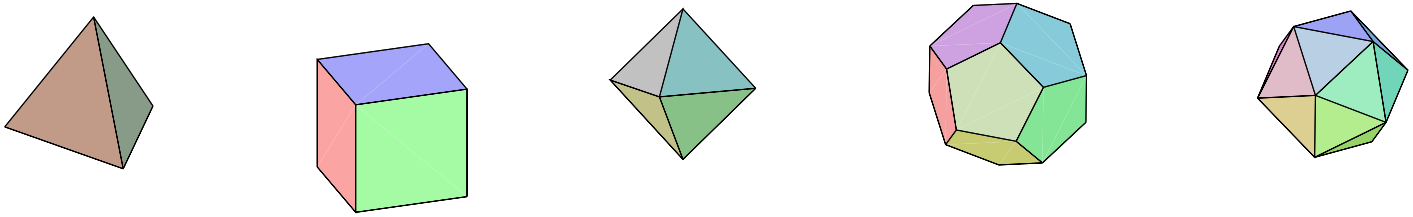
箙の表現とルート系

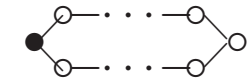
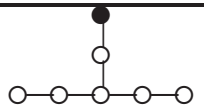
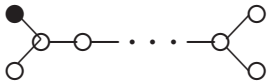
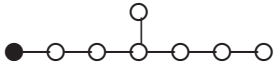
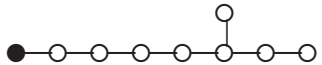
中島 啓

京都大学・大学院理学研究科

第 42 回 玉城嘉十郎教授記念公開学術講演会

2003/11/19



タイプ	拡大ディンキン図式		
A_n		E_6	
D_n		E_7	
		E_8	

- 黒丸を除いたものが, 通常のディンキン図式
- 下の添字は白丸の数
- もともとは, リー環の分類に現われた

鏡映変換

ディンキン図式のような頂点と辺からなる有限グラフを考える

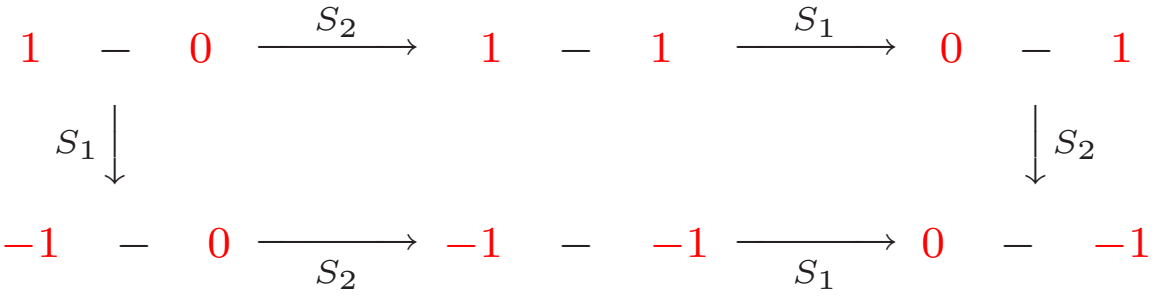
ただし, 頂点を自分自身に結ぶ辺はないとする

グラフの各頂点に, 整数をのせる

頂点 i における鏡映変換 S_i を次のように定める

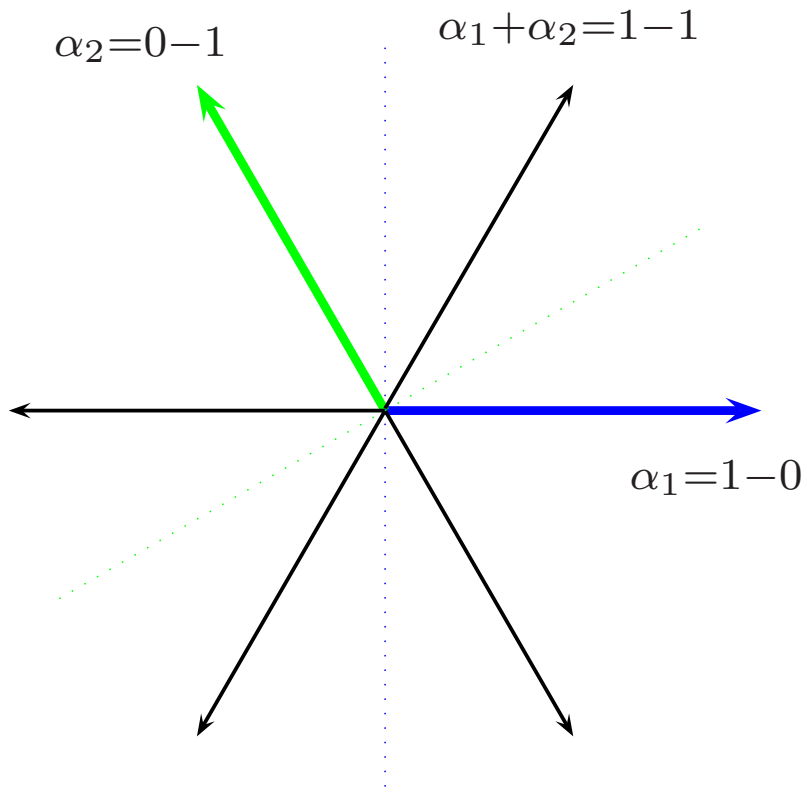
- i 以外の頂点の数は変えない.
- 頂点 i の数は, (i につながった頂点の数の和 - 頂点 i の数) で置き換える.

例.



例.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & - & 0 & \xrightarrow{S_2} & 1 & - & 1 & \xrightarrow{S_1} & 0 & - & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle S_1} & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle S_2} \\
-1 & - & 0 & \xrightarrow[S_2]{} & -1 & - & -1 & \xrightarrow[S_1]{} & 0 & - & -1
\end{array}$$



α_i : 頂点 i の上に 1, その他の頂点の上に 0 をおいたベクトル

ルート (正確には実ルート) とは, α_i $(i \in I)$ たちに鏡映変換を次々と適用して得られるベクトルのこと

Δ : ルートの全体の集合

定理. ディンキン図式のとき, Δ は有限集合で, 逆に有限集合になるのは, ディンキン図式のときに限る.

例.
- A_2 型のとき, 先の 6 個
- E_8 型のとき $\#\Delta = 240$ 個!

注.
- すべての成分が正か, すべての成分が負かのいずれかになる
- α がルートならば, $-\alpha$ もルート

箙の表現

箙とは, 有限グラフの各辺に向きを入れたもの

箙の表現とは,

- 各頂点の上に複素ベクトル空間をおき,
- 各辺の上にその向きに線形写像をおいたもの

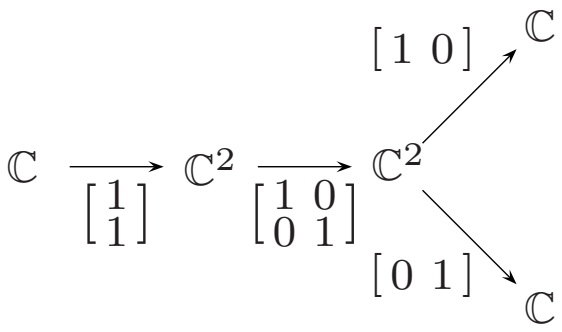


図 1: 箙の表現の例

問題. 箙の表現を, ‘同型’ なものを同じと見て分類せよ.

例 1. ジョルダン箙 (Jordan quiver) の場合

正方行列 A を PAP^{-1} で移り合うものは同型として分類

$=$ ジョルダン標準形を求める問題

答. $J_n(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1 \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & x \end{pmatrix}$ の直和

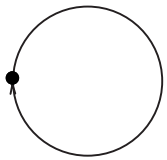


図 2: ジョルダン箙

例 2. A_2 型箙の場合　$\mathbb{C}^r \xrightarrow{A} \mathbb{C}^s$

行列 A を PAQ^{-1} で移り合うものは同型として分類

$=$ 行列の標準形を求める問題

答. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$

直和分解できないものは, $\mathbb{C} \to 0$, $0 \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C}$ の三種類

直和に分解できないものを直既約という

定理 (Gabriel). ディンキン図式に向きをいれた箙に対して,

直既約な箙の表現 $\longleftrightarrow$ 成分が正のルート

という一対一対応が, 表現の次元を並べることによって与えられる.

(Bernstein-Bernstein-Gelfand による) 証明は, 鏡映変換を表現のレベルで実現することでなされる. (鏡映関手)