既約表現を次のようにして定義することが出来ます. この表現は, boson の Fock 空間と呼ばれています.

$$p[m] \mapsto \begin{cases} am\frac{\partial}{\partial x_m} & (m > 0) \\ x_m & (m < 0) \end{cases}, \qquad K \mapsto a\,\mathrm{Id}\,.$$

この表現は highest weight vector 1 を持ち, R は

$$x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n} = p[-1]^{j_1} p[-2]^{j_2} \cdots p[-n]^{j_n} 1.$$

$$[d_0, p[m]] = mp[m]$$

上で与えられた表現 R は

$$d_0 \mapsto \sum_m m x_m \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

によって拡張されて, 次の指標公式を満たします.

$$\operatorname{tr}_R q^{d_0} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^j)}. \tag{8}$$

次に, Clifford 代数 Cl は, $p[m]$ $(m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ と K で生成される代数で, 次の関係式で与えられるものです.

$$p[m]p[n] + p[n]p[m] = n\delta_{m+n,0}K$$

すなわち, Heisenberg 代数の基本関係式において交換子を反交換子に置き換えたものに他なりません.

無限次元のベクトル空間 $V = \mathbb{C}dx^1 \oplus \mathbb{C}dx^2 \oplus \cdots$ の外積代数 $F = \bigwedge^* V$ の上に Cl の表現が次の式で定義されます. これは fermion の Fock 空間と言われています.

$$p[m] \mapsto \begin{cases} m\frac{\partial}{\partial x_i} \lrcorner & (m > 0) \\ m dx^m \wedge & (m < 0) \end{cases}, \qquad K \mapsto a\,\mathrm{Id},$$

ここで $\lrcorner$ は内部積です. この表現も highest weight vector 1 を持ち,

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} = p[-i_1] \cdots p[-i_n]1, \qquad (i_1 > i_2 > \cdots > i_n).$$

という形の元で生成されます. さらに, d を

$$[d, p[m]] = mp[m]$$

によって定義すると, F に

$$d(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}) = \left(\sum i_k\right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}.$$

によって作用します. このとき指標公式は,

$$\operatorname{tr}_F q^d = \prod_{j=1}^{\infty} (1+q^j). \tag{9}$$

となります.

$$[\,X\otimes t^m + aK + xd, Y\otimes t^n + bK + yd\,]$$
$$= [\,X,Y\,]\otimes t^{m+n} + xnY\otimes t^n - ymX\otimes t^m + \mathrm{tr}(XY)m\delta_{0,m+n}K$$

また affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ は, Kac-Moody Lie 環の例と考えることも出来ます. $\mathfrak{sl}_2$ の標準的な基底

$$E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

を取ってきて,

$$e_0 \overset{\text{def.}}{=} F\otimes t,\quad f_0 \overset{\text{def.}}{=} E\otimes t^{-1},\quad h_0 \overset{\text{def.}}{=} K - H\otimes 1$$
$$e_1 \overset{\text{def.}}{=} E\otimes 1,\quad f_1 \overset{\text{def.}}{=} F\otimes 1,\quad h_1 \overset{\text{def.}}{=} H\otimes 1$$

と置きます.

$$[e_i,f_j]=\delta_{i,j}h_i,\quad [h_i,h_j]=0,\quad [d,h_i]=0,$$
$$[h_i,e_j]=a_{ij}e_j,\quad [h_i,f_j]=-a_{ij}f_j,$$
$$[d,e_i]=\delta_{i0}e_i,\quad [d,f_i]=-\delta_{i0}f_i,$$
$$(\mathrm{ad}\,e_i)^{1-a_{ij}}e_j=0,\quad (\mathrm{ad}\,f_i)^{1-a_{ij}}f_j=0\quad (i\neq j)$$

が成り立ちます. ここで (a_{ij}) は次で与えられる extended Cartan matrix です[18].

$$(a_{ij})=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$$

逆に, e_i, f_i, h_i を生成元とし, 上の関係式で定義される Lie 環が $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ となることが知られています.

有限次元 Lie 環の既約有限次元表現に対応するものとして, affine Lie 環 (より一般に Kac-Moody Lie 環) の integrable highest weight 表現と呼ばれる表現のクラスがあります. これを以下説明しましょう.

まず, 三次元部分空間 $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathbb{C}(H\otimes 1)\oplus\mathbb{C}K\oplus\mathbb{C}d = \mathbb{C}h_0\oplus\mathbb{C}h_1\oplus\mathbb{C}d$ は, $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の Cartan subalgebra となりますが, 表現 V が "$\widehat{\mathfrak{h}}$-対角化可能" であるとは,

$$V=\bigoplus_{\lambda\in\widehat{\mathfrak{h}}^\vee} V_\lambda;\qquad V_\lambda=\{v\in V\mid hv=\lambda(h)v \text{ for all } h\in\widehat{\mathfrak{h}}\}$$

と, $\widehat{\mathfrak{h}}$ の同時固有空間に直和分解するときをいいます. V_λ を weight 空間と呼ぶのは有限次元のときと全く同様です. $\widehat{\mathfrak{h}}$-対角化可能な表現が "integrable" であるとは, e_i, f_i $(i=0,1)$ が locally nilpotent, すなわち任意の元 v に対して e_i, f_i を十分何回も apply すると 0 になるときをいいます.

[18] 一般に, 対角線が 2 である対称行列が与えられたときに, この関係式で定義される Lie 環を (symmetric) Kac-Moody Lie 環といいます.

(2) $hv_\Lambda = \Lambda(h)v_\Lambda$,

(3) V は, $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$-module として v_Λ で生成される.

既約な highest weight 表現は, 任意の Λ に対してただ一つ存在し, これが integrable になるための必要十分条件は, Λ が dominant highest weight であること, すなわち $\Lambda(h_i)$ $(i = 0, 1)$ が非負整数であることが知られています. $\Lambda(d)$ の値は代えても本質的には同型な表現が出てくるだけなので通常は無視されます. また, integrable な highest weight 表現は, 自動的に既約になることも知られています.

一般の Kac-Moody Lie 環については, highest weight が Λ の integrable な highest weight 表現という言い方をするのですが, affine Lie 環の表現については, 有限次元 Lie 環の部分の highest weight と $K \in \widehat{\mathfrak{h}}$ での Λ の値 $\Lambda(K)$ (レベルと言います) の二つの data により表現をパラメトライズする方がよく使われます.

References

[1] M. Bershadsky, C. Vafa, and V. Sadov, *D-branes and topological field theories*, hep-th/9511222, preprint.

[2] G. Ellingsrud and S.A. Strømme, *On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane*, Invent. Math. **87** (1987), 343–352.

[3] S. Gelbart, *An elementary introduction to the Langlands program*, Bull. of the A.M.S. **10** (1984), 177–219.

[4] V. Ginzburg, M. Kapranov, and E. Vasserot, *Langlands reciprocity for algebraic surfaces*, Int. Math. Res. Notes **2** (1995), 147–160.

[5] L. Göttsche, *The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface*, Math. Ann. **286** (1990), 193–207.

[6] L. Göttsche and D. Huybrechts, *Hodge numbers of moduli spaces of stable bundles on K3 surfaces*, alg-geom/9408001, preprint.

[7] V.G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras (3rd Ed.), Cambridge Univ. Press 1990.

[8] H. Nakajima, *Gauge theory on resolution of simple singularities and simple Lie algebras*, Inter. Math. Res. Notices (1994), 61 – 74.

[9] ———, *Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces*, alg-geom/9507012, preprint.

[10] ———, *Instantons and affine Lie algebras*, alg-geom/9510003, preprint.

[11] A. Strominger, *Massless blackholes and conifolds in string theory*, hep-th/9504090, preprint.

[12] N. Seiberg and E. Witten, *Electric-Magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. B. **426** (1994) 19–52.

[13] C. Vafa, *Instantons on D-branes*, hep-th/9512078, preprint.

[14] C. Vafa and E. Witten, *A strong coupling test of S-duality*, Nucl. Phys. **431** (1994), 3–77.

[15] E. Witten, *Supersymmetric Yang-Mills theory on a four manifold*, J. Math. Phys. **35** (1994), 5101–5135.

[16] ———, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994) 769–796.

[17] S.T. Yau and E. Zaslow, *BPS states, string duality, and nodal curves on K3*, hep-th/9512121, preprint.

[18] K. Yoshioka, *The Betti numbers of the moduli spaces of stable sheaves of rank* 2 *on* $\mathbb{P}^2$, J. reine angew. Math. **453** (1994), 193–220.