moment map と Morse 理論

東北大学理学部 中島　啓

§1. Kähler manifold と moment map

Kähler 多様体 (X,ω) を与える。但し ω は，Kähler form である。X に Lie 群 G が作用し，その作用は正則かつ計量を保っているとする。G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の dual space を $\mathfrak{g}^*$ とする。

定義 1.1. 写像 $\mu\colon X \to \mathfrak{g}^*$ が moment map(運動量写像) であるとは次の条件を満たすときをいう。

(1) μ は G-equivariant である。

(2) 任意の $\xi \in \mathfrak{g}$ と接ベクトル $v \in TX$ に対して次が成り立つ。

$$\langle \xi, d\mu(v)\rangle = \omega(\xi^*, v)$$

ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその双対空間 $\mathfrak{g}^*$ の自然な pairing を表し，ξ^* は ξ の生成するベクトル場を表す。

例 1.2. 複素平面 $\mathbb{C}$ に標準的な計量を入れ，$G = S^1$ がスカラー倍で作用しているとすると，moment map $\mu\colon \mathbb{C} \to i\mathbb{R}$ は

$$\mu(z) = \frac{i}{2}|z|^2$$

で与えられる。

今 G がトーラス T^r のときを考える。moment map は存在するものと仮定する。このとき Lie 環 $\mathfrak{t}^r$ から元 ξ を取ってきて $\mathbb{R}$ 値関数 $f = \langle \mu, \xi\rangle$ を作り，これを Morse 関数として X のホモロジーを調べることを考える。すなわち

(A) $f = \langle \mu, \xi\rangle$ の臨界点を調べる。

(B) その臨界点での f の hessian の負の固有値の個数 (すなわち index) を調べる。

まず臨界点となるための条件を考えると，

$$df = 0 \iff \xi^* = 0 \iff \xi \text{ の生成する } T^r \text{ の部分群の作用の fixed point}$$

$$\iff \quad \xi \text{ の生成する } T^r \text{ の部分群の閉包の群の作用の fixed point}$$

となる。よって今 ξ を generic に取っておけば，臨界点は T^r 作用の fixed point に他ならない。x における接空間 T_xX には T^r が線型に作用する。X は Kähler 多様体であったから，T_xX は複素ベクトル空間とみなされ，T^r 作用は，複素線型であることに注意する。そこで T_xX を weight 分解する。

(1.3) $$T_xX = \bigoplus_m W^m \qquad \text{但し } W^m \text{ は weight}\, m \text{ に対応する固有空間}$$

すなわち T^r の元を $t = (t_1, t_2, \dots, t_r)$ と表したときに，$m = (m_1, m_2, \dots, m_r)$ $(m_k \in \mathbb{Z})$ であって，

$$W^m = \{v \in T_xX \mid t.v = \prod_k t_k^{m_k} v \quad \text{for all } t \in T^r\}$$

である。このとき T^r 作用の fixed point のなす集合 F の x を通る連結成分 F_α は，複素部分多様体になり，その x における接空間は W^0 に一致する。(一般に，次元は連結成分ごとに異なる。)

f が通常の意味で non-degenerate な Morse 関数となるためには，臨界点が discrete になっていなければいけない。よって $W^0 = 0$ でなければ f は通常の意味では，Morse 関数とはならない。Bott は [Bo] において，non-degeneracy 条件を次の様に緩めても Morse 理論が展開出来ることを示した。

定義 1.4. 多様体 X 上の C^∞ 関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ が Bott の意味で non-degenerate であるとは次の条件を満たすときを言う。

(1) f の臨界点の集合は (各連結成分ごとに) 部分多様体となる。

(2) f の hessian は，(1) の部分多様体の normal 方向には非退化である。

今，X はコンパクトであると仮定して，X に Riemann 計量を導入して通常の Morse 理論のときと同様に gradient flow

$$\frac{d}{dt} x_t = -\operatorname{grad} f(x_t)$$

を考えると，$t \to \infty$ のときに臨界点に収束することが示される。f の臨界点における Hessian の負の固有値の数を index と呼んで，次の多項式を考える。

$$\sum_C t^{d(C)} P_t(C)$$

但し，C に関する和は f の臨界点集合の連結成分を走り，$d(C)$ は C における index，$P_t(C)$ は C の Poincaré 多項式 (i.e. $P_t(C) = \sum_k t^k \dim H^k(C; \mathbb{R})$) をそれぞれ表す。このとき通常の場合と同様に Morse の不等式が成り立つ。すなわち $P_t(X)$ を X の Poincaré 多項式とするとき

$$\sum_C t^{d(C)} P_t(C) - P_t(X) = (1+t)Q(t)$$

と書き表されて，$Q(t)$ は全ての係数が非負の多項式である。

命題 1.5 [At]**.** 関数 f は Bott の意味で non-degenerate である。

証明:$x \in X$ を f の臨界点，すなわち T^r 作用の fixed point とする。先のように，$T_x X$ を T^r 作用によって固有分解する。このとき $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ と表すと，

$$\mathrm{Hess}\, f(v,v) = \sum_m \sum_k i m_k \xi_k \|v_m\|^2 \tag{1.6}$$

で与えられる。但し，v は接ベクトルであり，それを (1.3) に従って $v = \sum v_m$ と表した。分解 (1.3) に従って対角化されており，臨界点集合の x における接空間は W^0 であるから，normal 方向は $\bigoplus_{m \neq 0} W^m$ である。従って ξ が generic ならば，f の hessian は normal 方向に非退化である。

実は，さらに強く次のことが言える。

定理 1.7 [AB, Ki]**.** コンパクトな Kähler 多様体 (X, ω) への T^r 作用があったときに上のようにして構成した関数 f は，perfect である。すなわち

$$\sum_C t^{d(C)} P_t(C) = P_t(X)$$

が成り立つ。

ここではこの定理の一般的な証明は与えないが，次の仮定をおいて示す。

(仮定) T^r 作用の fixed point は，有限個の点からなる。

この仮定の下では，f は通常の意味で non-degenerate な Morse 関数となる。

証明:表示 (1.6) により，f の臨界点 x における index は，$\sum_k i m_k \xi_k < 0$ となるような m について $\dim_{\mathbb{R}} W^m$ を足し合わせたものに他ならない。ところが，W^m は複素ベクトル空

間であるから，その次元は偶数である。このとき Morse の不等式を見れば，$Q(t) = 0$ でなければならないこと，すなわち perfect であることは，容易に分かる。

なお、この証明は一般の状況には全く利用できない。

注意 1.8. 証明から分るように、上の仮定のもとでは Morse 関数 f は、偶数の指数しかもたない。よって特に、X の各連結成分は単連結であって、ホモロジー群は torsion free であり、奇数次のホモロジーは消える。

§2. 応用例

§1 の結果の応用例を与える。

1. $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ への S^1 作用

$\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ の同次座標を $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n]$ として，

$$[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \mapsto [tz_0 : z_1 : \ldots : z_n]$$

によって定まる S^1 作用を考える。fixed point set は二つの連結成分

$$C_0 = \{[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \mid z_0 = 0\} \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$$

$$C_1 = \{[1 : 0 : \ldots : 0]\} \quad (\text{一点})$$

からなる。C_0 から一点 $p_0 = [0 : 1 : 0 : \ldots : 0]$ をとって，非同次座標 $w_0 = z_0/z_1$, $w_2 = z_2/z_1$, $\ldots$, $w_n = z_n/z_1$ を考える。$\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ の p_0 における接空間は $\mathbb{C}^n = \{(w_0, w_2, \ldots, w_n) \mid w_i \in \mathbb{C}\}$ と同一視されて，作用は

$$(w_0, w_2, \ldots, w_n) \mapsto (tw_0, w_2, \ldots, w_n)$$

になる。よって，ここでの index $d(C_0)$ は 0 である。

一方，C_1 での非同次座標 $v_1 = z_1/z_0$, $v_2 = z_2/z_0$, $\ldots$, $v_n = z_n/z_0$ を取ると，接空間への S^1 作用は，

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto (t^{-1}v_1, t^{-1}v_2, \ldots, t^{-1}v_n)$$

となる。よってこの場合は $d(C_1) = 2n$ となる。(実際，Morse 関数 f が C_0 で最小値をとり，C_1 で最大値を取ることからも分かる。) よって

$$P_t(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = P_t(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) + t^{2n}$$

を得る。帰納法によって

$$P_t(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = 1 + t^2 + \ldots + t^{2n}$$

を得る。

2. ループ群 $\Omega\,\mathrm{SU}(2)$ への S^1 作用

次にもう少し難しい例を与える。以下の結果は，Pressley [P] から引いた。

S^1 から $\mathrm{SU}(2)$ への写像の全体を $\mathrm{Map}(S^1, \mathrm{SU}(2))$ と書く。写像の値に $\mathrm{SU}(2)$ の元を右から掛けることによって $\mathrm{SU}(2)$ が作用する。その商空間 $\mathrm{Map}(S^1, \mathrm{SU}(2))/\,\mathrm{SU}(2)$ をループ群といい，$\Omega\,\mathrm{SU}(2)$ と書く。(S^1 から $\mathrm{SU}(2)$ への写像のうち 1 を単位元に写すものと同一視されるから，特に群の構造をもつ。) S^1 の点を全て単位元に写す写像を e と書くと，e における $\Omega\,\mathrm{SU}(2)$ の接空間は

$$\{\varphi\colon S^1 \to \mathfrak{su}(2)\}/\{\text{ 定数写像 }\}$$

となる。φ を $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ に値をもつ関数と思って Fourier 変換して

$$\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}$$

と書く。値が $\mathfrak{su}(2)$ に入るための条件は $a_{-n} = -a_n^*$ となる。定数写像は，$a_n = 0$ ($n \neq 0$) となるものである。よって商空間は

$$\{\varphi(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} a_n e^{in\theta} \mid a_n \in \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C}), a_{-n} = -a_n^*\}$$

となる。概複素構造 I を

$$(I\varphi)(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} i\,\mathrm{sgn}(n) a_n e^{in\theta}$$

によって定める。これは e における接空間だけであるが，他の点の場合は左移動でうつすことによって I を定義する。このとき I が積分可能になることが知られている。また計量を

$$(\varphi, \psi) = \sum_n |n|(a_n, b_n), \quad \text{for } \varphi = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} a_n e^{in\theta},\ \psi = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} b_n e^{in\theta}$$

によって定めると，Kähler 計量になることも知られている。複素接空間は

$$\{\varphi(\theta) = \sum_{n>0} a_n e^{in\theta} \mid a_n \in \mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})\}$$

となる。

S^1 作用を

$$\Omega\,\mathrm{SU}(2) \ni [\Phi] \mapsto [e^{it}.\Phi] \qquad 但し\ (e^{it}\Phi)(\theta) = \Phi(t+\theta)$$

によって定める。ここで [ ] は SU(2) の作用による同値類を表している。この作用が，正則かつ計量を保つことは確かめられる。

このとき moment map は，エネルギー関数

$$E(\Phi) = \int_{S^1} |d\Phi|^2$$

の定数倍になることが分かる。(Bott は，エネルギー関数を Morse 関数として $\Omega\,\mathrm{SU}(2)$ を調べているが [Bo2]，moment map として捉えていたかどうかは分からない。) $\Omega\,\mathrm{SU}(2)$ は無限次元多様体なので，Morse 理論を使うときには注意が必要だが，エネルギー関数は Palais-Smale の条件 (C) を満たして Morse 理論が普通のときと全く同様に使えることが知られている。

$[\Phi]$ を S^1 作用の fixed point としよう。よって $[e^{it}.\Phi] = [\Phi]$ すなわち，ある $a_t \in \mathrm{SU}(2)$ が存在して，$\Phi(t+\theta) = \Phi(\theta)a_t$ となる。$\Phi(0) = 1$ となるように Φ を正規化しておくと，$a_t = \Phi(t)$ となり，条件は $\Phi(t+\theta) = \Phi(\theta)\Phi(t)$ と書ける。すなわち Φ は S^1 から SU(2) への準同型写像である。従って fixed point set は，可算無限個の連結成分

$$C_m = \{\Phi(\theta) = g \begin{pmatrix} e^{im\theta} & 0 \\ 0 & e^{-im\theta} \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in \mathrm{SU}(2)\} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

からなる。C_0 は一点であり，C_m $(m \neq 0)$ は $\mathrm{SU}(2)/S^1 = \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ となる。

$m > 0$ のとき，上の式で $g = 1$ となっているような $\Phi \in C_m$ をとってくる。Φ における複素接空間への S^1 作用を，定置写像 e の所に左移動して計算すると

$$\xi = \sum_{n>0} a_n e^{in\theta} \mapsto \sum_{n>0} e^{int}\,\mathrm{Ad}(\Phi(t)) a_n e^{in\theta}$$

となる。$\mathrm{Ad}(\Phi(t))$ の $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ への作用は，

$$\mathrm{Ad}(\Phi(t))\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \mathrm{Ad}(\Phi(t))\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=e^{2imt}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{Ad}(\Phi(t))\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=e^{-2imt}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

であることに注意すると，負の weight を持つ接ベクトルは

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}e^{in\theta}\qquad(0<n<2m)$$

となって，$2m-1$ 次元あることが分かる。よって $d(C_m)=4m-2$ である。したがって

$$P_t(\Omega\,\mathrm{SU}(2))=1+\sum_{m>0}t^{4m-2}(1+t^2)=\sum_{m\geq 0}t^{2m}$$

を得る。

3. ALE 空間上の反自己双対接続のモジュライ空間への $S^1\times T^r$ 作用

X を ALE 空間とし、その複素構造は $\mathbb{C}^2/\Gamma$ の minimal resolution になっているものとする。$\mathbb{C}^2/\Gamma$ には

$$(z_1,z_2)\bmod\Gamma\mapsto(tz_1,tz_2)\bmod\Gamma$$

によって S^1 が作用するが、この作用は正則かつ計量を保つように X 上の作用に lift できることが知られている。

E を X 上の hermitian vector bundle とする。X の end は $S^3/\Gamma\times(R,\infty)$ と同相であるが、その E の end への制限上の平坦な接続 A_0 を固定しておく。(A_0 は、Γ の表現により定まる。) そこで E 上の反自己双対接続のモジュライ空間 $\mathfrak{M}$ を考える。もう少し詳しく説明しよう。

$\mathcal{A}^{\mathrm{asd}}$ を E 上の反自己双対接続 A で

$$A-A_0=O(r^{-2}),\quad D(A-A_0)=O(r^{-3}),\dots$$

という漸近挙動を持つものの全体とする。E のゲージ変換 h のうち

$$h-1_E=O(r^{-1}),\quad D(h-1_E)=O(r^{-2}),\dots$$

という漸近挙動を持つものの全体を $\mathcal{G}_0$ と書く。$\mathcal{G}_0$ は $\mathcal{A}^{\mathrm{asd}}$ に作用する。その商空間

$$\mathfrak{M}=\mathcal{A}^{\mathrm{asd}}/\mathcal{G}_0$$

をモジュライ空間という。

事実 2.3.1. $\mathfrak{M}$ は、smooth な多様体であって X の hyper Kähler 構造から誘導される自然な hyper Kähler 構造を持つ。

反自己双対接続 A のゲージ同値類 $[A]$ における $\mathfrak{M}$ の接空間は、$E^* \otimes E$ の section であって

$$d_A^+ \alpha = 0, \quad d_A^* \alpha = 0, \quad \alpha \in L^2 \tag{2.3.2}$$

を満たすものの全体の作る線型空間と同一視される。よって、L^2 計量が、$\mathfrak{M}$ 上の Riemann 計量を与える。また、X の Kähler form を ω とするとき、

$$\Omega(\alpha, \beta) = \int_X \mathrm{tr}(\alpha \wedge \beta) \wedge \omega \qquad \alpha,\ \beta \text{ は (2.3.2) を満たす。}$$

が、$\mathfrak{M}$ の Kähler form を与える。

上の S^1 作用は、E に end では 1_E になるように lift できることが知られている。したがって $\mathfrak{M}$ にも S^1 が作用する。この作用は、正則かつ計量を保つ。ALE 空間 X への S^1 作用の moment map を $\mu\colon X \to i\mathbb{R}$ とするとき、$\mathfrak{M}$ への S^1 作用の moment map は、

$$\int_X \mu\, \mathrm{tr}(R_A^2)$$

で与えられる。ここで、R_A は A の曲率形式である。

$\mathfrak{M}$ には、まだ symmetry がある。E および A_0 の S^3/Γ への制限を考え、その gauge 群の元で、A_0 を保つものの全体を G_0 とする。このとき上の $\mathcal{G}_0$ の代わりに、無限遠で G_0 の元に収束するようなゲージ変換の全体 $\mathcal{G}$ を考える。このとき商群 $G_0 = \mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ は、$\mathfrak{M}$ に作用する。この作用は、hyper-Kähler 構造を保つ。G_0 は有限次元のコンパクトなリー群である。G_0 の作用に関する moment map を与えよう。$\xi \in \mathfrak{g}_0$ を $E^* \otimes E$ の S^3/Γ への制限の section と思うことにする。このとき moment map と ξ の pairing を取ったものは、

$$\lim_{r \to \infty} \int_{S_r} i\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \mathrm{tr}(\xi R_A) \wedge \omega$$

で与えられる。ここで、r は X のある点からの距離関数で、S^r は、距離が r になる集合である。また、i は内部積をあらわす。

G_0 の maximal torus を T^r とする。

(仮定) X は、A_n 型とする。

このとき、Γ の既約表現は全て 1 次元であり、E, A_0 を S^3/Γ に制限したものは line bundle の直和に分解する。特に、上の r は E の rank に等しい。

上の S^1 作用とあわせて、$S^1 \times T^r$ の作用を得る。この作用に関する moment map を用いて Morse 理論を展開することを考える。

補題 2.3.3. E の接続の列で、X の点に曲率が集中するものがないとき、$\mathfrak{M}$ の計量は完備である。

証明は、[KN] を参照のこと。上の条件をみたすようなモジュライ空間の例は豊富にある。計量が完備かつ、moment map による gradient flow が X のコンパクト集合に留まることがいえれば、§1 の結果はそのまま成り立つ。

補題 2.3.4. 補題 2.3.3 と同じ条件の下、§1 の ξ を適当に選ぶと、f による gradient flow は、X のコンパクト集合に留まる。

この補題は、先に与えた moment map の具体的な表示を使うと証明できる。key となるのは、X への S^1 作用の moment map μ が、無限遠で ir^2 という漸近挙動をすることである。

補題 2.3.5. $S^1 \times T^r$ 作用の fixed point は、line bundle の直和に分解するような可約接続の $\mathcal{G}_0$-orbit に他ならない。

証明:接続 A が、T^r 作用で fix されるのは、E が、line bundle の直和に分解して、

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_r,$$

A がその分解を保つことが必要十分である。ALE 空間では、line bundle 上の反自己双対接続のモジュライ空間は 1 点からなる。したがって、L_k への A の制限は S^1 作用で固定される。よってその直和である A も S^1 作用で固定される。

よって、X 上の line bundle を分類すれば fixed point が分ることになる。line bundle は、first Chern class と無限遠での挙動とで unique に定まる。高々有限個しかないことが分る。特に、次が分る。

系 2.3.6. ALE 空間が A_n 型であって、補題 2.3.3 の仮定を満たすとき、モジュライ空間 $\mathfrak{M}$ 上に§1 のようにして moment map から関数 f を作ると、普通の意味で non-degenerate な Morse 関数を得る。したがって注意 1.8 によって、$\mathfrak{M}$ の各連結成分は単連結であって、ホモロジー群は torsion free であり、奇数次のホモロジーは消える。

次に、fixed point における index を調べる。$[A]$ を fixed point とし、上のように対応する line bundle への分解を取る。このとき、$[A]$ における $\mathfrak{M}$ の接空間は、

$$T_{[A]}\mathfrak{M} = \bigoplus_{k,l} H^1(L_k^* \otimes L_l)$$

と分解する。但し、ここで $H^1(L_k^* \otimes L_l)$ とは、$L_k^* \otimes L_l$-valued の 1-form α であって、(2.3.2) を満たすものの全体のなすベクトル空間とする。S^1 作用は、上の分解を保つから、あとは各成分 $H^1(L_k^* \otimes L_l)$ への S^1 作用を調べればよいことになる。これは、例えば Donnelly によって S^1-equivariant version のときに拡張された Atiyah-Patodi-Singer の境界付き多様体の指数定理を用いることによって可能である。

定理 2.3.7. 上の方法で、$\mathfrak{M}$ のホモロジーを計算することができる。

さらにある仮定をおくと、Young 図式による記述が可能である。これは、春の学会のときに述べたので省略することにする。

文献

[At] M.F. Atiyah, Convexity and commuting Hamiltonians, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), 1–15.

[AB] M.F. Atiyah and R. Bott, The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. **362** (1982), 523–615.

[Bo] R. Bott, Nondegenerate critical manifolds, Ann. of Math. **60** (1954), 248–261.

[Bo2] ———, An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 251–281.

[Ki] F.C. Kirwan, Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry, Mathematical Notes, Princeton Univ. Press, 1985.

[KN] P.B. Kronheimer and H. Nakajima, Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons, Math. Ann. **288** (1990), 263–307.

[P] A.N Pressley, The energy flow on the loop space of a compact Lie group, J. London Math. Soc. **26** (1982), 557–566.