

Donaldson 不変量とインスタントンの数え上げ

中島 啓*

京都大学理学部数学教室

1 序

城崎新人セミナーに参加させていただいて、遠い(?) 昔に修士論文を書いたころのことを思い出しました。わたしが修士課程の学生であったころは、ドナルドソンによるゲージ理論を4次元トポロジーに応用した画期的な仕事が注目をあびており、松本幸夫先生の講義をきっかけにローソンの教科書 [6] を読んで勉強したりしました。その延長線で高次元のヤン・ミルズ接続の解析的な性質に関する修士論文を書きました。その後は、修士論文のテーマからはだんだんと離れていって、4次元多様体上のゲージ理論の研究に入っていくのですが、それでも研究がもっとも活発であったトポロジーへの応用からは少し離れたところ、すなわちゲージ理論と表現論の関連にテーマを選んでいました。

それからしばらく時がたち、ドナルドソンのゲージ理論についてほとんどの人が忘れてしまったころ、ネクラソフという物理学者の予想に関連して、神戸大の吉岡康太さんといっしょに、ドナルドソンの理論をもういちど振り返り、さらにその精密化を与える研究を始めました。城崎では、その成果のお話をさせていただきました。

講演の半分は、ドナルドソン不変量についての簡単な復習で、残りの半分で、ネクラソフの分配関数の定義と、我々の結果について紹介しました。後半については、すでに [10] に日本語の解説があるので、今回は省略することとし、[10] を読むのに必要な予備知識と思われる、ドナルドソン不変量の定義と、小林・ヒッチン対応に基づいた代数幾何的な手法によるアプローチについて、主に解説いたします。これらは、10年以上前にはよく知られていたことばかりで、標準的な教科書として、[1, 3, 4] があげられます。また、ドナルドソンの最初の論文についての解説書として、[2, 6] もよく読まれました。また、代数幾何の層のモジュライ空間の教科書として、[5] をあげておきます。一部の結果については、[7, 9] の原論文にあたる必要があるものもあります。また、高い階数の場合も含めた不変量の一般的な定義が [8] で与えられています。代数幾何的なアプローチのうちの、いくつかの未完成な部分は、[8] で埋められています。

最近の学生さんには、グロモフ・ウィッテン不変量の方が親しみがあるかもしれません。しかし、グロモフ・ウィッテン不変量は、ドナルドソン不変量の類似として生まれたのであり、原点を抑えておくことも無意味なこととは思いませんし、また最近の物理と絡んだ研究ではグロモフ・ウィッテン不変量や絡み目不変量と関係があることも分かってきており、発展の気配があります。

謝辞

講演の機会をあたえてくださった城崎新人セミナー運営委員の方々、および本報告に関して共同研究をいただいた吉岡康太さんに感謝いたします。

以下、本文では文体を常体に変更します。

*nakajima@math.kyoto-u.ac.jp

2 ドナルドソン不変量の定義

2.1 リーマン計量と自己双対閉形式

X をコンパクトで向きづけられた 4 次元の連結 C^∞ 級多様体とし、簡単のため単連結とする。 X の二次のコホモロジー群 $H^2(X, \mathbf{Z})$ 上に交叉形式が $(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \cup \beta$ によって定義される。これは対称形式である。実数をテンソルして $H^2(X, \mathbf{R})$ 上の対称形式と考えたときの正の固有値の個数を b_+ 、負の固有値の個数を b_- であらわす。

X 上の Riemann 計量 g を取る。ホッジのスター作用素 $*$: $\Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$ は、involution ($*^2 = \text{id}$) である。このとき、 X の二次の外積束 $\Lambda^2 = \Lambda^2 T^* X$ は、自己双対パート Λ^+ と反自己双対パート Λ^- の直和に、 $*$ に関する固有空間分解として分かれる。

$$\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-; \quad * = \pm \text{id on } \Lambda^\pm$$

g に関する調和微分形式は、 $d\alpha = 0, d*\alpha = 0$ を満たすものことであったが、 $\alpha = \alpha^+ + \alpha^-$ と固有空間分解に応じて自己双対パートと反自己双対パートに分けると、 α^+, α^- とともに d -closed であり、コホモロジー類を定める。このようにして、計量 g を取るごとに、コホモロジー群は

$$H^2(X, \mathbf{R}) \cong \mathcal{H}_g^+ \oplus \mathcal{H}_g^- \quad (2.1)$$

と、自己双対形式の空間 \mathcal{H}_g^+ と反自己双対形式の空間 \mathcal{H}_g^- の直和に分解する。さらに $\dim \mathcal{H}_g^\pm = b_\pm$ であり、特に次元は計量の取りかたにはよらない。したがって、計量 g を与えるごとに、 $H^2(X, \mathbf{R})$ (これは計量にはよらない!) の中に b_+ 次元の部分空間が定められることになる。これは、複素多様体の変形を考えるときの周期の類似と考えることができる。また、この分解は、あとで可約接続を調べるときに重要になる。

2.2 反自己双対接続とそのモジュライ空間

$P \rightarrow X$ を主 SO_3 束¹ とする。その同型類は、第二スティフェル・ホイットニー類 $w_2(P) \in H^2(X, \mathbf{Z}_2)$ と第一ポントリャーギン類 $p_1(P) \in H^4(X, \mathbf{Z})$ で決まることが知られている。

P 上の SO_3 -接続 A が反自己双対接続であるとは、 A の曲率 F_A の自己双対パート F_A^+ が 0 になるときをいう。このとき、反自己双対接続のモジュライ空間を

$$\mathfrak{M}(P) \equiv \mathfrak{M} = \{A \mid F_A^+ = 0\} / \text{gauge 同値}$$

と定義する。あとでそうするように、主束 P を明示する必要がある場合は $\mathfrak{M}(P)$ で表し、そうでないときは単に \mathfrak{M} で表す。ここで、ふたつの反自己双対接続 A, A' が gauge 同値であるとは、 SO_3 -同変な微分同相 $g: P \rightarrow P$ で底空間の恒等写像 $\text{id}: X \rightarrow X$ をカバーするものが存在して、 A' が A を g で引き戻したものになるときをいう。このような微分同相 g をゲージ変換といい、その全体を $\mathcal{G}(P) \equiv \mathcal{G}$ であらわす²。 \mathfrak{M} は、反自己双対接続の全体を \mathcal{G} の作用で割った商空間に他ならない。

2.3 反自己双対接続のモジュライ空間の変形複体

A を SO_3 主束 P 上の反自己双対接続とする。 P の随伴束 $\text{ad } P$ を $P \times_{SO_3} \mathfrak{so}_3$ として定義する。ただし、 SO_3 は \mathfrak{so}_3 に adjoint で作用する。このとき $\text{ad } P$ に値を持つ微分形式の全体の空間 $\Lambda^0(\text{ad } P), \Lambda^1(\text{ad } P),$

¹ゲージ理論では通常、 SO_3 と SU_2 の両方が使われる。 SU_2 束は、 $w_2(P) = 0$ となる SO_3 束の特別なものと考えられる。また、 SU_2 束から出発しても、たとえばあとに述べるモジュライ空間上の普遍束を考えるときは、 SO_3 束にうつる必要がある。そこで、ここでは SO_3 束で話を進める。ただし、あとで代数幾何の正則ベクトル束のモジュライ空間と関係させるときには、 $U(2)$ 束に移る必要があるので、技術的な細かいところを気にするときには、すべてきちんと理解しておく必要がある。

²しばしばゲージ群と呼ばれるが、物理では SO_3 のことをゲージ群という方が通常なので物理学者と議論するときには注意する必要がある。

$\wedge^+(\text{ad } P)$ を考える。最初の二つは、それぞれ 1 次、2 次微分形式の全体の空間であるが、最後のものは、自己双対微分形式の全体の空間である。そこで、 A でひねられた外微分作用素による複体

$$\wedge^0(\text{ad } P) \xrightarrow{d_A} \wedge^1(\text{ad } P) \xrightarrow{d_A^+} \wedge^+(\text{ad } P) \quad (2.2)$$

を考える。ただし、 d_A^+ は d_A と $\wedge^2(\text{ad } P)$ から $\wedge^+(\text{ad } P)$ への直交射影の合成である。一般に、 $d_A \circ d_A(\bullet) = F_A \wedge \bullet$ であるから、 $d_A^+ \circ d_A(\bullet) = F_A^+ \wedge \bullet$ となるが、 A が反自己双対接続であることから $F_A^+ = 0$ であり、よって上は複体になることが従う。

Γ_A をゲージ群における A の stabilizer とする。つまり、 P のゲージ変換で、接続 A を保つものの全体である。この群が自明になるかどうかで、次の §2.4 で、既約接続、可約接続を分ける。ここでは、とりあえず、今は両者を区別せずに扱う。上の複体が Γ_A 同変であることだけ注意しておく。

上の複体はモジュライ空間の無限小変形に対応する。実際、 A を少し変形した $A + \alpha$ が反自己双対であるという非線型偏微分方程式 $F_{A+\alpha}^+ = 0$ を線形化したものが、 $d_A^+ \alpha = 0$ であり、また A を通るゲージ群作用の軌道の接空間が $\text{Im}(d_A: \wedge^0(\text{ad } P) \rightarrow \wedge^1(\text{ad } P))$ に他ならない。そこで、その‘直交補空間’を d_A の形式的随伴作用素を d_A^* を用いて $\text{Ker } d_A^*$ と導入する。これが有限次元の場合に商空間の座標を作る際に用いられるスライスと同じ役割を果たす。ゲージ群は、無限次元の群であり、局所コンパクトでさえないが、商空間を作る際には、有限次元のコンパクト群と同じようにスライス定理を使って割ることができる。複素多様体の変形理論における倉西写像の変形の理論を真似ることによって、次を得る。

補題 2.1. A を反自己双対接続とする。上の変形複体の i 次コホモロジー群を H_A^i で表す。このとき、 H_A^1, H_A^2 の間に、 Γ_A -同変な C^∞ 写像 $f: H_A^1 \rightarrow H_A^2$ が定義されて、 A の近傍において、 \mathfrak{M} は $f^{-1}(0)/\Gamma_A$ の原点の近傍と同相になる。

また、アティヤ・シンガーの指数定理により、上の複体の指数、すなわち $\dim H_A^0 - \dim H_A^1 + \dim H_A^2$ を計算することができる。あとの都合上、符号を代えて、 $-\dim H_A^0 + \dim H_A^1 - \dim H_A^2$ とすると、答えは、

$$-2p_1(P) - 3(1 + b_+) \quad (2.3)$$

となる。たとえば自明束上の自明接続の場合には、 $\text{ad } P \cong X \times \mathfrak{so}_3$, $p_1(P) = 0$ であり、 $H_A^0 \cong \mathfrak{so}_3$, $H_A^1 = 0$, $H_A^2 \cong \mathfrak{so}_3 \otimes \mathcal{H}_g^+$ であるから、二項目は自明束の場合の寄与であることが分かる。

2.4 可約接続

商空間は、一般にきれいな構造を持たない。そこで、 \mathfrak{M} の開集合に制限する必要があるが出てくる。

定義 2.2. (反自己双対とは限らない) 接続 A が既約であるとは、 \mathcal{G} の作用に関して、軌道が自由になるときをいう。すなわち、 $\Gamma_A = \{\text{id}\}$ となるときをいう。既約でないとき、可約であるという。

A が可約であるのは、 A が (SO_3 の部分群である) SO_2 -主束の接続からの誘導接続になっていることと同値である。可約な反自己双対接続 A に対して、 $\frac{i}{2\pi}[F_A] \in H^2(X, \mathbb{Z})$ を対応させる。ここで、 F_A は SO_2 -接続と思ったときの曲率で、 $[F_A]$ はそのコホモロジー類である。 A が反自己双対であるから、コホモロジー類 $[F_A]$ に対応する調和微分形式は反自己双対になる。逆にそのような、コホモロジー類があったとすると、 SO_2 が可換群であること $U(1)$ と同型であることに注意して調和積分論を用いて、可約な反自己双対接続が存在することがわかり、このようにして、

- a) 可約な反自己双対接続 A
- b) $H^2(X, \mathbb{Z})$ の元であって、対応する調和微分形式は反自己双対になるもの

の間に全単射があることが分かる。(正確には後者を ± 1 で割る必要がある。)

次に、そのようなコホモロジー類がどのようなときに存在するかを考える。(2.1) の分解を見ると、求める条件は、 $H^2(X, \mathbf{R})$ の格子 $H^2(X, \mathbf{Z})$ と部分空間 \mathcal{H}_g^- が交わる、というものである。 g を動かすときに、 \mathcal{H}_g^- が対応して滑らかに動くので、これはリーマン計量の全体のなす空間 $\mathcal{M}(X)$ から、グラスマン多様体 $Gr(b_-, H^2(X, \mathbf{R}))$ の中の交叉形式の制限が負定値となる部分空間からなる開集合 U への C^∞ 級写像 $P: \mathcal{M}(X) \rightarrow U$ を定める。各 $c \in H^2(X, \mathbf{Z})$ に対して、 $N_c = \{S \in U \mid c \in S\}$ と定義すると、 U 中の余次元が $\dim \mathcal{H}_g^+ = b_+$ 次元の部分多様体を定める。さらに、 P と N_c が横断的に交わっていることを示すことができるので $P^{-1}(N_c)$ は $\mathcal{M}(X)$ 中の余次元 $= b_+$ の部分多様体になる。 c を動かして和を取る必要があるが、これは局所有限であることが分かるので、次が示される。

定理 2.3. SO_3 主束 P は自明ではないとする。 $b_+ > 0$ のとき、計量全体のなす (無限次元) 空間 $\mathcal{M}(X)$ 中の稠密な開集合の上で、 \mathfrak{M} には可約接続が表れない。より詳しく、 $\dim R < b_+$ となる多様体 R でパラメトライズされたリーマン計量の族 $h: R \rightarrow \mathcal{M}(X)$ に対し、 h の摂動 h' で像に入る計量については \mathfrak{M} に可約接続がないものが取れる。

定理の仮定について注意しておく。自明 SO_3 -束の上の反自己双対接続は、自明な接続であり、可約である。特に曲率 F_A は 0 であり、どんなリーマン計量についても反自己双対接続になる。したがって、計量の摂動では自明接続を除外することはできない。

2.5 μ -写像

ここでは、いったん反自己双対接続のモジュライ空間を忘れて、より一般の接続のモジュライ空間を考え、その上に自然なコホモロジー類を定義する。

既約接続の全体のなす空間を \mathcal{A}^* とおく。既約接続に制限することにより、ゲージ群 \mathcal{G} は、自由に作用することに注意する。また無限次元多様体を無限次元リー群で割っている状況であるが、有限次元多様体の場合と同様にスライス定理を用いることによって、 \mathcal{A}^* は、商空間 $B^* = \mathcal{A}^*/\mathcal{G}$ 上の主 \mathcal{G} 束となる。そこで、これに付随した普遍束 $\mathbb{P} \rightarrow B^* \times X$ を

$$\mathbb{P} = (\mathcal{A}^* \times P)/\mathcal{G}$$

と定義する。ただし、 P は最初に与えられた主 SO_3 束で、 \mathcal{G} が自然に作用していることに注意する。 \mathbb{P} は $B^* \times X$ 上の主 SO_3 束である。そこで、 μ -写像 $\mu: H_*(X, \mathbf{Q}) \rightarrow H^*(B^*, \mathbf{Q})$ を

$$\mu([\Sigma]) = -\frac{1}{4}p_1(\mathbb{P})/[\Sigma]$$

によって定義する。ただし、 $'/'$ はスラント積

$$/: H^d(B^* \times X, \mathbf{Q}) \otimes H_i(X, \mathbf{Q}) \rightarrow H^{d-i}(B^*, \mathbf{Q})$$

のこととする。

X は単連結と仮定したので、ホモロジー類 $[\Sigma]$ として取れるのは偶数次のものだけである。 H_4 から取ると自明なコホモロジー類しか生じないので、普通は考えず、 H_0, H_2 から来るものを考える。

コホモロジー類 $\mu([\Sigma])$ は、可約接続を含んだ接続全体の空間 \mathcal{A} の商空間 $B = \mathcal{A}/\mathcal{G}$ には、一般には拡張できない。 \mathcal{G} の作用が自由ではないから、普遍束 \mathbb{P} が主束にならず、期待できそうもないことは想像がつくとは思いますが、実際に可約接続 $[A]$ を越えて拡張されるための必要十分条件は

$$\langle [F_A], [\Sigma] \rangle = 0 \tag{2.4}$$

であることが分かっている。ここで $[F_A]$ は A を SO_2 接続と見たときの曲率の定めるコホモロジー類である。

可約接続まで入った場合には、一点 $x_0 \in X$ を止めて、枠つき接続のモジュライ空間を考える方がよい。つまり、ゲージ群 \mathcal{G} の正規部分群 \mathcal{G}_0 を、 x_0 のファイバーに恒等写像で働くバンドル同型だけを集めてできるものとして定めて、 $\tilde{B} = A/\mathcal{G}_0$ を考える。 $g \in \mathcal{G}_0$ であるとする、 $g^*A = A$ となるから、 g の固有値は定数関数であり、したがって一点で恒等写像と仮定すると、全体で恒等変換にならざるを得ないわけである。こうしておいて、 \tilde{B} に群 $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0 = SO_3$ の作用込みで考えると、 μ -写像は

$$\mu: H_*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{SO_3}^*(\tilde{B}, \mathbb{Q})$$

と定義される。ここで $H_{SO_3}^*$ は同変コホモロジーである。

2.6 generic な計量に対する H_A^2 の消滅

今、仮定しているように構造群が SO_3 のときには、既約であることは $H_A^0 = 0$ となることと同値である。さらに、もしも $H_A^2 = 0$ となっていれば、補題 2.1 から A の回りで \mathfrak{M} は、ユークリッド空間 H_A^1 の原点の近傍と同相であることが分かる。つまり、 A の回りで \mathfrak{M} は多様体である。そして、その次元は、 $H_A^0 = H_A^2 = 0$ から (2.3) で与えられる。そのため、(2.3) は、モジュライ空間 $\mathfrak{M}(P)$ の仮想次元とよばれる。

$H_A^2 = 0$ とは、(2.2) の二番目の写像 d_A^+ が全射であることを意味する。また、 d_A^+ は反自己双対方程式の線形化であったことを思い出そう。この視点を用いて、 $H_A^2 = 0$ をより幾何学的な条件に置き直す。 B^* 上の無限階数のベクトル束

$$(A^* \times \wedge^+(\text{ad } P)) / \mathcal{G}$$

を考える。 $A \bmod \mathcal{G} \in B^*$ に対して $(A, F_A^+) \bmod \mathcal{G}$ を対応させる写像は、このベクトル束の切断と考えることができる。この切断 s の零点集合 $s^{-1}(0)$ が反自己双対接続のモジュライ空間 \mathfrak{M} に他ならない。 $H_A^2 = 0$ は、 s が A において、0-切断と横断的であることを意味する。もしも、すべての $A \in s^{-1}(0)$ において、0-切断と横断的であれば、 $s^{-1}(0)$ は部分多様体となることは有限次元多様体の場合と同様に成立する。有限次元のときには、 s を generic に取れば、 $s^{-1}(0)$ は 0-切断と横断的であることはよく知られている。ただし、‘generic’ に取るためには s を摂動する必要がある、ドナルドソンの最初の論文では反自己双対方程式 $F_A^+ = 0$ を摂動することで、この条件が満たされるようにした。その後、フリード・ウーレンベック [2] は、計量を動かすことによる s の摂動によってこれが達成できることを示した。

補題 2.4. SO_3 主束 P は自明ではないとする。リーマン計量 g を generic に取ると、 P 上のすべての反自己双対接続 A に対する二次コホモロジー H_A^2 は消える。

特に、前節のように $H_A^0 = 0$ が成り立つようにも generic に取っておけば、 $H_A^0 = 0$, $H_A^2 = 0$ が共に成り立つようにすることができる。そのような計量に対しては、 \mathfrak{M} は C^∞ 級多様体である。

ただし、[2] の証明は、 $\text{ad } P$ が \mathfrak{so}_3 -束であることを full に使っており、構造群が一般のコンパクト・リー群 G のときには適用できない。クロンハイマーの最近の $U(r)$ -主束版のドナルドソン不変量の定義には、ホロノミーによる摂動が使われている。

2.7 モジュライ空間の向き付け

ドナルドソン不変量をモジュライ空間上の積分として定義するためには、モジュライ空間に向きを入れる必要がある。これは、変形複体 (2.2) の H_A^1 (今の場合 $= -H_A^0 + H_A^1 - H_A^2$) の最高次の外積バンドル $\wedge^{\max} H_A^1$ の自明化を与えることに他ならない。(以下、ベクトル空間 V に対して、 $\wedge^{\max} V$ を $\wedge^{\dim V} V$ と定める。) 一般にある空間 (今の場合、モジュライ空間 \mathfrak{M}) でパラメータ付けられた楕円型複体のコホモロジーは、次元が点によって変わり得るのでベクトル束とはならない。しかし、そのコホモロジー群の最高次の外積バンドルをコホモロジーの次数の偶奇によって、双対と取り換えながらテンソル積を取ったもの

$$\wedge^{\max} H_A^0 \otimes (\wedge^{\max} H_A^1)^* \otimes \wedge^{\max} H_A^2$$

は、直線束となり、determinant line bundle と呼ばれていて多くの研究がある。(たとえば川口氏の講演でも出てきた。) 特に、前節までで気にしていたような H_A^0, H_A^2 が消えるかどうか、といったようなことを気にする必要がないので取扱いがやさしくなる。また、(2.2) を折り曲げて

$$d_A^* \oplus d_A^+ : \Lambda^1(\text{ad } P) \rightarrow \Lambda^0(\text{ad } P) \oplus \Lambda^+(\text{ad } P)$$

というひとつの楕円型作用素でおきかえておけば、モジュライ空間に制限する必要もなく、すべての既約接続のなす空間 A^* をゲージ群 G で割った空間 $B^* = A^*/G$ の上で determinant line bundle を考えることができるようになる。この B^* は無限次元であるから、取扱いが難しくなるのではと考えるかもしれない。しかし、 A は無限次元とはいっても、(接続をひとつ止めれば) ベクトル空間 $\Lambda^1(\text{ad } P)$ と同じであり、可縮である。つまり B はゲージ群の分類空間である。さらに $B \setminus B^*$ は、 B の中で余次元が無限であるので³、コホモロジー群を考える上では区別する必要はない。これにより $H^*(B^*, \mathbb{Q})$ は完全に決定されてしまう。

さらに詳しいことは、最初にあげた教科書等を見ていただくこととして、結論からいうと、 $w_2(P)$ の $H^2(X, \mathbb{Z})$ への持ち上げを固定すると、 \mathfrak{M} には自然に向き付けが与えられる。

2.8 ウーレンベックのコンパクト化

モジュライ空間は、一般にはコンパクトではないので、コンパクト化を定義し、積分したいコホモロジー類がコンパクト化まで延びていることを示す必要がある。コンパクト化を定義するために必要な解析的な結果は、ウーレンベックによってドナルドソンの最初の論文⁴でるまえに用意されていた。

定理 2.5. $\{[A_i]\}_{i=1}^\infty$ を $\mathfrak{M}(P)$ 内の無限列とする。このとき、部分列 $\{[A_j]\}$ を取ると、曲率測度 $|F_{A_j}|^2 dV$ は、 P とは異なる SO_3 -主束 P' 上の反自己双対接続 A_∞ の曲率測度と有限個の点 x_1, \dots, x_k のディラック測度の和

$$|F_{A_\infty}|^2 dV + 8\pi^2 \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}$$

に測度の意味で収束する。(すなわち任意の連続関数を $|F_{A_j}|^2 dV$ で積分したものが、上の測度で積分したものに収束する。)

より詳しく、ゲージ群軌道から適当な代表元 A_j を取ると、 A_j は有限個の点 $\{x_1, \dots, x_k\}$ を除いた開集合上で、 C^∞ 広義一様収束する。さらに、その極限 A_∞ は、 P とは異なる SO_3 -主束 $P^{(k)}$ 上の反自己双対接続に $\{x_1, \dots, x_k\}$ を越えて拡張される。ただし、 $w_2(P) = w_2(P^{(k)})$ であり、 $p_1(P^{(k)}) = p_1(P) + 4k$ となる。ここで、 $H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ と同一視した。以下でもこの同一視を用いる。

最後の式は、

$$-p_1(P^{(k)}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_X |F_{A_\infty}|^2 dV = \frac{1}{2\pi^2} \int_X |F_{A_j}|^2 dV - 4k = -p_1(P) - 4k$$

から分かる。

そこで、 $\mathfrak{M}(P)$ のウーレンベックコンパクト化を

$$\overline{\mathfrak{M}}(P) = \mathfrak{M}(P) \cup \left(\mathfrak{M}(P^{(1)}) \times X \right) \cup \left(\mathfrak{M}(P^{(2)}) \times S^2 X \right) \cup \dots$$

によって定義する。位相は、上の測度収束で入れる。

ここで、少し技術的な注意を述べる。§§2.3, 2.4 において、計量を generic に取って、モジュライ空間が滑らかな多様体の構造を持ち、その次元が仮想次元になるようにした。これを、上のコンパクト化に表れるすべての $\mathfrak{M}(P^{(k)})$ にも同時に成り立つように計量を取りたい。これは、 k が有限通りしかでてこないことからだい

³正確には、棒つき接続のモジュライ空間 \tilde{B} において、まず $\tilde{B} \setminus \tilde{B}^*$ が余次元無限であることを用い、さらに SO_3 -主束 $\tilde{B}^* \rightarrow B^*$ に関するスペクトル系列を用いる。

たい可能なのであるが、ひとつだけ例外があって P が自明束の場合にはこれができない。(2.3) より仮想次元は負なので、そのようなモジュライ空間は空集合になって欲しいのだが、 P 上の反自己双対接続は自明接続であって、計量を取り換えてもなんにも変えることはできないのである。 $w_2(P) \neq 0$ であれば、自明束は $P^{(k)}$ として表れないからいいのだが、 $w_2(P) = 0$ の場合には、自明束の stratum ‘ $\mathfrak{M}(\text{自明束}) \times S^n X = S^n X$ ’ は例外的に取り扱う必要が出てくる。このため、不変量が定義されるためには $\mathfrak{M}(P)$ の次元が、ある具体的な数よりも大きい、いわゆる stable range にある、という条件を仮定する必要がある。グロモフ・ウィッテン不変量の場合には、倉西構造、もしくは仮想的な基本類の理論により、同種の困難は克服されたが、今の場合は H^0, H^2 の両方が生き残るために、倉西構造の理論をすぐに適用することはできないと思われる。いずれにせよ、以下では、自明接続以外の $\overline{\mathfrak{M}}(P)$ にあられる反自己双対接続に対して $H_A^0 = H_A^2 = 0$ となるときの計量 g は generic であるということにする。

§2.5 の最後に、枠つき接続のモジュライ空間を考えた。反自己双対接続の枠つきモジュライ空間 $\widetilde{\mathfrak{M}}(P)$ を同様に考えることができる。しかし、ウーレンベックのコンパクト化の定義の際に、曲率の集中が最初に取った点 x_0 で起こると困ってしまう。したがって考えることができるのは、

$$\overline{\mathfrak{M}}(P) = \widetilde{\mathfrak{M}}(P) \cup \left(\widetilde{\mathfrak{M}}(P^{(1)}) \times (X \setminus \{x_0\}) \right) \cup \left(\widetilde{\mathfrak{M}}(P^{(2)}) \times S^2(X \setminus \{x_0\}) \right) \cup \dots$$

である。これをウーレンベックの部分コンパクト化という。 x_0 が取り除かれているので、コンパクトにはならない。ネクラソフの分配関数を定義するときには、この部分コンパクト化を $X = S^4$ のときに用いられるが、ここでは紹介しない。

2.9 ドナルドソン不変量の定義

§2.8 にあったように、自明接続以外のすべての $\overline{\mathfrak{M}}(P)$ の点について、 $H_A^0 = H_A^2 = 0$ となるようにリーマン計量を generic に取る。このときドナルドソン不変量は、 $[\Sigma_1], \dots, [\Sigma_d] \in H_*(X, \mathbb{Q})$ に対して

$$\int_{\overline{\mathfrak{M}}(P)} \mu([\Sigma_1]) \cup \dots \cup \mu([\Sigma_d]) \in \mathbb{Q} \quad (2.5)$$

と定義される。より正確には、 $\overline{\mathfrak{M}}(P)$ の基本類 $[\overline{\mathfrak{M}}(P)] \in H_*(\overline{\mathfrak{M}}(P), \mathbb{Q})$ とコホモロジー類 $\mu([\Sigma_1]) \cup \dots \cup \mu([\Sigma_d])$ のペアリングとして定義される。もちろん、コホモロジーの次数と $\overline{\mathfrak{M}}(P)$ が一致しないときには 0 になる。特に b_+ が偶数のときには不変量はすべて 0 になる。

上の定義がきちんとうまくいっていることをチェックするには、まだいくつかのやるべきことが残っている。まず、 $\overline{\mathfrak{M}}(P)$ の各 stratum $\mathfrak{M}(P), \mathfrak{M}(P^{(1)}) \times X, \dots$ は向きづけられた多様体であるが、全体として基本類 $[\overline{\mathfrak{M}}(P)] \in H_*(\overline{\mathfrak{M}}(P), \mathbb{Q})$ が定義されることをチェックしなければならない。しかし、これは小さな stratum の次元が、一番大きな stratum $\mathfrak{M}(P)$ の次元よりも二次元以上小さければよい。これは、自明でない主束 $P^{(k)}$ に対応する stratum については、§2.3 の最後に述べた消滅定理から

$$\dim \mathfrak{M}(P^{(k)}) \times S^k X = -2p_1(P^{(k)}) - 3(1 + b_+) + 4k = -2p_1(P) - 3(1 + b_+) - 4k = \dim \mathfrak{M}(P) - 4k$$

だから正しい。特に、 $w_2(P) \neq 0$ のときは、大丈夫である。しかし、上でも注意したように自明束の stratum $S^n X$ については、次元は $4n$ であって、仮想次元とはずれている。そのために、 $w_2(P) = 0$ のときには、

$$\dim \mathfrak{M}(P) = -2p_1(P) - 3(1 + b_+) \geq -p_1(P) + 2 = \dim S^n X + 2$$

という条件が必要である。(ウーレンベックのコンパクト化において測度が保たれていることから $n = -p_1(P)/4$ に注意しよう。) 特に、 $-p_1(P)$ を十分に大きく (つまりモジュライ空間の次元が十分大きく) 取っておけば、この仮定は満たされる。これが上で述べた stable range の条件である。

次に、 $\mu([\Sigma_i])$ がコンパクト化 $\overline{\mathfrak{M}}(P)$ のコホモロジー類として延びていることもチェックする必要がある。結論からいうと、 $[\Sigma_i]$ が 2 次のホモロジー類のときには、つねにコンパクト化まで延びるが、0 次のホモロジー類の時には、自明束の stratum には延びないことが分かっている。そのため不変量の定義にはやはり stable range の条件が必要になる。(あとの ‘ブローアップ公式’ の部分 §2.11 を参照のこと。)

2.10 リーマン計量の取り方に依存するか？

反自己双対接続の定義には、ホッジのスター作用素 $*$ が用いられるので、モジュライ空間 $\mathfrak{M}(P)$ はリーマン計量 g に依存して決まる。そこで、依存性を強調して $\mathfrak{M}_g(P)$ と表そう。(2.5) が generic な計量 g の取り方によらないことを示すためには、二つの generic 計量 g_0, g_1 を計量の空間の中の道 g_t で結んだときに、

$$\bigcup_{t \in [0,1]} \mathfrak{M}_{g_t}(P)$$

が、境界付きの多様体となって、 $\mathfrak{M}_{g_0}(P), \mathfrak{M}_{g_1}(P)$ の間のコボルディズムを与えることを示せばよい。(正確には、コンパクト化の間にコボルディズムを作り、その基本類 $[\bigcup_{t \in [0,1]} \overline{\mathfrak{M}}_{g_t}(P)]$ を定め、その境界が $[\overline{\mathfrak{M}}_{g_0}(P)] - [\overline{\mathfrak{M}}_{g_1}(P)]$ となることまで示さないといけない。) これは、再び、横断性の議論により保証される。ただし、定理 2.3 で注意したように、 $\mathcal{M}(X)$ 中の可約接続を持つ余次元 b_+ の部分多様体の和を避けて道を取る必要があるので、 $b_+ > 1$ という条件が必要である。

定理 2.6. $b_+ > 1$ のときには (2.5) は、計量 g の取り方によらずに定まる。

$b_+ = 1$ のときには、§2.4 における $P^{-1}(N_c)$ が計量の空間に余次元 1 の部分多様体を定める。その上にとつたリーマン計量では、 $H_A^0 \neq 0$ となる可約な反自己双対接続があらわれ、特に generic ではない。このとき、 $\mathcal{M}(X) \setminus \bigcup_c P^{-1}(N_c)$ の連結成分の中を動く限りは (2.5) は変化しない。ところが、 $P^{-1}(N_c)$ を越えると変化する。この変化をあらわすのが、‘壁越え公式’である。これについては、これ以上は深入りしないが、[10, §3.5] を参照のこと。

2.11 ブローアップ公式による stable range 条件の解消

二次元複素射影平面 CP^2 に、複素多様体としての向きと逆の向きを与えたものを \overline{CP}^2 と書く。 X と \overline{CP}^2 の連結和 $X \# \overline{CP}^2$ を X のブローアップといい、 \hat{X} であらわす。 X が複素曲面のときには、複素代数幾何の意味のブローアップは $X \# \overline{CP}^2$ と微分同相なので、この名称は混乱を生じない。

\hat{X} のホモロジー群は、 X のホモロジー群と、 \overline{CP}^2 中の直線 C のあらわす二次元ホモロジー類 $[C]$ の定める 1 次元空間の直和である。

$$H_*(\hat{X}, \mathbf{Q}) = H_*(X, \mathbf{Q}) \oplus \mathbf{Q}[C]$$

コホモロジー群でも同様である。 X 上の SO_3 -主束 P を取り、 \hat{X} 上の SO_3 -主束 \hat{P} を

$$w_2(\hat{P}) = w_2(P), \quad p_1(\hat{P}) = p_1(P) - 4$$

となるように取る。雑に言えば、 \hat{P} は P と \overline{CP}^2 上の $w_2 = 0, p_1 = -4$ の SO_3 -主束を連結和したものである。対応する反自己双対接続のモジュライ空間をそれぞれ $\mathfrak{M}(P), \widehat{\mathfrak{M}}(\hat{P})$ であらわすことにする。(2.3) により、その次元は

$$\dim \widehat{\mathfrak{M}}(\hat{P}) = \dim \mathfrak{M}(P) + 8$$

という関係にある。このとき、ブローアップ公式は、もしも $\mathfrak{M}(P)$ の次元が stable range にあれば

$$\int_{\widehat{\mathfrak{M}}(\hat{P})} \mu([C])^4 \cup \mu([\Sigma_1]) \cup \cdots \cup \mu([\Sigma_d]) = -2 \int_{\mathfrak{M}(P)} \mu([\Sigma_1]) \cup \cdots \cup \mu([\Sigma_d])$$

が $[\Sigma_i] \in H_*(X, \mathbf{Q})$ について成立することを主張する。

この公式を逆手に取って、stable range にないときにも不変量を定義することができる。すなわち、上のブローアップを何回も繰り返し、 $X_N := X \# \underbrace{\overline{CP}^2 \# \overline{CP}^2 \# \cdots \# \overline{CP}^2}_{N \text{ 個}}$ を考える。対応して、 SO_3 -主束 P_N を

$w_2(P_N) = w_2(P)$, $p_1(P_N) = p_1(P) - 4N$ となるように取る。このとき N を十分大きく取れば、反自己双対接続のモジュライ空間 $\mathfrak{M}(P_N)$ の次元は stable range にある。そこで、

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^N \int_{\mathfrak{M}(P_N)} \mu(C_1)^4 \cup \cdots \cup \mu(C_N)^4 \cup \mu([\Sigma_1]) \cup \cdots \cup \mu([\Sigma_d])$$

として、 $\mathfrak{M}(P)$ に対応するドナルドソン不変量を定義する。上のブローアップ公式から、これは十分大きな N にはよらず well-defined になる。これが一般の場合のドナルドソン不変量の定義である。

3 代数幾何におけるモジュライ空間によるアプローチ

反自己双対接続の方程式は、非線型偏微分方程式で、超越的な対象であり、具体的に調べるのは難しいものである⁴。ところが、最初にとった 4 次元多様体 X が、射影的代数曲面のときには、代数幾何的なアプローチで不変量を定義することができる。つまり、非線型偏微分方程式の解の代わりに正則ベクトル束を考えると、代数的にアプローチすることが可能になる。二つの関係は、アティヤ・シンガーの指数定理とリーマン・ロッホの定理の関係にある。前者は一般の楕円型微分作用素に関するもので、偏微分方程式を用いて定式化されるが、後者はドルポー作用素という特別な場合で、その場合は、代数的なアプローチが可能である。

3.1 ヒッチン・小林対応

反自己双対接続と正則ベクトル束の対応を与えるのが、ヒッチン・小林対応である。アティヤ・ボットのリーマン面の上のヤン・ミルズ接続の有名な論文に始まる、シンプレクティック幾何における運動量写像と幾何学的不変式論における安定性条件の対応の例なのであるが、ここには立ち入らず、結果のみを紹介する。

計量 g は、 X 上のケーラー計量であるとし、 ω を対応するケーラー形式とする。また X の向きは複素多様体としてのものであるとする。2 次の外積束 Λ^2 を複素化すると $\Lambda^2 \otimes \mathbf{C} = \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{1,1} \oplus \Lambda^{0,2}$ と分解する。このとき

$$\Lambda^+ \otimes \mathbf{C} = \Lambda^{2,0} \oplus \Lambda^{0,2} \oplus \mathbf{C}\omega, \quad \Lambda^- \otimes \mathbf{C} = \Lambda_{\omega^\perp}^{1,1}$$

となることが知られている。ただし第一式の右辺の最後の因子は、各点ごとにケーラー形式の定数倍の微分形式からなる自明束であり、第二式の右辺は各点ごとにケーラー形式と直交する微分形式からなるベクトル束である。

SO_3 主束の第二スティフェル・ホイットニー類 $w_2(P) \in H^2(X, \mathbf{Z}_2)$ のリフト $c \in H^2(X, \mathbf{Z})$ を取ると、 $U(2)$ 束 E で $c_1(E) = c$, $c_2(E) = -1/4p_1(P) + 1/4c^2$ となるものが取れる。また、 $U(2)$ 束 E を対応する階数 2 の複素ベクトル束と同一視しよう。 E 上の接続 A が反自己双対であるための必要十分条件は、上の分解から

$$F_A^{(2,0)} = 0, \quad F_A^{(0,2)} = 0, \quad F_A \wedge \omega = 0$$

である。ただし、 (F_A, ω) は各点ごとに ω との内積を取ったものである。接続 A でひねられた外微分作用素 d_A を $\partial_A + \bar{\partial}_A$ と $\Lambda^1(E) = \Lambda^{1,0}(E) \oplus \Lambda^{0,1}(E)$ に応じて分解しよう。これを拡張して、 $\partial_A: \Lambda^{p,q}(E) \rightarrow \Lambda^{p+1,q}(E)$, $\bar{\partial}_A: \Lambda^{p,q}(E) \rightarrow \Lambda^{p,q+1}(E)$ が定まる。このとき $F_A^{(2,0)} = \partial_A \circ \partial_A$, $F_A^{(0,2)} = \bar{\partial}_A \circ \bar{\partial}_A$ が成り立つ。したがって、上の式のうち、真ん中の条件は、 $\bar{\partial}_A$ の可積分条件であり、すなわち $\bar{\partial}_A$ が E 上に正則ベクトル束の構造を定めることと同値である。また、最初の条件は A が計量を保つという仮定のもとでは、真ん中の条件と同値である。すなわち、 E 上の反自己双対接続は、正則ベクトル束を定める接続で、 $F_A \wedge \omega = 0$ を満たすもののことである。

⁴例外はある。ALE 空間という特別な 4 次元多様体のときには、反自己双対接続のモジュライ空間は、行列に関する非線型方程式の解のモジュライ空間となる。これが、旗多様体の定義につながっていった。ただし、具体的に調べるためには、やはりここで取られているヒッチン・小林対応の類似を使う必要がある。

最後の式のトレースを取って X 上で積分すると、 $\int_X c_1(E) \wedge \omega = 0$ となり、これは位相的な条件で、一般には満たされないものである。そこで、最後の式を少し代えて

$$F_A \wedge \omega = \lambda \text{id}_E \omega^2$$

となる定数 λ が存在するという、アインシュタイン・エルミート接続とよばれるものを代わりに使う。両辺のトレースを取って積分すれば $\int_X c_1(E) \wedge \omega = \lambda \text{rank } E \int_X \omega^2$ となるので、 λ は E の第一チャーン類 (とケーラー形式 ω のコホモロジー類) で決まる位相的な量である。アインシュタイン・エルミート接続は E 上の反自己双対接続ではないが、対応する SO_3 主束 P に誘導される接続は反自己双対である⁵。さらに、 X が単連結という我々の仮定のもとでは、アインシュタイン・エルミート接続のモジュライ空間と、対応する SO_3 主束上の半自己双対接続のモジュライ空間は一致するので、実際にはモジュライ空間を考える限りなにも変更されていない。以下では $U(2)$ -束 E 上のアインシュタイン・エルミート接続のモジュライ空間を $\mathfrak{M}(E)$ 、もしくは計量を強調したいときには $\mathfrak{M}_\omega(E)$ であらわす。

逆に E は階数 2 の複素ベクトル束で、正則ベクトル束の構造を持つとしよう。すると X の開被覆 $\bigcup U_\alpha$ と各 U_α 上の E の局所自明化 $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^2$ であって、変換関数が正則になるものが存在する。このとき、局所自明化ごとに $\bar{\partial}$ を考えたものは、変換関数が正則であることから貼り合せて X 上の微分作用素を定める。これも $\bar{\partial}$ であらわす。 $\wedge^{p,q}(E) \rightarrow \wedge^{p,q+1}(E)$ であって、 $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$ を満たすものである。さらに E にエルミート計量が与えられたとしよう。(すなわち E を $U(2)$ 主束と同一視する仕方を与えるということ。) このとき、 E 上の計量を保つ接続 (すなわち $U(2)$ 主束上の接続) A であって $\bar{\partial}_A$ が上で与えた $\bar{\partial}$ に等しいものがただひとつ存在することがよく知られている。(チャーン接続とよばれることもある。) また、このようにして (計量から一意に) 決まる A がアインシュタイン・エルミート接続であるとき、計量はアインシュタイン・エルミート計量であるとよばれる。

X 上の正則ベクトル束は代数幾何的な対象であって、多くの研究がある。小林・ヒッチン対応は、アインシュタイン・エルミート計量が存在するための必要十分条件を代数幾何的な条件であらわす結果である。その代数幾何学的な条件を紹介する。以下しばらく、一般の階数のベクトル束 E を取り扱うことにする。

定義 3.1. X 上の正則ベクトル束 \mathcal{E} が、計量 ω (のケーラー類のコホモロジー類 $[\omega]$) に関して ω -スローブ安定であるとは、 \mathcal{E} の部分層 \mathcal{S} で $0 < \text{rank } \mathcal{S} < \text{rank } \mathcal{E}$ となるものに対して

$$\frac{1}{\text{rank } \mathcal{S}} \int_X c_1(\mathcal{S}) \wedge \omega < \frac{1}{\text{rank } \mathcal{E}} \int_X c_1(\mathcal{E}) \wedge \omega$$

が成立するときをいう。

また、上の不等式を \leq で置き換えたものが成立するときは、 ω -スローブ半安定という。

$\frac{1}{\text{rank } \mathcal{E}} \int_X c_1(\mathcal{E}) \wedge \omega$ は、 \mathcal{E} のスローブとよばれる。アインシュタイン・エルミート接続の定義に現れた定数 λ と本質的に同じものである。

安定性は、幾何学的不変式論に基づいて導入された概念であるので、すぐには意味は分からないと思う。しかも、 X が曲線のときにはモジュライ空間の代数幾何的な構成にぴったりと合うのだが、今の曲面の場合には後に述べるように若干の手直しが必要になる。

定理 3.2 (ヒッチン・小林対応). \mathcal{E} は、正則ベクトル束であるとする。このとき次は同値である。

- (1) \mathcal{E} は ω -スローブ安定である。
- (2) \mathcal{E} は、既約なアインシュタイン・エルミート計量を持つ。

さらに、(2) のアインシュタイン・エルミート計量は定数倍を除いて一意である。

ここでアインシュタイン・エルミート計量が既約であるとは、対応するアインシュタイン・エルミート接続が既約であるときをいう。または、 E が計量も込めて直和分解 $E_1 \oplus E_2$ したら、一方の成分は 0 にならない、というものとも同値である。既約でなければ、正則ベクトルバンドルとしても直和に分解する。

証明は、アインシュタイン・エルミート計量の実線型方程式に関する深い解析的な研究に基づく。

⁵ 高い階数のときも同様に $PU(r) = U(r)/S^1$ 主束に誘導される接続が反自己双対になる。

3.2 代数幾何的なモジュライ空間のコンパクト化

ヒッチン・小林対応により、階数、チャーン類を固定したとき、次の a)、b) の間に (集合としての) 全単射があることが分かる。

- a) ω -スローブ安定な正則ベクトル束の同型類
- b) 既約なアインシュタイン・エルミート接続の同型類

b) は、(反自己双対接続からは若干定義がかわっているが) 今まで扱ってきたモジュライ空間である。一方、a) は幾何学的不変式論に基づく概念の同型類の集合である。幾何学的不変式論とは、マンフォードがさまざまな代数幾何的な対象の同型類の全体にスキームとしての構造を入れるために導入したものであるから、当然なのであるが、アインシュタイン・エルミート接続の概念とはまったく別に、スキームの構造を持つことが分かっている。そして、下部構造としての古典位相空間を考えると、上の対応は同相写像であることが分かる。

しかし、ドナルドソン不変量を定義するためにはモジュライ空間のコンパクト化が必要である。b) のコンパクト化は、上で述べたウーレンベックのコンパクト化であるが、代数幾何的に使われる a) のコンパクト化はそれとは異なり、そのために理論がやや複雑になっている。

代数幾何では、 ω -スローブ安定性よりも次の安定性の方がよく使われる。ケーラー形式 ω の代わりに、豊富な直線束 H を取る。

定義 3.3. X 上のねじれのない接続層 \mathcal{E} が、豊富な直線束 H に関して安定⁶であるとは、 \mathcal{E} の部分層 S で $0 < \text{rank } S < \text{rank } \mathcal{E}$ となるものに対して

$$\frac{1}{\text{rank } S} \chi(S(nH)) < \frac{1}{\text{rank } \mathcal{E}} \chi(\mathcal{E}(nH))$$

が十分大きな $n \gg 0$ について成立するときをいう。ただし、 $\mathcal{E}(nH) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(nH)$ であり、 $\chi(\mathcal{E}(nH))$ はそのヒルベルト多項式である。 S についても同様。

また、上の不等式を \leq で置き換えたものが成立するときは、半安定という。

$[\omega] = c_1(H)$ のときには、

$$\frac{\chi(\mathcal{E}(nH))}{\text{rank } \mathcal{E}} = \frac{n^2}{2} \int_X \omega^2 + n \int_X \left(\frac{c_1(\mathcal{E})}{\text{rank } \mathcal{E}} - \frac{K_X}{2} \right) \cup \omega + \frac{\chi(\mathcal{E})}{\text{rank } \mathcal{E}}$$

が成り立つ。したがって、「 ω -スローブ安定 \Rightarrow 安定 \Rightarrow 半安定 $\Rightarrow \omega$ -スローブ半安定」が成立する。

安定層のモジュライ空間 $M_H(E) \equiv M_H$ を、階数、チャーン類が C^∞ ベクトル束 E の階数、チャーン類と等しい、安定な接続層の同型類の集合として定義する。上で少し述べたが、これには自然にスキームの構造が入る。さらに ω -スローブ安定な層のモジュライ空間は開部分スキームとなる。

半安定層のモジュライ空間は、これよりもやや複雑である。まず、半安定層のなす、接続層のアーベル圏の中の充満部分圏は、部分アーベル圏になることが示され、さらに \mathcal{E} が半安定であるとき、半安定部分層によるジョルダン・ヘルダー・フィルトレーション

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 \supset \mathcal{E}^1 \supset \dots \supset \mathcal{E}^\ell = 0$$

で、 $\text{gr}_i(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^i / \mathcal{E}^{i+1}$ が安定であり、 $\chi(\text{gr}_i \mathcal{E}(nH)) / \text{rank}(\text{gr}_i \mathcal{E}) = \chi(\mathcal{E}(nH)) / \text{rank } \mathcal{E}$ となるものが存在する。さらに、このとき $\text{gr}(\mathcal{E}) = \bigoplus \text{gr}_i(\mathcal{E})$ とおく。これはフィルトレーションの取りかたにはよらず、 \mathcal{E} から一意に決まる。そこで

定義 3.4. 二つの半安定層 \mathcal{E}, \mathcal{F} が S -同値であるとは、 $\text{gr } \mathcal{E}$ と $\text{gr } \mathcal{F}$ が同型であるときをいう。

⁶ ω -スローブ安定性との違いを明確にするために、ギーゼカ-安定ということもある。

半安定層のモジュライ空間 $\overline{M}_H(E) \equiv \overline{M}_H$ は、半安定層の全体を S -同値で割った商空間として定義される。簡単にいえば、 S -同値な二つの反安定層は、自然な位相に関して分離できないので、同じ点とみなす、ということである。これにはやはり、スキームの構造が入り、 M_H は開部分スキームとなる。さらにその中に ω -スロープ安定な正則ベクトル束の同型類の集合が開部分スキームとして入っている。 \overline{M}_H は、しばしばギーゼカ・丸山コンパクト化ともよばれる。

3.3 代数幾何的な不変量の定義

次に μ -写像の類似の定義を行う。ここでは、同じ記号 $\mu: H_*(X, \mathbf{Q}) \rightarrow H^*(\overline{M}_H, \mathbf{Q})$ であらわす。簡単のため、せつかく上で半安定の条件を準備したのではあるが、

仮定 半安定であれば自動的に安定になってしまう、

という状況で考える⁷。たとえば、 $\text{rank } E, (c_1(E), H), c_2(E) - \frac{1}{2}(c_1(E), c_1(E) - K_X)$ の最大公約数が 1 と仮定すれば、これは正しい。微分幾何的アプローチでは、 $w_2(P) \neq 0$ と仮定すると、ウーレンベック・コンパクト化から自明接続を除外することができて、簡単になることがあったが、それよりは少し弱い条件である。例えば、 $\text{rank } E = 2, c_1(E) = 0, c_2(E)$ 奇数、でもよい。一般に、安定層からなる M_H 上に制限すると、準普遍層 $\mathcal{U} \rightarrow M_H \times X$ が存在することが知られている。これは、ある重複度 p があって、 $\mathcal{U}|_{[\mathcal{E}] \times X}$ に制限すると、 $\mathcal{E}^{\oplus p}$ になっているというものである。($p = 1$ の場合が普遍層である⁸。) よって、今の仮定 $\overline{M}_H = M_H$ の下では、 \overline{M}_H 上に準普遍層が存在している。このとき、

$$\mu([\Sigma]) = \frac{1}{p} \left(c_2(\mathcal{U}) - \frac{rp-1}{2rp} c_1(\mathcal{U})^2 \right) / [\Sigma]$$

と定義すればよい。このとき

$$\int_{\overline{M}_H} \mu([\Sigma_1]) \cup \cdots \cup \mu([\Sigma_d]) \in \mathbf{Q}$$

を考えることができる。ここで、 \overline{M}_H は、スキームであるから、いかなる場合も基本類を持つ。しかし、(2.5) の微分幾何的な不変量と関連がつくとしたら、少なくとも $[\overline{M}_H]$ と $[\overline{\mathfrak{M}}(P)]$ のホモロジーの次数は同じでなければならない。したがって、 \overline{M}_H の次元が仮想次元に等しい、と仮定するのは自然なことである。(さもなければ、仮想的な基本類を考えるべきである。) では、その仮定はいつ成り立つのであろうか? 微分幾何的なアプローチの場合には、§2.6 でリーマン計量を generic に取れば、 P が自明束でない限り、もっと強く H_A^2 がすべての A について消え、特にこの仮定が成り立つと述べた。代数幾何で扱えるリーマン計量は、ケーラー計量のみであり、これは generic な計量からはほど遠い、special な計量である。したがって、この結果は期待できない。しかし、 \overline{M}_H の次元が仮想次元に等しい、というのは、 H_A^2 がモジュライのすべての点で消えるというよりもはるかに弱い条件で、 H_A^2 が残っているのが低い次元の部分スキームであることが分かれば十分である。この結果は、ドナルドソン、ツオ、フリードマン、オグラディらによって証明された。

定理 3.5. 階数 rank 、曲面 X 、偏極 H のみで決まる定数 C が存在して、モジュライ空間 M_H の仮想次元が C よりも大きければ、 $\text{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ の trace-free part が消えないような \mathcal{E} の集合は、真に次元が低い部分スキームとなる。特に、 M_H の次元は仮想次元に等しい。

さらに、 \mathcal{E} が ω -スロープ安定なベクトル束でないような \mathcal{E} の集合も、真に次元が低い部分スキームとなることも分かっている。

⁷条件を若干緩めることは可能ではあるが、いずれにせよ、微分幾何的なアプローチと同じ条件で定義するためには、ブローアップ公式を用いて定義する必要があると思われる。

⁸上で述べた仮定 $\text{gcd}(\text{rank}, (c_1, H), c_2 - \frac{1}{2}(c_1, c_1 - K_X)) = 1$ において、真ん中の (c_1, H) を (c_1, D) (D はすべての因子を走る) と置き換えても正しければ、普遍束が存在する。

3.4 不変量の比較

以下、再び階数 2 の場合に戻り、不安定層のモジュライ空間 $\overline{M}_H(E)$ をウーレンベックコンパクト化に係させる。これは、いささか複雑である。 $[\mathcal{E}]_S$ が不安定な接続層の S -同値類とする。 $\text{gr } \mathcal{E}$ でおきかえて、接続層の同型類と考えてよい。これは、 ω -スロープ不安定ではあるが、 ω -スロープ安定ではないので、上と同様に ω -スロープ不安定部分層によるジョルダン・ヘルダー・フィルトレーションを取り、さらに上と同様に商の直和を取ることによって、 $\text{gr}^\omega(\text{gr } \mathcal{E})$ を取る。これは、 ω -スロープ安定層の直和である。さらに、この double dual $(\text{gr}^\omega(\text{gr } \mathcal{E}))^{**}$ を取る。すると、 ω -スロープ不安定な正則ベクトル束の直和になる。よって、ヒッチン・小林によってアインシュタイン・エルミート接続が存在する。そこで $\overline{\mathfrak{M}}_\omega(E)$ を、ウーレンベックコンパクト化としたときに、写像 $\pi: \overline{M}_H(E) \rightarrow \overline{\mathfrak{M}}_\omega(E)$ を

$$\pi([\mathcal{E}]_S) = \left((\text{gr}^\omega(\text{gr } \mathcal{E}))^{**}, \sum_x n_x x \right)$$

と定義する。ただし、 n_x は $(\text{gr}^\omega(\text{gr } \mathcal{E}))^{**} / (\text{gr}^\omega(\text{gr } \mathcal{E}))$ の x における length であり、 $(\text{gr}^\omega(\text{gr } \mathcal{E}))$ の x における特異性の重みをあらわす。

定義から、 ω -スロープ不安定なベクトル束のなす開部分スキームに制限すると、恒等写像になる。

次の定理は、リー [7] とモルガン [9] によって示された。

定理 3.6. 上の写像 $\pi: \overline{M}_H(E) \rightarrow \overline{\mathfrak{M}}_\omega(E)$ は連続である。

(この部分までは、高い階数でも正しい。[5] 参照。)

前の節の最後に述べた結果により、 π は次元が低い部分スキームを除いて同型写像であり、したがって $\pi_*[\overline{M}_H(E)] = [\overline{\mathfrak{M}}_\omega(E)]$ が従う。すでに上に述べたように、ケーラー計量 ω は generic とは限らないから、§2.9 で Donaldson 不変量の定義に使った基本類 $[\overline{\mathfrak{M}}_g(E)]$ と今の $[\overline{\mathfrak{M}}_\omega(E)]$ が等しいことを示すためには、§2.10 の議論を拡張する必要があるが、これは可能で、計量でパラメトライズされたモジュライ空間の境界として、 $[\overline{\mathfrak{M}}_g(E)]$ と $[\overline{\mathfrak{M}}_\omega(E)]$ をつなぐことができる。ただし、向きの定め方には注意が必要である。 $\overline{M}_H(E)$ は (特異点を持つが) 複素多様体として定まる向きがあり、これは §2.7 で定めた向きとは一般には異なる。

あとは、微分幾何的に定義された $\mu([\Sigma])$ と、代数幾何的に定義された $\mu([\Sigma])$ が等しいことを証明すればよい。 $[\Sigma]$ が代数曲線で実現されているときは、前者も後者もモジュライ空間の因子として実現され、それが π で移りあうことも容易にチェックできる。一般の $[\Sigma] \in H_2(X)$ のときには、[9] を見てもらいたい。 $[\Sigma] \in H_0(X)$ のときには、[9] では代数幾何的な場合で、ブローアップ公式が成り立つので少なくとも不変量としては正しい、と主張されているが、ブローアップ公式の根拠は、O'Grady との private communication とされており、これは今のところ公表されていないように思われる。これは、詳細は書いていないが、[10] にもあるように、ブローアップ \widehat{X} 上のギーゼカ・丸山コンパクト化 $\widehat{M}_H(\widehat{E})$ から X 上のウーレンベックコンパクト化 $\overline{\mathfrak{M}}(E)$ への写像 $\widehat{\pi}$ を作り、(ただし $c_1(\widehat{E}) = c_1(E) - [C]$, $c_2(\widehat{E}) = c_2(E)$)

$$\widehat{\pi}_* \left(\mu(C)^3 \cap [\widehat{M}_H(\widehat{E})] \right) = \mu(\text{pt}) \cap [\overline{\mathfrak{M}}(E)]$$

を示せばよい。

参考文献

- [1] S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, Oxford Math. Monographs, Oxford Univ. Press, 1990.
- [2] D. Freed and K. Uhlenbeck, *Instantons and four manifolds*, MSRI Publ. 1, Springer, 1984.
- [3] R. Friedman and J.W. Morgan, *Smooth four-manifolds and complex surfaces*, Erg. Math. (3) 27, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

- [4] 深谷賢治, ゲージ理論とトポロジー, シュプリンガー現代数学シリーズ, 1995 年
- [5] D. Huybrechts and M. Lehn, The geometry of moduli spaces of sheaves, Aspects of Math., **E31**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.
- [6] H.B. Lawson, *The theory of gauge fields in four dimensions*, CBMS Regional Conf. Series in Math., AMS, 1985.
- [7] Li, J., *Algebraic geometric interpretation of Donaldson's polynomial invariants*, J. Differential Geom. **37** (1993) 417–466.
- [8] Mochizuki, T., *The theory of the invariants obtained from the moduli stacks of stable objects on a smooth polarized surface*, preprint, math.AG/0210211. revised v2 posted on 7 Jul 2006.
- [9] Morgan, J.W., *Comparison of the Donaldson polynomial invariants with their algebro geometric analogues*, Topology **32** (1993), 449-488.
- [10] 中島 啓, 吉岡 康太, インスタントンの数え上げと Donaldson 不変量, 数学, **59** (2007), 131–153.