三角の Newton 多角形を持つ Laurent 多項式の藻類

植田 一石　大阪大学理学研究科
山崎 雅人　東京大学理学系研究科

代数的トーラス $(\mathbb{C}^\times)^n$ の部分多様体のアメーバは Gelfand、Kapranov および Zelevinsky によって導入された対象であり、対数写像

$$
\begin{array}{ccc}
(\mathbb{C}^\times)^n & \to & (\mathbb{C}/\sqrt{-1}\mathbb{Z})^n \\
\Psi & & \Psi \\
(x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi}(\log x_1, \dots, \log x_n)
\end{array}
$$

による像の実部として定まる $\mathbb{R}^n$ の部分集合を指すが、実代数幾何やトロピカル幾何、数理物理などとの関係で近年注目を集めている．

このアメーバの親戚として、alga（藻類）と呼ばれる対象が物理学者の Feng、He、Kennaway および Vafa [1] によって導入された．これは対数写像の像の虚部として定まる実 n 次元のトーラス $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ の部分集合を指し、いわばアメーバの「虚部」のようなものである．

2 変数の Laurent 多項式

$$W = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{m,n} x^m y^n$$

に対し、$\{(m,n) \in \mathbb{Z}^n \mid a_{m,n} \neq 0\}$ の凸包として定まる多角形 Δ を W の Newton 多角形と呼ぶ．この Δ から Hanany と Vegh [2] の方法によってトーラス $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ 上の 2 色グラフが定まるが、この 2 色グラフが藻類と密接に関係することが [1] において予想された．我々は [4] でこの予想を Δ が三角形の場合に次のように定式化し、証明した：$\mathbb{R}^2$ 内の格子三角形に対し、その頂点に対応する単項式の和として得られる Laurent 多項式を W_Δ とおく．すると、W_Δ の零点 $W_\Delta^{-1}(0)$ の alga は偶数個の開三角形 $U_1, \dots, U_{2N}$ とその頂点たち $E_1, \dots, E_{3N}$ の集合の和集合になり、$W_\Delta^{-1}(0)$ からその alga への写像は U_i の逆像に制限すると微分同相写像を与える．ここで、各々の頂点は二つの三角形に共有されている．さて、トーラスに向きを一つ選んで固定しておき、この微分同相写像が向きを保つときに U_i の重心に白丸を、向きを保たないときに黒丸を置く．さらに、2 つの開三角形が頂点を共有するときにそれらの重心を辺で結ぶ操作を全ての三角形の組に対して行うと、トーラス上のグラフで、その頂点が白と黒の 2 色に塗り分けられたものを得る．これが 2 色グラフになる（つまり、任意の辺は異なる色の頂点を結ぶ）ことは容易に分かるが、実はこれが Hanany と Vegh の方法によって Δ から得られる brane tiling に対応する 2 色グラフになる．例として、

$$W_\Delta(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}$$

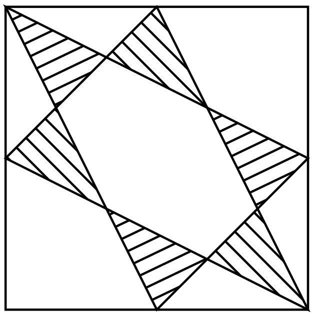

図 1: $W_\Delta^{-1}(0)$ の alga

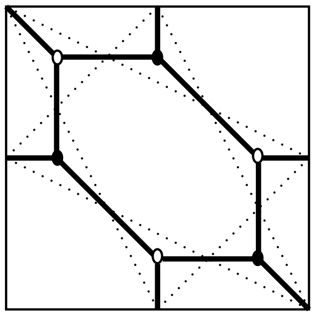

図 2: 対応する 2 色グラフ

の場合の $W_\Delta^{-1}(0)$ の alga と対応する 2 色グラフを図 1 と図 2 に示す.

また、一般にトーラス上の 2 色グラフに対してその特性多項式と呼ばれる Laurent 多項式が定義される（例えば [3] を見よ）が、われわれは格子三角形 Δ から Hanany と Vegh のアルゴリズムによって得られる 2 色グラフの特性多項式の Newton 多角形が Δ と一致することも証明した（ただし、この特性多項式は一般に W_Δ とは一致しない）. これらの結果を模式的にまとめると次のようになる：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\Delta：\text{格子三角形}} \arrow[d] & & \boxed{\text{特性多項式}} \arrow[ll] & \\
\boxed{W_\Delta^{-1}(0)\ \text{の alga}} \arrow[rr] & & \boxed{\text{トーラス上の 2 色グラフ}} \arrow[u] \arrow[r] & \boxed{\text{McKay quiver}}
\end{tikzcd}$$

参考文献

[1] Bo Feng, Yang-Hui He, Kristian D. Kennaway, and Cumrun Vafa. Dimer models from mirror symmetry and quivering amoebae. hep-th/0511287, 2005.

[2] Amihay Hanany and David Vegh. Quivers, tilings, branes and rhombi. hep-th/0511063, 2005.

[3] Richard Kenyon, Andrei Okounkov, and Scott Sheffield. Dimers and amoebae. math-ph/0311005.

[4] Kazushi Ueda and Masahito Yamazaki. A note on brane tilings and McKay quivers. math.AG/0605780, 2006.