

トーリック佐々木-Einstein 多様体の理論の最近の進展

山崎雅人*

東京大学理学系研究科物理学専攻
平成 19 年 7 月 22 日

目次

1	はじめに	2
2	佐々木多様体の基礎	2
2.1	佐々木多様体の定義	2
2.2	佐々木多様体の登場人物	3
2.3	佐々木多様体の分類	6
2.4	トーリック佐々木-Einstein 多様体	6
3	5次元佐々木-Einstein 多様体の計量	7
3.1	regular, quasi-regular な計量	7
3.2	irregular な計量の具体的構成: $Y^{p,q}$ と $L^{a,b,c}$	10
3.3	佐々木-Einstein 計量の存在と一意性	14
4	AdS/CFT 対応	16
5	籠と a-maximization	17
5.1	関係付の籠とスーパーポテンシャル	17
5.2	Hanany-Vegh のアルゴリズム	19
5.3	Toric Duality	22
5.4	a-maximization	23
6	Volume Minimization (Z-minimization)	26
6.1	一般の場合	26
6.2	トーリックの場合	28
6.3	同変指数との関係	30
7	a-maximization は volume minimization である	31
7.1	5次元トーリック佐々木-Einstein 多様体の場合	31
7.2	7次元の佐々木多様体の場合	32
8	Calabi-Yau cone と籠との対応	33
8.1	導来圏による定式化	33
8.2	籠ゲージ理論の真空のモジュライによる定式化	34

*yamazaki.at.hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

9	最後に	36
10	参考文献	37

概要

佐々木多様体は、その名前に佐々木重夫氏の名前を冠することからも分かるように、一時期、特に日本では盛んに研究されたが、その後は余り数学者の関心を集めなくなってしまった。しかし、近年、超弦理論の AdS/CFT 対応の文脈で佐々木-Einstein 多様体が大いに活躍し、その意義が見直されつつある。これらの発展の多くは、物理 (AdS/CFT 対応) に動機づけられたものであるが、その物理的背景を忘れ、純粹に幾何的意味を考えても興味深いものである。本稿では、トーリック佐々木-Einstein 多様体の最近の発展 (例えば体積や Reeb ベクトルの決定、計量の存在、具体的構成や一意性等) について述べると同時に、その簡との関わりについて述べる。

1 はじめに

初めに、第 4 回城崎新人セミナーに参加させて頂き、また講演の機会を与えてくださったこと、更に今回のセミナーの企画・運営等々に尽力された事に対し、関係諸氏に感謝の意を表したい。

本稿の内容は、筆者が城崎新人セミナーで話した内容に、2006 年 10 月の第 12 回複素幾何シンポジウム、2007 年 6 月の東京幾何セミナーで話した内容を適宜加えるなどして、大幅に加筆修正したものである。主たる読者としては、これまで佐々木-Einstein 多様体について触れたことのない数学者を想定しており、この分野の面白さを知っていただくことを目的にしている。また、一部の記述は、この問題に関心のある物理学者にとっても参考になるかもしれない。

佐々木多様体の歴史は実は古く、その概念は少なくとも 1960 年の佐々木重夫先生による論文 [1] に遡る。その後、日本の研究グループを中心として盛んに研究が行われたが、いつしか佐々木多様体を研究する人はあまりいなくなってしまった。2000 年頃から、Boyer-Galicki などが幾つかの重要な成果を挙げ佐々木多様体の意義が再発見されるようになった。その後、2004 年ごろから 2, 3 年の間に、物理の発展にも刺激されて、佐々木多様体の研究が大きく進展することになった。本稿が目指すのは、その 2004 年以降の研究の (部分的な) 解説である。

残念ながら、これらの発展の全てが数学的に厳密に定式化された訳ではなく、幾つかの記述は数学的に完全に厳密とは言えないが、数学的に明確にできるところはそうするように努めたつもりであるし、また逆に言えば、数学としてやるべき事がまだ数多く残されていると言うこともできよう。重要な論文の幾つかが物理の言葉で書かれていることが、数学者をこの問題に近づきやすくしているきらいはないだろうが、数学にとってもこれは非常に重要な問題であるというメッセージをお伝えできればと思う。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、佐々木多様体の基礎的な事項について簡単に述べた後 (§2)、5 次元佐々木-Einstein 多様体の計量の存在とその具体的構成について述べる (§3)。次に、AdS/CFT 対応 (§4) についてまず概要を述べる。簡側 (§5) および佐々木側 (§6) の各々についてより詳細に述べた後、それらの対応を定式化する (§7)。最後に、Calabi-Yau cone と簡との対応についても述べる (§8)。

2 佐々木多様体の基礎

2.1 佐々木多様体の定義

まず、佐々木多様体の定義を与えておこう。後で述べるように、幾つかの同等な定義が存在するが、もっとも簡潔で分かりやすいのは次の定義である：

定義 2.1. (S, g) をコンパクト Riemann 多様体とする。このとき、 (S, g) が佐々木であるとは、その計量錐 (metric cone) $(C(S), \bar{g}) = (\mathbb{R}_+ \times S, dr^2 + r^2g)$ が Kähler 多様体であることをいう。 ■

但し、 r は \mathbb{R}_+ の座標である。また、 \mathbb{R}_+ となっているので、 $r = 0$ の点は除かれていることに注意しよう。実際、後から出てくる例では、 S^{2n-1} の例を除いて、 $r = 0$ の点は特異点になっている。

もう一つの注意すべきなのは、以下の議論では、簡単のため、佐々木(-Einstein)多様体という時に、metric g を書かずに単に S と書いてしまうことも多いが、実際には計量も同時に指定されていると思うべきである。

また、佐々木多様体の特別なクラスとして、佐々木-Einstein 多様体を定義しておこう。

定義 2.2. (S, g) をコンパクト Riemann 多様体とする¹。このとき、 (S, g) が佐々木-Einstein であるとは、その計量錐 $(C(S), \bar{g}) = (\mathbb{R}_+ \times S, dr^2 + r^2g)$ が Kähler かつ Ricci 平坦 (つまり、Calabi-Yau) であることをいう。

ただし、ここで Ricci 平坦とは、Ricci 曲率が消えることを指す。また、 $C(S)$ 上の Ricci 曲率と S 上の Ricci テンソルとの間の関係より、この条件は、 S の Ricci 曲率が

$$Ric = 2(n-1)g \tag{2.1}$$

を満たす、と書き直すこともできる。

佐々木-Einstein 多様体の具体例については、後から詳しく述べるが、ここでは最も簡単な例だけをあげておこう。

例 2.3. $(2n-1)$ 次元球 S^{2n-1} (に標準的な計量を入れたもの) は、佐々木-Einstein 多様体の例である。実際、その計量錐をとると、 \mathbb{C}^n となるが、これは明らかに Kähler かつ Ricci 平坦である。

さて、これらの定義からも分かるように、佐々木(-Einstein)多様体の幾何学は、Kähler(-Einstein)多様体の幾何学の奇数次元類似とでもいうべきものであり、実際、Kähler-Einstein の時に培われてきたテクニックのうち幾つかは、佐々木-Einstein の時にも有効である。また、すぐ後で述べるように、佐々木多様体が regular な時には、佐々木多様体の話は一つ次元の低い Kähler-Einstein 多様体の話に帰着するので、その意味で、前者は後者を含んでいるとみなすこともできる。

ここで、今後の便宜のため、記号を一つ用意しておく。Kähler 多様体は複素多様体であるので、その次元は実次元で考えると偶数であり、よって佐々木多様体の次元は奇数次元である。そこで以下では $\dim S = 2n-1$, $\dim C(S) = 2n$ と書くことにしよう。

2.2 佐々木多様体の登場人物

佐々木多様体には幾つかの重要な概念が存在する。以下、それについて述べていこう。

まず、 $C(S)$ は Kähler 多様体であったから、複素構造が存在する。それを J と書くことにしよう。

$$\eta = J \left(\frac{dr}{r} \right) \tag{2.2}$$

とする。この η は $i : S \rightarrow C(S)$ を用いて S に引き戻すことができる。記号を混同して、それも η と書くことにしよう。このとき、 η は S の接触構造を定めていることが分かる。つまり、 $\eta \wedge (d\eta)^{n-1} \neq 0$ 。

接触多様体の定義

定義 2.4. M を奇数次元の多様体 ($\dim M = 2n-1$) とするとき、 M が接触多様体 (contact manifold) であるとは、 M 上にある 1 形式 η (接触 1 形式、contact 1-form) が存在して、 $\eta \wedge (d\eta)^{n-1}$ が M 上どこでも 0 にならないという条件を満たすことである。

を思い出すと、これは (S, η) が接触多様体であることを示している。そこで、この η は接触 1 形式、あるいは特性 1 形式 (characteristic 1-form) と呼ばれる。

さて、接触多様体には、リーベクトル場 (Reeb vector field)、あるいは特性ベクトル場 (characteristic vector field) と呼ばれる重要な概念が存在する：

¹ S は Sasaki の S から取ったものである。その他の記号としては、 Y や Link の意味で L が使われていることもある。

定理 2.5. 接触多様体 (M, η) に対し、以下の条件を見たすベクトル場 ξ が存在し、かつそれは一意に定まる：

$$\eta(\xi) = 1, d\eta(\xi, -) = 0 \quad (2.3)$$

実は、佐々木多様体の場合には、 ξ を具体的に書くことができ、次の式で与えられる：

$$\xi = J \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (2.4)$$

この ξ についても、 $i: S \rightarrow C(S)$ を使って S に引き戻したものと混同して同じ記号を用いることにする。最後に、三つ目の登場人物 Φ を定義しよう。まず 1 形式 η から、接束 TS の $2n-2$ 次元の部分束 D を（この D は接触分布 (contact distribution) と呼ばれる）、各点 $p \in S$ でのファイバーが

$$D_p = \text{Ker } \eta_p \quad (2.5)$$

となるように定義することにしよう。この時、 ξ によって生成される自明な束を L_ξ としたとき、接束は

$$TS = D \oplus L_\xi \quad (2.6)$$

のように直交分解する。そこで、 $\text{End}(TS)$ の切断 Φ を、 $\Phi|_D = J|_D, \Phi|_{L_\xi} = 0$ と定義することにしよう。こうして定義した Φ は、任意の滑らかなベクトル場 X に対して、

$$\Phi(X) = \nabla_X \xi \quad (2.7)$$

を満たすことが示される。また、この Φ は、

$$\Phi^2 = -I + \eta \otimes \xi \quad (2.8)$$

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.9)$$

を満たしており、「複素構造もどき」になっている。

さて、ここまで述べてきたのは、佐々木多様体 (S, g) には、接触 1 形式 η や Reeb ベクトル場 ξ 、更には「複素構造もどき」 Φ が定まるということであった。これらは、佐々木多様体における重要な登場人物であり、次に見るように、ある意味で佐々木多様体の幾何学を規定していると見なすことができる。

命題 2.6. (S, g) を Riemann 多様体とし、 ∇ を g の Levi-Civita 接続、 $R(X, Y) : \Gamma(TS) \rightarrow \Gamma(TS)$ を ∇ の Riemann 曲率テンソルとする。このとき、以下の条件は等価である：

1. S 上に、長さ 1 の Killing ベクトル場 ξ が存在し、 $\Phi(X) = \nabla_X \xi$ により定義される $(1, 1)$ 型のテンソル Φ が、 S 上の任意のベクトル場 X, Y に対して以下の条件を満たす；

$$(\nabla_X \Phi)(Y) = g(\xi, Y)X - g(X, Y)\xi \quad (2.10)$$

2. S 上に、長さ 1 の Killing ベクトル場 ξ が存在し、Riemann 曲率テンソルが、 S 上の任意のベクトル場 X, Y に対して以下を満たす。

$$R(X, \xi)Y = g(\xi, Y)X - g(X, Y)\xi \quad (2.11)$$

3. S 上に、長さ 1 の Killing ベクトル場 ξ が存在し、 ξ を含む全ての平面の断面曲率は 1 である。
4. S は、正規な接触計量構造 $\{\xi, \eta, \Phi, g\}$ をもつ接触計量多様体である（定義はすぐ後で説明する）。
5. (S, g) は（定義 2.1 の意味で）佐々木である。

この命題より、佐々木多様体の構造を規定するのは、三つ組み $\{\xi, \eta, \Phi\}$ あるいは、計量まで込めた四つ組み $\{\xi, \eta, \Phi, g\}$ であることが分かる。これを S 上の佐々木構造 (Sasakian structure) と呼ぶ。

実は、より伝統的な佐々木多様体の文脈では、この四つ組みを全面に押し出して佐々木多様体を定義するのが標準的であった。最初に与えた佐々木多様体の定義は、簡潔で非常に便利であるが、佐々木多様体の持つ様々な構造がかえって見えにくいところもないでもない。そこで、やや脱線するが、上の命題の4番目の条件はどのようなものであるかを述べ、佐々木多様体の別の定義を与えておこう。なお、この部分の定義あるいはその証明については、例えば [2] (特に5章) や [3]などを参照されたい。

定義 2.7. S を $2n - 1$ 次元多様体とし、 Φ, ξ, η をそれぞれ $(1,1)$ のテンソル場、ベクトル場、1形式とする。 Φ, ξ, η が条件

$$\eta(\xi) = 1 \tag{2.12}$$

$$\Phi^2 = -I + \eta \otimes \xi \tag{2.13}$$

を満たすとき、 S は概接触構造 (almost contact structure) $\{\xi, \eta, \Phi\}$ をもつ概接触多様体 (almost contact manifold) であると呼ばれる。 ■

命題 2.8. 概接触構造 $\{\xi, \eta, \Phi\}$ に対し、次が成立する。

$$\Phi\xi = 0, \tag{2.14}$$

$$\eta(\Phi X) = 0 \quad (X \text{ は任意のベクトル場}) \tag{2.15}$$

命題 2.9. 全ての概接触多様体 S は、次の条件を満たす計量 g を持つ：

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{2.16}$$

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.17}$$

ここに現れる計量 g を、概接触構造 $\{\xi, \eta, \Phi\}$ に付随した計量と呼ぶ。また、 S がテンソル場 $\{\xi, \eta, \Phi, g\}$ をもち、 g が概接触構造 $\{\xi, \eta, \Phi\}$ に付随した計量であるとき、 S は、概接触計量構造 (almost contact metric structure) を持つといい、概接触計量多様体 (almost contact metric manifold) と呼ばれる。

S が概接触構造 $\{\xi, \eta, \Phi, g\}$ を持つとしよう。このとき、 $S \times \mathbb{R}$ の接束上の線形写像 J を、

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = (\Phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}) \tag{2.18}$$

で定義すると (但し、 t は \mathbb{R} の座標であり、 f は $S \times \mathbb{R}$ 上の滑らかな関数)、命題 2.8より $J^2 = -1$ であることが確かめられ、 J は $S \times \mathbb{R}$ 上の概複素構造を与える。この J が可積分であるとき、概接触構造 $\{\xi, \eta, \Phi, g\}$ は正規 (normal) であると呼ばれる。

定理 2.10. S を接触構造 η をもつ接触多様体とする。この時、

$$g(X, \Phi Y) = d\eta(X, Y) \tag{2.19}$$

を満たす概接触計量構造 $\{\xi, \eta, \Phi, g\}$ が存在する。 ■

この定理によって、接触形式 η から構成された概接触計量構造を、 η に付随した接触計量構造 (contact metric structure) と呼び、そのような構造を持つ多様体を接触計量多様体 (contact metric manifold) と呼ぶ。

され、この定式化では、佐々木多様体とは、正規な接触計量構造 $\{\xi, \eta, \Phi, g\}$ をもつ接触計量多様体であるとして定義される。この定義が、冒頭に与えた定義と同等であるとの主張は、命題 2.6に含まれている。

ここまで佐々木多様体の別の定義について説明してきたが、実際には、これから解説する内容では、三つ組 $\{\xi, \eta, \Phi\}$ のうち、主に ξ が現れ、 η や Φ は補助的な役割を果たすのみである。そこで、次に ξ についてより詳しく見ていくことにしよう。

2.3 佐々木多様体の分類

リーベクトル場の軌道は葉層構造 (Reeb foliation または characteristic foliation) を定める。この ξ の軌道によって、佐々木多様体 S は以下の 3 つに分類される。

定義 2.11.

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi \text{ の軌道が閉じるとき} \\ \xi \text{ の軌道が閉じないとき} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} \xi \text{ の } U(1) \text{ 作用が free である時} & \text{regular} \\ \xi \text{ の } U(1) \text{ 作用が free ではないとき} & \text{quasi-regular} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

■

ただし、文献によっては、ここで quasi-regular と呼ぶものを non-regular と呼び、quasi-regular という言葉をその代りに regular と non-regular を含むより広い意味に用いているものもあるので注意が必要である。以下では、quasi-regular と言ったら全て上の定義にあるような狭い意味での quasi-regular を意味しているもの約束する。(non-regular という用語は、Boyer-Galicki 達が用いている用語である。ここでの用法は、Martelli-Sparks-Yau[4] に従った。)

さて、この分類はどのような意味を持つのか、より詳しく説明していこう。

- S が regular のとき、 ξ の軌道の長さは全て等しく、 S は、一つ次元が下 ($2n-2$ 次元) の Kähler-Einstein 多様体上の $U(1)$ 主束になっている。よって、この場合は、Kähler-Einstein の話に帰着されてしまう。
- S が quasi-regular の時、 ξ の軌道が閉じるが、 S 上に少なくとも一つの点 x が存在して、その点の固定部分群 Γ_x が非自明になっている。この時、 Γ_x は、 $U(1)$ の真の部分群であるから (ξ はノルム 1 を持っているので、消えることはできないことに注意)、ある整数 m に対して \mathbb{Z}_m と同型である。よって、 $U(1)$ の作用が局所自由である、つまり全ての固定部分群が有限となる。このとき、 x を通る軌道の長さは、generic な軌道の長さの $1/m$ になっている。また、局所自由なコンパクト Lie 群の作用による多様体の商はオービフォールドになることが知られているので、 S は、 $2n-2$ 次元の Kähler-Einstein オービフォールド上のオービフォールド $U(1)$ 主束となる。
- 最後に、irregular のときには、商空間は well-defined ではなく、transverse structure としてのみ存在する。

以上の分類より、 $2n-1$ 次元佐々木多様体は、元々の定義から、計量錐を取って次元を一つ高くした $2n$ 次元が Kähler 多様体になっている一方、次元を一つ下げた $2n-2$ 次元にも (一般には transverse structure としてしか存在しないが) Kähler 構造を持っていることが分かる。この意味で、佐々木多様体は、二つの Kähler 構造に挟まれた物であるということが出来る。

$$\begin{array}{ccc} 2n \text{ 次元} : & \text{Kähler 多様体 } C(S) & \\ & \uparrow & \\ (2n-1) \text{ 次元} : & \text{佐々木多様体 } S & (2.21) \\ & \downarrow & \\ (2n-2) \text{ 次元} : & \text{transverse Kähler structure} & \end{array}$$

2.4 トーリック佐々木-Einstein 多様体

次に、トーリック佐々木-Einstein 多様体について考えることにしよう。これから考えるほとんど全ての佐々木-Einstein 多様体はトーリックである。

定義 2.12 (トーリック佐々木-Einstein 多様体). 佐々木-Einstein 多様体 (S, g) がトーリック (toric) であるとは、その計量錐 $(C(S), \bar{g})$ がトーリック (Calabi-Yau) であることをいう。 ■

トーリック多様体の定義については、ここでは詳しく説明しない (例えば、[5, 6] を見よ。)。ここでは、以下に述べるだけで十分である。

まず、 $C(S)$ ($\dim C(S) = 2n$) がトーリックであるとき、運動量写像 $\mu : C(S) \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在し、 $C(S)$ はその像 $C^* := \mu(C(S))$ (rational convex polyhedral cone になっている) 上の \mathbb{T}^n -fibration である。

次に、 C^* の双対を考え、それを \mathcal{C} と書くことにする。Farkas の定理より、 \mathcal{C} もまた convex rational polyhedral cone であり、トーリック多様体の扇 (fan) は、その cone を最高次元の錐として持っている。 $C^* = \mu(C(S))$ を

$$C^* = \mu(C(S)) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, v_a \rangle \geq 0\} \tag{2.22}$$

と書くと、 $v_a (a = 1, 2, \dots, d)$ 達は扇の最高次元の錐³を生成している。

このとき、Calabi-Yau 条件より、適当に $SL(n, \mathbb{Z})$ 変換をすることにより v_a の第 1 成分をすべて 1 と置くことができる⁴。そこで、 $v_a = (1, w_a)$ と書くことにしよう。ここで、 v_a は n 次元ベクトル、 w_a は $n - 1$ 次元ベクトルであることに注意したい。特に $n = 3$ の場合には、 w_a 達は、 \mathbb{Z}^2 上の格子多角形を定めていると見ることができる。これをトーリック図と呼び⁵、 Δ と書くことにする。なお、この場合、 Δ には $SL(2, \mathbb{Z})$ 変換による任意性が存在しているので注意されたい。

例 2.13. 例として、 \mathbb{C}^3 、conifold、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 、 dP_1 、 dP_2 のトーリック図を図 1 に示した。

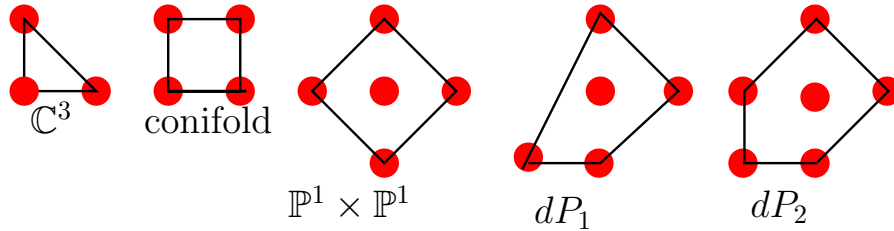


図 1: トーリック図の例。

3 5次元佐々木-Einstein 多様体の計量

さて、これまではほとんど佐々木多様体の話であったが、以下ではもっぱら 5 次元 ($n = 3$) の佐々木-Einstein 多様体を考えることにしよう。5 次元の佐々木-Einstein 多様体を調べる理由の一つとして、後述する AdS/CFT 対応において現れるという物理からの動機があり、次のセクション (§4) で述べるのでお待ちいただきたい。

3.1 regular、quasi-regular な計量

まず、5 次元の佐々木・アインシュタイン多様体の計量について、2004 年以前に分かっていたことについて述べておこう。

²ここでは、運動量写像の像を C^* と書き、その双対を \mathcal{C} と書いた。文献によっては、逆に書いているものもあるので注意されたい。ここでは、運動量写像の像が \mathbb{T}^n の Lie 環の双対に入っているという意味を込めて、 C^* と書いた。

³誤解はないと思うが、この錐はトーリックの convex rational polyhedral cone のことであり、計量錐のことではないので注意。どちらかは文脈で明らかだが、本稿では metric cone の方は常に計量錐と書いて区別している。

⁴計量錐を取ったとこの頂点が \mathbb{Q} -Gorenstein になるという条件だけは、一般には 1 ではなく、自然数 r にまでしか持つていくことができない ([7] 及び定理 3.8 も参考にせよ) ことに注意せよ。しかし、これから考える場合はすべて 1 の場合なので、その点は気にしなくてよい。

⁵この用語は、物理ではかなり普及しているが、どうも数学ではそれほど使われていないようである。

具体的な計量が分かっているものは、長い間 5 次元球面 S^5 と $T^{1,1}$ のたった二つの具体例だけであった。これらは、ともに regular であり、それに付随して 4 次元や 6 次元に現れる Kähler-Einstein 多様体をまとめておくと表 1 のようになる。

4 次元	5 次元	6 次元
\mathbb{CP}^2	S^5	\mathbb{C}^3
$\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$	$T^{1,1}$	conifold

表 1: 長い間、具体的な計量が知られていた 5 次元佐々木-Einstein 多様体は S^5 と $T^{1,1}$ だけだった。

ここで、 $T^{1,1}$ とは何かを説明しておこう。 $T^{1,1}$ とは、主に物理の文献で使われている名前であり、数学では恐らくほとんど用いられていない名前であろう。この 5 次元佐々木-Einstein 多様体は、計量錐を取るとコニフォールドと呼ばれる Calabi-Yau 3-fold になるようになっている。ここで、コニフォールドとは、

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0 \quad (3.1)$$

で定義される 3 次元の Calabi-Yau 多様体である。実際、4 つの複素変数に複素数で一つの条件がついているので、複素 3 次元の多様体になっていることが分かる。また、これが cone になっていることも、もし (z_1, z_2, z_3, z_4) が (3.1) 式を満たせば、それを正の実数倍した (rz_1, rz_2, rz_3, rz_4) (但し $r \in \mathbb{R}_+$) も (3.1) 式を満たすことから分かる。

よって、佐々木多様体 $T^{1,1}$ を取り出すには、(3.1) 式と

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 = \rho^2 \quad (3.2)$$

との共通部分を考えてやればよいことになる。但し、 ρ は新しく導入した座標で、 $\mathbb{R}_{>0}$ を動き、後で見るとように計量錐の動径方向に対応する。そこで、 $z_i = x_i + iy_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) と書くと、(3.1)、(3.2) より

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{\rho^2}{2} \quad (3.3a)$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = \frac{\rho^2}{2} \quad (3.3b)$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = 0 \quad (3.3c)$$

ここで、(3.3a) 式より (x_1, x_2, x_3, x_4) の定める S^3 があり、さらに (3.3b, 3.3c) 式は (y_1, y_2, y_3, y_4) が S^3 である平面で切った切り口を動くので、 S^2 上を動くことになる。よって、 $T^{1,1}$ は S^3 上の S^2 束になっていることが分かる。ところが、 S^3 上の S^2 束は自明であることが知られているので、 $T^{1,1}$ は $S^2 \times S^3$ であることが分かる。

また、更に、 $T^{1,1}$ は、 $S^2 \times S^3$ 上の homogeneous metric になっており、coset として書くこともできる。まず、(3.1) と (3.2) より、 $\text{SO}(4) \sim \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ が推移的に作用することが分かる。また、任意の点、例えば $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0, 0)$ の固定部分群は、 z_3, z_4 を回転する $\text{SO}(2) \sim \text{U}(1)$ なので、

$$T^{1,1} = \frac{\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)}{\text{U}(1)_{\text{diag}}} \quad (3.4)$$

と書くことができる ($\text{U}(1)$ の添え字に diag と書いた理由についてはすぐ下で説明する)。

また、同じことを、少し別の言葉で述べると次のようになる。

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} z^i \sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z_3 + iz_4 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & -z_3 + iz_4 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

を定義すると、(3.1)、(3.2) 式は

$$\det Z = 0, \quad \text{tr} Z Z^\dagger = \rho^2 \quad (3.6)$$

となる。今、この方程式の解の一つを

$$Z_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) \quad (3.7)$$

とすると、一般の解は、

$$Z = LZ_0R, \quad L \in \text{SU}(2)_L, \quad R \in \text{SU}(2)_R \quad (3.8)$$

となる。但し、この書き方には冗長性がある、

$$\Theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

なる θ を用いて $(L, R) = (\Theta, \Theta^\dagger)$ とすると、

$$LZ_0R = Z_0 \quad (3.10)$$

となるので、 $T^{1,1}$ は、 $\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$ を Θ によって生成される $\text{U}(1)_{\text{diag}}$ で割ればよいことになる。よって、(3.4) 式が成り立つことが分かる。

またその計量を具体的に書くと ([8] の Appendix を参照)

$$ds_{T^{1,1}}^2 = \frac{1}{9}(d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{1}{6}(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2) + \frac{1}{6}(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2) \quad (3.11)$$

となる。但し、 $0 \leq \psi < 4\pi, 0 \leq \theta_i < \pi, 0 \leq \phi_i < 2\pi$ である。計量錐の計量は、先程の ρ を使って $r = \sqrt{3/2}\rho^{2/3}$ を定義すると、

$$ds_{\text{conifold}}^2 = dr^2 + r^2 ds_{T^{1,1}}^2 \quad (3.12)$$

となる。後から用いるので、この計量から体積を計算しておく、

$$\text{Vol}(T^{1,1}) = \int_0^{4\pi} d\psi \int_0^\pi d\theta_1 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\phi_1 d\phi_2 \sqrt{g} = \frac{16\pi^3}{27} \quad (3.13)$$

歴史的には、この佐々木多様体は、超重力理論のコンパクト化の文脈で研究されたものである。その際、Romans 多様体と呼ばれる Einstein 多様体 $T^{p,q}$ (p, q は互いに素な自然数) が考えられ、その計量が求められた。その計量を具体的に書くと

$$ds_{T^{p,q}}^2 = \lambda^2(d\psi + p \cos\theta_1 d\phi_1 + q \cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \Lambda_1^{-1}(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2) + \Lambda_2^{-1}(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2) \quad (3.14)$$

であり、これが Einstein 多様体 $R_{\mu\nu} = 4g_{\mu\nu}$ であるための条件は、

$$\lambda^2 = p^2 \Lambda_1^2 + q^2 \Lambda_2^2 = 2, \quad \Lambda_1 \left(1 - \frac{p^2 \Lambda_1^2}{2}\right) = 4, \quad \Lambda_2 \left(1 - \frac{q^2 \Lambda_2^2}{2}\right) = 4, \quad (3.15)$$

である。実は、この Einstein 多様体 $T^{p,q}$ は、先程の構成の言葉では、

$$(L, R) \sim (R\Theta^p, L\Theta^q) \quad (3.16)$$

という同一視をしたものになっている。実は、このような無限個の Einstein 多様体のうち、 $p = q = 1$ のみが佐々木-Einstein 多様体になっていることが知られている。このような経緯で、 $T^{1,1}$ という名前になったのである。

より一般に、regular の場合を考えることにすると、それは前述したように 4 次元の Kähler-Einstein 多様体上の S^1 束になっているから、 $c_1 > 0$ なる複素 2 次元 Kähler-Einstein 多様体の分類の問題に帰着する。曲面論の分類より、 $c_1 > 0$ なる複素 2 次元代数多様体は、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 、 \mathbb{P}^2 、 \mathbb{P}^2 の 8 点までの (generic な点での⁶)

⁶generic とは、任意の三点が同一直線上になく、任意の六点が \mathbb{P}^2 の 2 次曲線上にないことをさす

爆発に限られることが知られている [9]。以下では、 \mathbb{P}^2 の k 点爆発を del Pezzo k とよび、 dP_k と書くことにしよう。なお、del Pezzo 曲面のうち、トーリック多様体になるのは $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 、 \mathbb{P}^2 及び $dP_k (k = 1, 2, 3)$ に限られることが知られている。

さて、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 及び \mathbb{P}^2 の場合は、これまで議論してきた S^5 と $T^{1,1}$ であった。それでは、残りの dP_k には計量は入るのだろうか？実は、 dP_1 と dP_2 には、Kähler-Einstein 計量が入らないことが知られている⁷。これは、松島の定理 [12] によって、コンパクト Kähler-Einstein 多様体の正則ベクトル場全体のなす Lie 環が簡約可能 (reductive) である、つまり Abel Lie 環と半単純 Lie 環の直和であることが従うが、 dP_1 と dP_2 の場合にはそれが簡約可能でないことが示せるからである。そこで、残るは $dP_k (k = 3, 4, \dots, 8)$ の場合だけである。このとき、

$$\mathfrak{M}_k = \{dP_k \text{ 上の複素構造の全体で、} c_1 > 0 \text{ であるものの全体}\} \quad (3.17)$$

とすると、 \mathfrak{M}_k は解析多様体であること、また \mathfrak{M}_3 及び \mathfrak{M}_4 は一つの元しか含まず、また $n \geq 5$ の時は、 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_k \geq n - 4$ である。Tian-Yau の仕事 [13] によって、これらの場合に計量が存在するかどうかという問題は解決済みであり、その結果は次のように与えられる：

定理 3.1 (Tian-Yau[13]). $3 \leq k \leq 8$ の時には、 \mathfrak{M}_k に空でない開集合 U_k が存在して、 U_k の任意の元に対して、Kähler-Einstein 計量が存在する。 ■

よって、 $dP_k (k = 3, 4, \dots, 8)$ 上の S^1 束を考えると、それは 5 次元の佐々木-Einstein 多様体になっていることが分かる。これらを、以下 S_{dP_k} と書くことにしよう。但し、この場合は、計量は存在が示されただけであり、その具体的形は知られていないことに注意しよう。例外的に、 dP_6 の時に爆発する点の配位をある対称な配置にしたときには、具体的な Kähler-Einstein 計量の形が求められているようである (E. Calabi, unpublished)。

quasi-regular については、どうだろうか？これを考える際に、Smale による次の 5 次元多様体の分類定理を述べておくと便利である：

定理 3.2 (Smale[14]). 単連結、コンパクトな 5 次元多様体 M が、スピンであり、かつ 2 次のホモロジーに torsion を持たないとする。このとき、ある非負の整数 l が存在して、 M は $S^5 \# l(S^3 \times S^2)$ に微分同相である。 ■

この分類で行くと、先に述べたように、regular な計量が存在しているのは、 S^5 と $S^5 \# l(S^3 \times S^2) (l = 1, 3, 4, \dots, 8)$ の場合である。そこで、 l がそのほかの値 (例えば $l = 2$) を取る場合に、quasi-regular な計量が存在するかどうか問題になる。2000 年以降、Boyer-Galicki は、Fano orbifold の場合の Kähler-Einstein 計量の存在についての研究に基づき、数多くの存在定理を示した。次の定理はその一つである：

定理 3.3 (Boyer-Galicki[15, 16, 17]). $S^5 \# l(S^2 \times S^3) (l = 2, 3, \dots, 9)$ 上には、無限個の quasi-regular な計量が存在する。 ■

また、計量のモジュライ空間も議論されている。この周辺については、レビューとしては、[18] があるので詳しくは参照されたい。

3.2 irregular な計量の具体的構成： $Y^{p,q}$ と $L^{a,b,c}$

さて、ここまで述べてきたことが、2004 年以前に分かっていたことであった。ここからは、 $Y^{p,q}$ 及び $L^{a,b,c}$ と呼ばれる新しい計量について述べていこう。

上に述べたように、regular 及び quasi-regular の場合には、2004 年以前から計量の存在証明や具体的構成が知られていたが、irregular については、具体的な構成はもちろんのこと、長い間存在を示すことさえ難し

⁷なお、ここに述べたように、 $c_1 > 0$ の時には、一般に Kähler-Einstein 計量の存在には障害が存在することに注意したい。これは、 $c_1 = 0$ の場合および $c_1 < 0$ の場合とは大きく異なることに注意しておく。実際、これらの場合に、Kähler-Einstein 計量が存在するかどうかを問うたのが有名な Calabi 予想で、それに肯定的な答えを与えたのが $c_1 < 0$ のとき Aubin[10] と Yau[11]、また $c_1 = 0$ の時 Yau[11] である。

い状況であった。実際、Cheeger と Tian は、1994 年に irregular な metric は存在しないという予想を提出した [19] くらいである。しかし、2004 年に、Gauntlett-Martelli-Sparks-Waldrum[20] は、超重力理論の研究から ([21]) 次のことを示した (これは、Cheeger-Tian の予想の反例になっている):

定理 3.4 (Gauntlett-Martelli-Sparks-Waldrum[20]). $S^2 \times S^3$ 上には、加算無限個の佐々木-Einstein 計量が存在し、それらは、 $Y^{p,q}$ と呼ばれる。但し、 p, q は自然数であり、 $\text{hcf}(p, q) = 1, q < p$ を満たすものである。この計量 $Y^{p,q}$ は $4p^2 - 3q^2$ がある自然数の 2 乗で書けるとき、かつそのときに限り quasi-regular であり、そのほかの時は irregular である。 ■

この計量は、cohomogeneity 1 を持っている。但し、cohomogeneity とは、isometry 群 ($Y^{p,q}$ の時にはその Lie 代数は $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(1)$ である) の作用のもとでできる generic な軌道の実余次元のことをさす。

のちに、この計量はトーリックであることが示された。対応するトーリック図を 2 に示した。

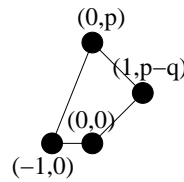


図 2: $Y^{p,q}$ のトーリック図。

計量の具体的な形を書いておくと次のようになる:

$$ds_{Y^{p,q}}^2 = \frac{1-cy}{6}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{1}{w(y)q(y)} dy^2 + \frac{q(y)}{9}(d\psi - \cos \theta d\phi)^2 + w(y)[d\alpha + f(y)(d\psi - \cos \theta d\phi)]^2 \quad (3.18)$$

但し、ここで、

$$w(y) = \frac{2(a-y^2)}{1-cy}, \quad q(y) = \frac{a-3y^2+2cy^3}{a-y^2}, \quad f(y) = \frac{ac-2y+cy^2}{6(a-y^2)} \quad (3.19)$$

である。

まず、この計量の中には定数 a と c がはいつているが、 p, q とどう関係しているのかをこれから説明しておこう。

まず $c = 0$ なら、適当に変数を取り替えて $a = 3$ とすることができる。このとき、 $\cos \omega = y, \nu = 6\alpha$ なる変数を用意して計量を書き直すと

$$ds^2 = \frac{1}{9}(d\psi - \cos \theta d\phi - \cos \omega d\nu)^2 + \frac{1}{6}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{1}{6}(d\omega^2 + \sin^2 \omega d\nu^2) \quad (3.20)$$

となる。 ν の周期を 2π 、 ψ の周期を 4π と取ると、これは $T^{1,1}$ の計量 (3.11) に他ならない。

そこで、 $c \neq 0$ の時を考えることにすると、 y を適当にスケール変換することで $c = 1$ と取ることができる。よって、残るパラメーターは a 一つである。

ここで、具体的に計算することで、 $\text{Ric} = 4g$ となることが確かめられるので、これは Einstein であることが分かる。また、佐々木であることを確かめるのもそれほど難しくない。

次に、問題となるのは、こうして得られた局所的な計量が、大域的な計量に拡張されるのはどのような時かが問題になる。詳細は原論文 [20] や解説 [22] をご覧頂くことにして、ここでは大雑把な概要を説明しよう。

そのために、まず (θ, ϕ, y, ψ) により定まる 4 次元底空間を B としよう。これが、位相的に $S^2 \times S^2$ になるようにする。そのためには、まず、

$$0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (3.21)$$

とすれば、 (θ, ϕ) の部分は、標準的な S^2 の計量になる。また、 (y, ψ) により定まる 2 次元空間は、この S^2 上にファイバーされていることがわかる。このファイバーがどうなっているかが次の問題であるが、 $w(y)$ が正であるために $1 - y > 0, a - y^2 > 0$ を要請し、また y が $q(y)$ の二つの零点 y_1, y_2 の間にある： $y_1 \leq y \leq y_2$ であるという条件の y が存在するようにするため、

$$0 < a < 1 \quad (3.22)$$

に取ることにしよう (三次関数 $a - 3y^2 + 2y^3 = 0$ の解は、 $0 < a < 1$ の時には、負の解が一つ、正の解が二つあるが、負の解を y_1 、正の解のうち小さい方を y_2 とした)。このとき、 (y, ψ) は、 $y_1 \leq y \leq y_2$ では ψ 方向が S^1 であり、また $y = y_1, y_2$ では一点につぶれていることから S^2 に微分同相であることがわかる。但し、気になるのは、 $y = y_1, y_2$ で計量が特異になっていかどうかであるが、 $y = y_1, y_2$ の周りで座標変換してやることにより、実は非特異になっていることを確かめることができる。こうして、 B が $S^2 \times S^2$ になっていることを確かめることができる。

次に、 α 方向が、 $B = S^2 \times S^2$ 上の S^1 ファイバーになっているようにする。 α の周期を

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi l \quad (3.23)$$

に取ると、 $l^{-1}A$ は $B = S^2 \times S^2$ 上の $U(1)$ 接続になる。しかし、このような $U(1)$ 束は、 $B = S^2 \times S^2$ の二つの S^2 上のそれぞれの赤道でどのように貼り合わせるかによって決定されており、それは、Chern 数 $H^2(S^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ で分類される。それを、それぞれ p, q と書くことにしよう。このとき、

$$P_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} dA = pl, \quad P_2 := \frac{1}{2\pi} \int_{C_2} dA = ql, \quad (3.24)$$

である。

これを具体的に計算すると、

$$P_1 = \frac{y_1 - y_2}{6y_1y_2}, \quad P_2 = -\frac{(y_1 - y_2)^2}{9y_1y_2} \quad (3.25)$$

となる。よって、また、 a と p, q は、 a の関数としての y_1, y_2 を $y_1(a), y_2(a)$ としたとき、

$$\frac{3}{2(y_1(a) - y_2(a))} = \frac{p}{q} \quad (3.26)$$

で p, q と関係している。

a を (3.22) の範囲で変化させることにより、この方程式は、 $q < p$ なる任意の互いに素な p, q に対して解を持つことが示される。また、 l も (3.25) 式から

$$l = \frac{q}{3q^2 - 2p^2 + p\sqrt{4p^2 - 3q^2}} \quad (3.27)$$

のように決定される。

以上まとめると、結局、変数の動く範囲は、

$$0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi, y_1 \leq y \leq y_2, 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \alpha \leq 2\pi l \quad (3.28)$$

である。

また、ここから体積を計算すると、

$$\text{Vol}(Y^{p,q}) = \frac{q^2[2p + (4p^2 - 3q^2)^{1/2}]}{3p^2[3p^2 - 2q^2 + (4p^2 - 3q^2)^{1/2}]} \quad (3.29)$$

なお、 $Y^{p,q}$ のうち $Y^{2,1}$ は、そのトーリック図 (図 2 で $p = 2, q = 1$ とせよ) と図 1 の dP_1 のトーリック図を比べても分かるように、対応する 4 次元の多様体は dP_1 になっている。先に議論したように、 dP_1 には障害が存在し、Kähler-Einstein 計量が入らないことが言えるが、その S^1 束をとって、適当に佐々木構造

を取り直せば、Einstein 計量が入って佐々木-Einstein 多様体になるのである!この点は、§6で述べる Volume minimization によってより明らかにされる。

最後に、 $Y^{p,q}$ が位相的に $S^2 \times S^3$ であることを議論しておこう ([20] の Appendix A を参照)。鍵となるのは前に述べた Smale による分類定理 3.2 である。U(1) ファイブレーションに対する Gysin 系列を用いることにより、 $Y^{p,q}$ は、この定理の条件を満たすことが言える。よって、ある非負の整数 l が存在して、 $S^5 \# l(S^3 \times S^2)$ に微分同相であることがいえるが、 $S^5 \# l(S^3 \times S^2)$ のホモロジー群は計算できて、 \mathbb{Z}^l であることがいえ、一方 $H_2(Y^{p,q}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ であることが言えるので、 $l = 1$ となる。 S^5 で連結和をとっても明らかにトポロジーは変わらないので、 $Y^{p,q}$ のトポロジーは $S^2 \times S^3$ であることが示された。こうして、定理 3.4 が示されたことになる。また、ここでは 5 次元の佐々木-Einstein について述べているが、同様の構成は、高次元 (奇数次元) にも拡張された [23, 24, 25]。

なお、先に $Y^{p,q}$ は cohomogeneity が 1 であることを述べたが、最近、Conti は、cohomogeneity 1 の 5 次元佐々木-Einstein 計量を分類し、それが $Y^{p,q}$ に限られることを示した [26]。よって次に問題となるのは cohomogeneity 2 の時となる。

実は、 $Y^{p,q}$ をさらに拡張し、cohomogeneity 2 を持つ 5 次元佐々木-Einstein 多様体上の計量が具体的に構成された。これを定理の形で述べておこう：

定理 3.5 (Cvetic-Lu-Page-Pope[27, 28, 29]). a, b, c, d を自然数とし、 $a \leq b, c \leq b, d = a + b - c$ 、 $\text{hcf}(a, b, c, d) = 1$ 、 $\text{hcf}(\{a, b\}, \{c, d\}) = 1$ であるとする。但し、最後の式は、 a, b のうちの任意のいずれかと、 c, d のうち任意のいずれかとが互いに素であることを示している。このとき、 $S^2 \times S^3$ 上には、 a, b, c によってラベルされる加算無限個の佐々木-Einstein 計量 (これを $L^{a,b,c}$ と書くことにする⁸。)が存在する。また、これらの計量は generic には cohomogeneity 2 であり、generic には irregular である。 ■

この $L^{a,b,c}$ は、先程の $Y^{p,q}$ を $a = p - q$ 、 $b = p + q$ 、 $c = p$ の特別な場合として含んでおり、 $Y^{p,q}$ の拡張になっている。この計量の構成には、Kerr Black hole 解を使った構成法が用いられた。Kerr ブラックホールは Einstein 方程式の解であるので、その性質を保ったままうまく極限を取って佐々木にするというのがおおざっぱな考え方である⁹。この話の周辺については、本報告集の中の橋本義武氏による解説もご覧いただきたい。

この計量について詳しい説明はしないが、その計量の実体形だけでも書いておこう。まず、まず、5 次元の Kerr-AdS ブラックホールの計量は [31]、

$$\begin{aligned} ds_5^2 = & -\frac{\Delta}{\rho^2} \left[dt - \frac{a \sin^2 \theta}{\Xi_a} d\phi - \frac{b \cos^2 \theta}{\Xi_b} d\psi \right]^2 + \frac{\rho^2 dr^2}{\Delta} + \frac{\rho^2 d\theta^2}{\Delta_\theta} + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2} \left[a dt - \frac{r^2 + a^2}{\Xi_a} d\phi \right]^2 \\ & + \frac{\Delta_\theta \cos^2 \theta}{\rho^2} \left[b dt - \frac{r^2 + b^2}{\Xi_b} d\psi \right]^2 \\ & + \frac{1 + g^2 r^2}{r^2 \rho^2} \left[ab dt - \frac{b(r^2 + a^2) \sin^2 \theta}{\Xi_a} d\phi - \frac{a(r^2 + b^2) \cos^2 \theta}{\Xi_b} d\psi \right]^2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

で与えられる。但し、ここで、

$$\Delta = \frac{1}{r^2} (r^2 + a^2)(r^2 + b^2)(1 + g^2 r^2) - 2m \quad (3.31)$$

$$\Delta_\theta = 1 - g^2 a^2 \cos^2 \theta - g^2 b^2 \sin^2 \theta \quad (3.32)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta \quad (3.33)$$

$$\Xi_a = 1 - g^2 a^2, \quad \Xi_b = 1 - g^2 b^2 \quad (3.34)$$

⁸文献によっては、 $L^{p,q,r}$ と書くものもあるが、 $L^{p,q}$ の p, q と紛らわしい (これらは、別のものであり、すぐ後で述べているように $a = p - q$ 、 $b = p + q$ である) ので、 $L^{a,b,c}$ と書くことにするのが良い。また、より対称には、 $L^{a,b|c,d}$ と書くのが適当であろうが、この記法は面倒なため普及していない。

⁹実は、Cvetic-Lu-Page-Pope 以前に、[30] によって、同じ方法によって $S^2 \times S^3$ 上に無限個の Einstein 計量が構成された。しかし、残念ながら、この計量は佐々木-Einstein ではない。

である。この計量を

$$t \rightarrow i\tau, \quad g \rightarrow \frac{i}{\sqrt{\lambda}}, \quad a \rightarrow ia, \quad b \rightarrow ib \quad (3.35)$$

と Euclid 化して、

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\epsilon\right), \quad b = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{1}{2}\beta\epsilon\right), \\ r^2 &= \frac{1}{\lambda}(1 - x\epsilon), \quad m = \frac{1}{2\lambda}\mu\epsilon^3 \end{aligned} \quad (3.36)$$

とスケールする ($\epsilon \rightarrow 0$) と、 $L^{a,b,c}$ の計量が得られる。

$$\lambda ds_5^2 = (d\tau + \sigma)^2 + ds_4^2 \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} ds_4^2 &= \frac{\rho^2}{4\Delta_x} dx^2 + \frac{\rho}{\Delta_\theta} d\theta^2 \\ &+ \frac{\Delta_x}{\rho^2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\alpha} d\phi + \frac{\cos^2 2\theta}{\beta} d\psi \right)^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\rho^2} \left(\frac{\alpha - x}{\alpha} d\phi - \frac{\beta - x}{\beta} d\psi \right)^2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

但し

$$\sigma = \frac{(\alpha - x) \sin^2 \theta}{\alpha} d\phi + \frac{(\beta - x) \cos^2 \theta}{\beta} d\psi \quad (3.39a)$$

$$\Delta_x = x(\alpha - x)(\beta - x) - \mu \quad (3.39b)$$

$$\rho^2 = \Delta_\theta - x \quad (3.39c)$$

$$\Delta_\theta = \alpha \cos^2 \theta + \beta \sin^2 \theta \quad (3.39d)$$

である。ここでも、計量の形には a, b, c が具体的には現れていないが、それは、 $Y^{p,q}$ の場合と同様で、上に書いた局所的な計量が全域的な計量に拡張されるための条件を考察することによって得られるものである。なお、この計量はトーリックである。

3.3 佐々木-Einstein 計量の存在と一意性

このセクションの最後に、最近、トーリック・佐々木-Einstein 計量の存在と一意性を示しためざましい定理が最近証明されたので、それについて、結果だけ簡単に述べておこう。この部分では、再び任意次元の佐々木-Einstein 多様体に戻るのに注意されたい。

まず、幾つかの言葉を用意しよう。

定義 3.6. S 上の滑らかな微分形式 α が basic であるとは、

$$i(\xi)\alpha = 0, \quad \mathcal{L}_\xi \alpha = 0 \quad (3.40)$$

を満たすことである。但し、ここで ξ はこれまで通り Reeb ベクトル場であり、 \mathcal{L}_ξ は、 ξ による Lie 微分である。 ■

basic な微分形式は、外微分 d によって保たれるので、basic コホモロジー、basic Dolbeault コホモロジーを定義でき、更に Chern-Weil 理論を使って basic Chern 類を定義することができる。そこで、Reeb foliation の normal bundle の第 1Chern 類が正であるという条件を $c_1^B > 0$ と書くことにしよう。また、トーリック束 (toric bundle) D を、 $D = \text{Ker} \eta$ で定義しよう。このとき、次が成り立つ。

定理 3.7 (二木-小野-Wang[32]). (S, g) をコンパクトトーリック佐々木多様体とし、 $c_1^B > 0, c_1(D) = 0$ とする。このとき、Reeb ベクトル場を変形することによって、佐々木構造を変形すると、佐々木-Einstein 計量が得られる。 ■

但し、ここで、「Reeb ベクトル場を変形することによって、佐々木構造を変形する」とあるのについては、§6の Volume minimization のところで追って更に説明する。

また、この仮定 $c_1^B > 0, c_1(D) = 0$ の意味が、次の論文で明らかにされた：

定理 3.8 (Cho-二木-小野 [33]). (S, g) をコンパクトトーリック佐々木多様体で、 $\dim S \geq 5$ を満たすものとする。このとき、次の 3 つの条件は等価である：

1. $c_1^B > 0, c_1(D) = 0$
2. S は、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d \in \mathfrak{g} = \text{Lie}(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}^n$ によって定義される高さ l (l は正の整数) のトーリック図から得られ、またある $\gamma \in \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^n$ が存在して、Reeb ベクトル場 ξ が次の条件を満たす：

$$\langle \gamma, \xi \rangle = -n, \langle y, \xi \rangle > 0 \text{ for all } y \in \mathcal{C}^* \quad (3.41)$$

但し、 \mathcal{C}^* は以前も定義したが、

$$\mathcal{C}^* = \{y \in \mathfrak{g}^* \mid \langle y, \lambda_i \rangle \geq 0, j = 1, 2, \dots, d\} \quad (3.42)$$

である。

3. ある正の整数 l が存在して、標準束 $K_{C(S)}$ の l 次のべき $K_{C(S)}^{\otimes l}$ は自明である。 ■

我々がこれまで考えてきたような場合には、この 3 つの条件のうち、第 2 の条件が常に満たされていた。よって、上の二つの定理を合わせると、トーリック図から定まるようなトーリック・Calabi-Yau を計量錐に持つ佐々木多様体に対しては、Reeb ベクトル場を変化させることによって、佐々木-Einstein 計量を得ることができるのである。

この定理より、例えば系として S_{dP_1}, S_{dP_2} 上に佐々木-Einstein 計量が入ることが従う。ここで思い出しておきたいのは、4 次元の dP_1, dP_2 には、障害が存在して、Kähler-Einstein 計量は入らないということである。この二つは矛盾していないことに注意したい。つまり、4 次元には Kähler-Einstein 計量は入らないので、その S^1 束には regular な佐々木-Einstein 計量はいらないが、Reeb ベクトル場を取り直すと、irregular の佐々木-Einstein 計量が入るのである。

さらに、同じ論文で一意性も示された。自己同型群で引き戻しても佐々木-Einstein 計量はやはり佐々木-Einstein 計量なので、一意性というのは次のような意味になる：

定理 3.9 (佐々木-Einstein 計量の一意性、Cho-二木-小野 [33]). (S, g) をコンパクトトーリック佐々木多様体とし、 $c_1^B > 0, c_1(D) = 0$ とする。このとき、自己同型群の単位元を含む連結成分は、 g と両立する佐々木-Einstein 計量の全体のなす空間に推移的に作用する。 ■

但し、計量 g' が (S, g) と両立するとは、 g と g' が同じ Reeb ベクトル場を持つことをいう。

証明は、 $c_1 > 0$ の時の Kähler-Einstein 計量の一意性の証明 [34] の類似で行う¹⁰。

最後に、ここまで述べてきた計量は、 $r = 0$ のところで特異的になっていたが、その尖った頂点を丸めて、 $r = 0$ にまで滑らかに延びる 完備な Ricci-flat 計量の構成についても議論がなされている [36, 37, 38] ことに触れておく。

¹⁰Kähler-Einstein の時は、大体次のようにして証明する。Kähler 計量の空間を考え、そこに二つ解があったとして、それをつなぐ測地線を考える。証明の鍵となるのは K-energy (満洲エネルギー) [35] であり、この量は Kähler-Einstein のところでは微分がゼロになり、また測地線上でその 2 回微分が正という性質を持つ。よって、二つの Kähler-Einstein 計量を結ぶ測地線があるとすると矛盾する。測地線の存在を示すのは微妙な問題だが、トーリック佐々木-Einstein の時は問題が簡単化する。

4 AdS/CFT 対応

ここまで述べてきたような佐々木・アインシュタイン多様体での発展（特に具体的な計量の構成）は、物理にとっても大きな意味を持った。以下では、それについて説明することにしてしよう。

弦理論には、さまざまな双対性 (duality) が存在することが知られている。そしてそれは、数学にも非常に大きなインパクトをもたらしてきた。たとえば、シンプレクティック幾何と複素幾何との「等価性」を主張するミラー対称性はそのもっとも成功した例であり、有理曲線の数え上げや Gromov-Witten 不変量の計算等々に大きな役割を果たしてきた。

AdS/CFT 対応と呼ばれるものも、「対応」という名前になっているが、弦理論に存在するある種の双対性である。しかもそれは、ゲージ理論と重力という全く違うように見える理論の等価性を主張する非常に不思議な双対性であり、数多くの双対性の中で今のところもっとも重要なものといってもいいものである。

以下、この AdS/CFT 対応がどのようなものであるかを、非常に大雑把に説明しよう。この部分は、未定義用語であふれてしまうので数学者には読みづらいと思われるが、以下の議論に関係するのは (4.1) 式だけであり、さらにその意味は次のセクション以降で詳しく説明していくので、適宜読み飛ばしていただいて構わない。

AdS/CFT 対応の主張は、

予想 4.1 (AdS/CFT 対応 ($\mathcal{N} = 1$ の場合)). S を 5 次元の佐々木-Einstein 多様体とし、 AdS_5 を 5 次元の Anti-de Sitter 時空とする。このとき、 $AdS_5 \times S$ 上の type IIB 超弦理論は、4 次元の $\mathcal{N} = 1$ 超対称筋ゲージ理論と等価である。 ■

ここで、 AdS_5 とは、5 次元の反ド・ジッター (Anti-de Sitter) 空間と呼ばれるものであり、(Lorentz の signature を持つ) 5 次元の双曲空間の事であるが、本稿の中では直接にはほとんど現れない。むしろ、超弦理論の臨界次元は 10 であるから、残りの 5 次元分を占めている佐々木-Einstein 多様体 S のほうが重要である¹¹。ここで、なぜ S が佐々木-Einstein なのかということだが、まず佐々木という条件は、 $\mathcal{N} = 1$ の超対称性が保たれるため (Killing スピノルが存在するための条件) である [39, 40]。また Einstein という条件は、超弦理論には、(超)重力理論が含まれており、その運動方程式である Einstein 方程式を満たすという要請に他ならない。

一方、AdS/CFT の CFT とは、共形場理論 (conformal field theory) の略であり、今の場合は、4 次元の $\mathcal{N} = 1$ (この $\mathcal{N} = 1$ は AdS 側の $\mathcal{N} = 1$ に対応している) 筋ゲージ理論と呼ばれるものであり、あとから定義する (関係付きの) 筋から定義されるある種のゲージ理論である。

すでに述べたように、この予想そのものを正面から数学的に正確に定式化することは、現時点では非常に困難である。たとえば、 $AdS_5 \times S$ 上の超弦理論を数学的に定式化することは非常に困難であるし¹²、また 4 次元の $\mathcal{N} = 1$ 超対称筋ゲージ理論を数学的に定式化することも、(弦理論の定式化に比べればずっと簡単であるはずだが) 十分になされているとも言い難い。

では、AdS/CFT 対応は少なくとも現時点での数学の研究には縁の無いものなのであろうか? 答えは否である。AdS/CFT 対応を正面から定式化することはできなくとも、その具体的な予言の一つ一つについては、数学的に定式化することが可能な場合があるのである。

その一つとして、AdS/CFT 対応が予言する一つの関係式を書き下しておこう。

予想 4.2 (AdS/CFT 対応の一つの予想 (暫定版)). S を 5 次元の佐々木-Einstein 多様体とし、 AdS_5 を 5 次元の Anti-de Sitter 時空とする。このとき、 $AdS_5 \times S$ 上の Type IIB 超弦理論の「ゲージ理論双対」が存在して、それが (関係付き) 筋 Γ で指定されるものとする。このとき、 Γ から計算されるある量 $a(\Gamma)$ に対

¹¹ もっとも、この書き方は、本稿を理解するうえでは差し支えないが、一面的な理解である。実際には、 AdS_5 側の情報と、 S 側の情報とは、しばしば密接に関係している。

¹² それどころか、物理的にも十分な理解があるとは言えない。例えば、もっともシンプルな $S = S^5$ の場合でさえ、 $AdS_5 \times S^5$ 上の弦理論を量子化することには困難が存在しており、pure spinor formalism などを用いた研究は進められているものの、満足のいく状況とはいえない。

して、

$$\text{Vol}(S) = \frac{\pi^3}{4} \frac{1}{a(\Gamma)} \tag{4.1}$$

この式の左辺は、佐々木-Einstein 多様体の体積であり、もちろん幾何的に理解されている量である。また、右辺も、これから述べるように、数学的に定式化することができる量である。したがって、この関係式は、数学的な意味を持たせることができる。さらに、この一見地味な関係式は、数学にも発展をもたらしたのである。この予想は、後に見るように、完全とは言わないまでも部分的には解決をみている。

なお、以下の話では、当分の間佐々木多様体はすべてトーリックに限ることにする。トーリックではない佐々木多様体についても部分的な解析はなされている（特に orbifold の場合はよく分かっている）が、トーリックの場合が最もよく理解されているからである。

5 籠と a-maximization

5.1 関係付の籠とスーパーポテンシャル

まず、籠を定義しておこう。ここでの籠とは、単に有向グラフのことである。定義はほとんど自明であるが、一応定義を述べておくと次のようになる。

定義 5.1. 籠とは、四つ組 $Q = (V, E, s, t)$ のことである。ただし、 V は頂点の集合、 E は辺の集合、 $s, t : E \rightarrow V$ はそれぞれ、辺 $e \in E$ にその始点 (source) と終点 (target) を対応させる写像のことである。

念のため、一つだけ簡単な例をあげておこう。後述するように、これは実はコニフォールドに対応する籠になっている：

例 5.2. 図 3 の籠に対して、

$$V = \{v_1, v_2\}, A = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}, s(a_1) = s(a_2) = t(b_1) = t(b_2) = v_1, t(a_1) = t(a_2) = s(b_1) = s(b_2) = v_2$$

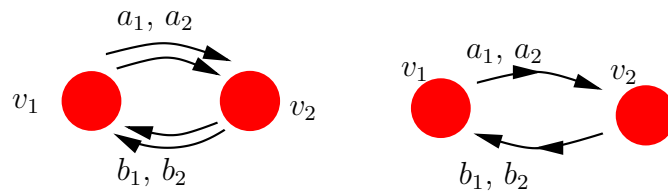


図 3: 籠 $Q = (V, A, s, t)$ の例。実はコニフォールドに対応する籠である。左と右は同じ意味である。

なお、読者によっては、これは、コニフォールドなどではなく、もっと単純な $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ 、或いは A_2 型特異点に対応する籠であると思っただろう。それは実際正しく、この籠は $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ の籠でもある¹³。但し、コニフォールドの時には、非自明なポテンシャルと呼ばれる量（後に出てくる (5.6) 式参照）を考える点において、 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ の時とは違いが出るのである。この点については、以下で説明していく。

注意として、この例のように、一つの頂点ともう一つの頂点を結ぶ矢印が 2 本以上ある時には、図 3 の左のように矢印を複数書く代わりに、右のように矢印を重ねて書くこともあるので注意されたい。

次に、籠 Q に対して、その上の道を以下のように定義しよう¹⁴。

¹³より正確には、 $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ の籠には、頂点 v_1 から出て v_1 に戻るような矢印や、 v_2 から出て v_2 に戻るような矢印も存在するが、今は気にしないことにした。

¹⁴今回は、都合上 [41] とは矢印の並び方を逆にした。つまり、ここでの (a_1, a_2, \dots, a_n) は、[41] での $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ に対応する。

定義 5.3. 籠 Q の道とは、矢印の列 (a_1, a_2, \dots, a_n) で、 $t(a_i) = s(a_{i+1}) (i = 1, 2, \dots, n-1)$ を満たすものをいう。つまり、各々の矢印の終点が、次の順番（すぐ右）の矢印の始点になっているものをいう。

このとき、 n を道の長さと呼ぶ。また、道というときには、長さ 0 の道、つまり頂点にとどまってそこから動かない道のことも含めて考えることにする。

さて、次に、籠 Q に対して、道の代数 (path algebra) $\mathbb{C}Q$ を定義しよう。

定義 5.4. 籠 Q の道の代数 (path algebra) $\mathbb{C}Q$ とは、あらゆる道の集合を基底とするベクトル空間に、道の合成によって積構造を入れた代数である：

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{cases} (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n) & (s(b_1) = t(a_m) \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他の時}) \end{cases} \quad (5.1)$$

さらに、 Q と $\mathbb{C}Q$ を組にすることで、関係付きの籠 (quiver with relations) を定義することができる：

定義 5.5. 関係付きの籠 (quiver with relations) Γ とは、籠 Q 及びその道の代数 $\mathbb{C}Q$ の両側イデアル \mathcal{J} の組 $\Gamma = (Q, \mathcal{J})$ のことである。

さて、ここまでで基本的に定義は終わっているが、実は、物理で現れる状況では、関係付きの籠において、任意のイデアル \mathcal{J} を考えるのではなく、特にそれがポテンシャル (potential) と呼ばれるものから作られる場合のみを考える。

そこで、まず準備として次のような微分を定義しよう。

$p = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ を閉じた道、つまり、 $t(a_n) = s(a_1)$ を満たす道であるとする。このとき、任意の矢印 b による p の微分を、

$$\frac{\partial p}{\partial b} = \sum_{i=1}^n \delta_{a_i, b} (a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}) \quad (5.2)$$

により定義する。但し、ここで、 $\delta_{a,b}$ は、

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & (a = b \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他の時}) \end{cases} \quad (5.3)$$

で定義されるものとする。この微分は、線形に拡張することで、閉じた道の形式和に対する微分に拡張することができる。

定義 5.6. ポテンシャル W とは¹⁵、閉じた道の形式和のことである。このポテンシャルから、両側イデアル \mathcal{J} が、

$$\mathcal{J} = \left(\frac{\partial W}{\partial a} \right)_{a \in A} \quad (5.4)$$

により定まる。そこで、今から、関係付き籠 $\Gamma = (Q, \mathcal{J})$ において、 \mathcal{J} が W から定まるようなものを特に考えることにし、 $\Gamma = (Q, W)$ と書くことにする。

なお、正確にはこの量 W は物理ではポテンシャルではなく、スーパーポテンシャル (superpotential) と呼ばれているものであるが、ここではポテンシャルと呼んでしまった。さらに、物理の文献では、閉じた道 (a_1, a_2, \dots, a_m) の代わりに、各 a_i に対応する「場」(籠のある表現) を X_i と書くことにして、 $\text{Tr}(X_1 X_2 \dots X_m)$ という記法を用いるので、物理の文献を参照するときには注意されたい。

¹⁵我々の論文 [41] ではこれを Φ と書いたが、ここでは佐々木の (1,1)-形式と同じ Φ を使ってしまったので W と書いた。これは、物理では標準的な記法である。

5.2 Hanany-Vegh のアルゴリズム

次に、トーリックデータ Δ が与えられた時に、対応する関係付筋 Γ を構成する方法について述べよう。これは、物理の論文 [42] に基づくものであり、fast inverse algorithm あるいは Hanany-Vegh のアルゴリズムと呼ばれる。また、その数学的定式化は、筆者の植田氏との共同研究 [43, 44, 41] によるものである。一般的な定式化については、原論文や解説 [45],[46] などが既にあるので詳しく述べることはしないで、ここでは主として例で解説していくことにしよう。なお、これらの例で得られた関係付き筋は、後に a-maximization のところ (§5.4) で具体的な計算にもちいる。

例 5.7 (コニフォールド). まず、比較的簡単なコニフォールドの場合をやってみよう。この場合の手順を具体的に示したのが図 4 である。

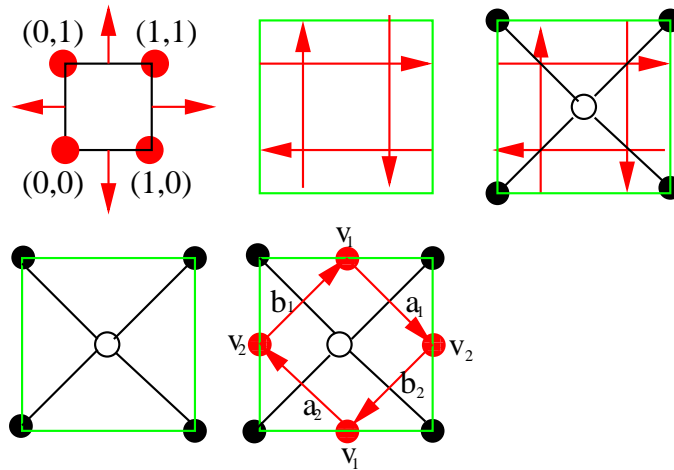


図 4: コニフォールドの場合の Hanany-Vegh のアルゴリズム。

まず、トーリック図が与えられたときに、その法線を引く (左上)。この場合は、トーリック図が四角形なので、4 本の線が引かれることになる。次に、それとは別に 2 次元トーラス \mathbb{T}^2 を用意し、その上に、先程書いた法線と傾きが同じになるような直線を書く (ただし、3 本以上の直線が一点で交わらないようにする)。あるいは、このことによって、 \mathbb{T}^2 は、幾つかの領域 (今の場合は、4 つの領域) に分割される (図 4 の中央上)。それらの領域に対して、次のように頂点を対応させよう。

- その領域の境界の矢印が、全て時計回り (反時計回り) に向いているとき、その領域をそれぞれ白 (黒) の領域と呼び、そこには白 (黒) の頂点を置くことにする。
- それ以外の時、つまり領域の境界の矢印が時計回りにも反時計回りにも向いているとき、その領域には何も頂点を置かないことにする。

今の場合、白の領域が一つ、黒の領域が一つ、どちらでもない領域が一つになっているので、白の頂点を一つ、黒の頂点を一つ置くことになる。

更に、頂点同士を辺で結ぶことにしよう。ある頂点と別の頂点は、対応する領域が共有する点を持つとき、共有する点ごとに辺で結ばれているものとしよう。今の場合、白の領域と黒の領域は 4 つの共有点を持つので、4 本の辺で結ばれることになる (図 4 の右上)。

こうして、 \mathbb{T}^2 上にグラフが書かれることになるが、これは、特に、どの辺も色の異なる頂点を結ぶようになっており、2 色グラフ (2 部グラフ、bipartite graph) とよばれる特別なグラフになっている。一応形式的な定義を与えておくと、

定義 5.8. \mathbb{T}^2 上の 2 色グラフ (B, W, E) とは、

- 黒の頂点の集合 $B \subset \mathbb{T}^2$
- 白の頂点の集合 $W \subset \mathbb{T}^2$
- 辺の集合 E 。これは、 \mathbb{T}^2 上の線分 e で、その一つの端点が B に、もう片方の端点が W に含まれるようなものの集合である。

■

となる。このような \mathbb{T}^2 上の 2 色グラフは、物理ではブレーンによるタイル張り (brane tiling) とよばれ [47, 48]、実は D5 ブレーンと NS5 ブレーンからなる系の情報を表したものである (その物理的意味については [49] の §2 や [50] が参考になるだろう) ほか、 \mathbb{T} 双対を通じて Calabi-Yau 多様体の幾何学とも関連している [51]。

さて、話を元に戻すと、こうして作られた 2 色グラフから、双対を取ることによって、 \mathbb{T}^2 上の有向グラフを得ることができる (図 4 の中央下)。但し、2 色グラフの白黒の構造から、双対グラフの辺に向きが入る。つまり、白の頂点を右に、黒の頂点を左に見るような向きに矢印の向きをつければよい。

こうして得られた \mathbb{T}^2 上の有向グラフ (periodic quiver) から、関係付き籠 $\Gamma = (Q, W)$ を作るができる。

まず、 \mathbb{T}^2 上の有向グラフを、 \mathbb{T}^2 に書かれていることを忘れて単にグラフと思うと Q が得られる。

次に、ポテンシャル W は、一般的には次の式で与えられる：

$$W = \sum_{w \in W} c(w) - \sum_{b \in B} \tilde{c}(B) \quad (5.5)$$

但し、 $w \in W$ に対し、 $c(w)$ とは w の周りに時計回りに回る閉じた道のことであり、 $b \in B$ に対し、 $\tilde{c}(B)$ とは w の周りに時計回りに回る閉じた道のことである。

今のコニフォールドの場合だと、まず、 Q は、確かに図 3 のようになることが分かる。また、ポテンシャル W は、

$$W = +(a_1, b_1, a_2, b_2) - (a_1, b_2, a_2, b_1) \quad (5.6)$$

である。

■

例 5.9 (del Pezzo 2). さて、次の具体例として、del Pezzo 2 の場合を述べておこう。手続きは前と同様なので、図 5-図 9 をごらん頂きたい。但し、今の場合は、 \mathbb{T}^2 上に法線と同じ傾きの線を書くときに、その線の平行移動の自由度の分だけいろいろなやり方が生じる。この場合は、admissible と呼ばれる条件を満たす配置のみを拾ってくる¹⁶。但し、admissible とは、2 色グラフを書いたときに、他のどの頂点とも結ばれていないような頂点の一つもないという条件のことをさす。今の場合、admissible な配位は二つある (図 6、7) が、対応する 2 色グラフを書くときどちらも図 9 になっている。

また、ポテンシャル W も 2 色グラフから読み取れて、

$$\begin{aligned} W = & -(a_{15}, a_{54}, a_{43}, a_{32}, a_{21}) + (a_{15}, b_{54}, a_{43}, a_{31}) + (b_{15}, a_{54}, a_{42}, a_{21}) \\ & - (b_{15}, a_{53}, a_{31}) + (a_{53}, a_{32}, a_{25}) - (b_{54}, a_{42}, a_{25}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

■

なお、ここまでの解説では、 \mathbb{T}^2 上に天上下りに絵を描いたので、その意味が不明であり、その点を不満に思う読者もおられることだろう。実は、 \mathbb{T}^2 に描いた絵は、コアメーバ (coamoeba) と呼ばれるものの漸近境界 (asymptotic boundary) を表しているという意味を持っている。詳細については、植田氏による解説 [45] を見よ。

¹⁶先程のコニフォールドの場合にこのことを気にしなかったのは、法線をどのように配置しても、この条件を満たしていたからである。

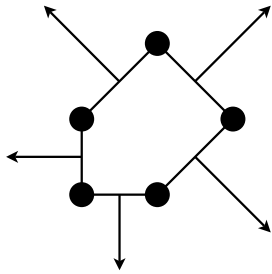


図 5: dP_2 のトーリック図

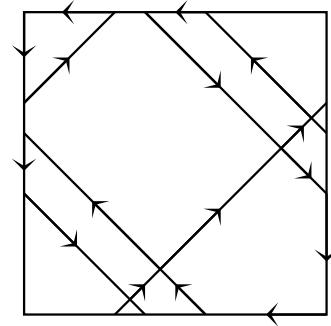


図 6: admissible な配位。

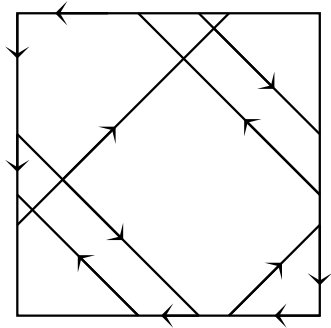


図 7: 別の admissible な配位。

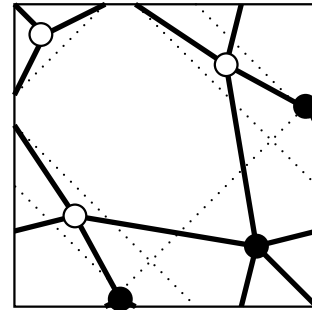


図 8: 2色グラフ

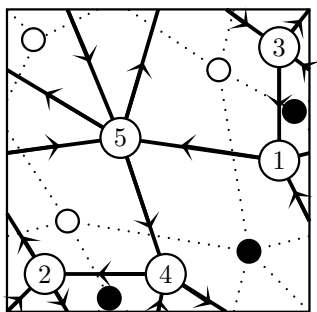


図 9: dP_2 に対応する籠

また、ここでやった例の場合には admissible な配置に対応する関係付き籐は一意であった (dP_2 の時は二つ出てくるように見えたが、実は同等であった) が、より一般のトーリック図 Δ に対しても、同じように Hanany-Vegh のアルゴリズムがただ一つの関係付き籐を与えるようになっているかどうかは、現在筆者の知る限り未解決の問題である。

例 5.10 ($L^{1,7,3}$). 3 つめの例として、更に複雑な例として、 $L^{1,7,3}$ に対応する籐を (ポテンシャルは非常に複雑なので示さないことにして) 答えだけ示しておこう (図 10)。

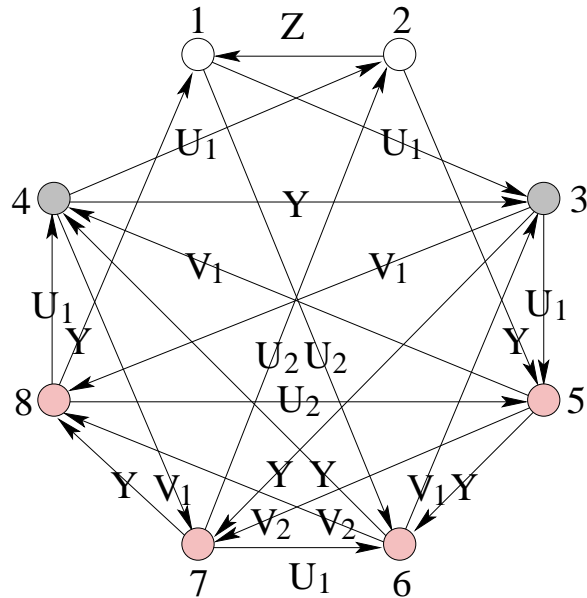


図 10: $L^{1,7,3}$ に対応する籐。

このような複雑な籐の例は、論文 [48, 52] に数多く載せられているので参照されたい。また、Hanany-Vegh の原論文 [42] にも、幾つかの例が載っている。

5.3 Toric Duality

ここまで説明してきたように、Hanany-Vegh のアルゴリズムによって、 Δ が与えられると Γ を構成することができるが、実は、 Δ と Γ との対応は一意ではない。つまり、 Δ と Γ との対応は 1 対多になっており、 Γ を決めれば Δ は一意に決まる。この点については、Kasteleyn 行列を使ったアルゴリズムが知られているが、それについて述べると本題から少々外れるのでここでは述べない。[48, 43] を見よ。また、Kasteleyn 行列など、関連するダイマーの話題については [53] や [54] 等を見よ。

ところが、 Δ を決めても対応する Γ は複数存在し、一意には決まらない。これを toric duality と呼んでいる。これまで Hanany-Vegh のアルゴリズムでやってきたのは、ひとつ Δ を決めた時に、複数ある Γ の中から一つ (以上) を作り出す方法なのである。具体例として、図 11 の 4 つのダイマーは、全て同じトーリック図を与えることが分かる。

物理的には、これは Seiberg duality [55] と呼ばれる現象として理解されており、これは、少なくともある場合には、mutation に対応するものであることが知られている [56] ほか、tilting といったものに対応する [57, 58] ことが分かっている。また、ある場合には、Picard-Lefschetz 変換に相当することも知られている。これらの間の関係は、部分的には様々な仕事が行なわれているもの、未だはっきりとしていないと言っていだろう。

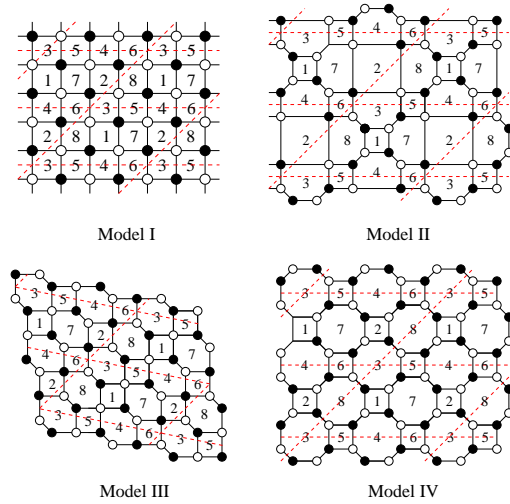


図 11: これら 4 つの 2 色グラフ (から定まる関係付き籠 Γ) は、Kasteleyn 行列を使ったアルゴリズムを使って対応するトーリック図 Δ を計算すると、全て同じ Δ を定める。赤の点線で囲まれた領域一つ分が、 \mathbb{T}^2 の基本領域である。

5.4 a-maximization

以下では、ポテンシャルから定まる関係付き籠 $\Gamma = (Q, W)$ が与えられた時に、そこから central charge a を計算する方法を紹介しよう。

定義 5.11 (a-maximization[59]). ポテンシャルよって関係づけられた籠 $\Gamma = (Q, W)$ が与えられたものとしよう。 A の各元 (つまり、各々の矢印) に対し、 \mathbb{R} に値を持つ変数を用意し、それを $x_1, x_2 \dots x_{|A|}$ と書くことにしよう。このとき、以下の条件の下で、三次関数

$$a(x_1, x_2 \dots x_{|A|}) = \frac{9}{32} \left(2|V| + 3 \sum_{i=1,2,\dots,|A|} (x_i - 1)^3 \right) \tag{5.8}$$

を最大化したときに、その最大値が central charge a である：

1. $x_i \geq 0$ ¹⁷
2. W が $(a_{i_n}, a_{i_{n-1}}, \dots, a_{i_1})$ という項を (0 でない係数で) 含むとき、

$$x_{i_n} + x_{i_{n-1}} + \dots + x_{i_1} = 2 \tag{5.9}$$

3. 籠の任意の頂点 $v \in V$ に対し、その頂点に入るかまたは、その頂点から出る全ての矢印の集合を $A(v)$ と書くことにしよう：

$$A(v) := \{a \in A | s(a) = v \text{ or } t(a) = v\} \tag{5.10}$$

このとき、課されるべき条件は、任意の $v \in V$ に対し、

$$\sum_{a \in A(v)} (1 - x_a) = 2 \tag{5.11}$$

¹⁷ 正確には、この領域に限定して考えればいいかは物理的に少々微妙な問題である。しかし、経験上 AdS/CFT 対応に現れるような籠ゲージ理論についてはここに与えた領域に制限していいことが知られているので、ここではこの条件を採用することにする。

これらの定義や条件は非常に恣意的に思えるが、それぞれきちんとした物理的な背景があって、出てきたものである。以下の議論を理解するためには全く必要ないが、気になる読者のために、少しコメントしておこう。まず、 a が 3 次関数になっているのは、4 次元ゲージ理論の三角アノマリー (triangular anomaly) の 3 に由来するものである。また、 $x_i - 1$ となっているのは、超場のスカラー成分とフェルミオン成分の R-charge が 1 ずれていることに由来するものである。また、 $2|V|$ の部分は、 x_i の極大値を求めるのにはきかないが、最終的に a の値を求めるときにはきく量であり、物理的にはゲージノからの寄与になっている。

また、条件のうち二つめのもの (5.9 式) は、ポテンシャル W の R-charge が 2 であるという条件であり、三つ目の条件 (5.11 式) は、 $v \in V$ に対応するゲージ群の β 関数が消えるという条件である。

また、 a は central charge と名前がついている。2 次元の共形場理論の時には、central charge c と呼ばれる量が存在し、それを Morse 関数とする gradient flow が繰り込み群の flow であるという著しい定理が存在する (Zamolodchikov の c -定理 [60])。しかし、4 次元の共形場理論では、そのような定理は未だに証明されていないが、2 次元の時の c に相当する量の候補は存在する [61]。それが、ここで a と書いたものである。

さて、具体的に幾つかの例で計算してみよう。

例 5.12 ($T^{1,1}$). まず、肩慣らしに、 $T^{1,1}$ の場合を考えてみよう。この場合は、矢印が 4 つ (a_1, a_2, b_1, b_2) あったので、4 つの変数を用意すればよい。それらを x_1, x_2, y_1, y_2 としよう (x_i は a_i 、 y_i は b_i に対応する変数とする)。この時、極大化すべき関数は、

$$a(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{9}{32} [2 \cdot 1 + (x_1 - 1)^3 + (x_2 - 1)^3 + (y_1 - 1)^3 + (y_2 - 1)^3] \quad (5.12)$$

である。条件は、まず、全ての i に対して $x_i \geq 0$ であり、更に、ポテンシャルが (5.6) であったから、(5.9) の条件から、ポテンシャル 5.6 に二つの項があるので 2 個の式がたつが、それは同じ条件で、

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 2 \quad (5.13)$$

最後の条件 (5.11) は、

$$(1 - x_1) + (1 - x_2) + (1 - y_1) + (1 - y_2) = 2 \quad (5.14)$$

であるが、これは変形すれば (5.13) と同じである。よって、最終的に、 x_i, y_i 達が満たすべき条件は、

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 2 \quad (5.15)$$

である。この極大化問題は簡単で、答えは

$$x_i = y_i = \frac{1}{2} \quad (\text{for all } i) \quad (5.16)$$

であり、その極値の値は、

$$a(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{9}{32} \left[2 \cdot 1 + 4 \left(\frac{1}{2} - 1 \right)^3 \right] = \frac{27}{64} \quad (5.17)$$

一方、既に求めた $T^{1,1}$ の体積から

$$\frac{\pi^3}{4} \frac{1}{\text{Vol}(T^{1,1})} = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{27}{16\pi^3} = \frac{27}{64} \quad (5.18)$$

この二つの量は、一致しており、(4.1) 式は $T^{1,1}$ の場合に正しいことが確かめられた。

■

例 5.13 (del Pezzo 2). この場合のポテンシャル W は、既に (5.7) 式で求めていた。読者の便宜のためここに繰り返しておこう：

$$\begin{aligned} W = & - (a_{15}, a_{54}, a_{43}, a_{32}, a_{21}) + (a_{15}, b_{54}, a_{43}, a_{31}) + (b_{15}, a_{54}, a_{42}, a_{21}) \\ & - (b_{15}, a_{53}, a_{31}) + (a_{53}, a_{32}, a_{25}) - (b_{54}, a_{42}, a_{25}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

よって、ポテンシャルからくる条件 (5.9) は、

$$\begin{aligned} x_{15} + x_{54} + x_{43} + x_{32} + x_{21} &= x_{15} + y_{54} + x_{43} + x_{31} = y_{15} + x_{54} + x_{42} + x_{21} \\ &= y_{15} + x_{53} + x_{31} = x_{53} + x_{32} + x_{25} = y_{54} + x_{42} + x_{25} = 2 \end{aligned} \quad (5.20)$$

但し、前と同様、矢印 a_{ij} 及び $b_{i,j}$ に対応する変数をそれぞれ x_{ij} 及び $y_{i,j}$ とした。

また、籠の頂点から来る条件 (5.11) は、頂点 1 から 5 まで順に書くと、

$$\begin{aligned} (1 - x_{21}) + (1 - x_{31}) + (1 - x_{15}) + (1 - y_{15}) &= (1 - x_{21}) + (1 - x_{25}) + (1 - x_{42}) + (1 - x_{32}) \\ &= (1 - x_{31}) + (1 - x_{32}) + (1 - x_{43}) + (1 - x_{53}) = (1 - x_{43}) + (1 - x_{43}) + (1 - x_{54}) + (1 - y_{54}) \\ &= (1 - x_{15}) + (1 - y_{15}) + (1 - x_{25}) + (1 - x_{53}) + (1 - x_{54}) + (1 - y_{54}) = 2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

これは、 $6 + 5 = 11$ 個の式であるが、独立ではなく、

$$\begin{aligned} x_{32} &:= x, \quad x_{25} := y, \quad x_{21} = z, \quad y_{15} = w, \quad x_{43} = w - x, \quad x_{54} = x_{31} = x + y - w, \\ y_{54} &= x + z, \quad x_{15} = x_{42} = 2 - x - y - z, \quad x_{54} = 2 - x - y \end{aligned} \quad (5.22)$$

のように解くことができ、その結果、

$$\begin{aligned} a &= \frac{9}{32} [5 + (x - 1)^3 + (y - 1)^3 + (z - 1)^3 + (w - 1)^3 + (w - x - 1)^3 \\ &\quad + 2(x - y - w - 1)^3 + (x + z - 1)^3 + 2(1 - x - y - z)^3 + (1 - x - y)^3] \end{aligned} \quad (5.23)$$

これを極大化すると、

$$x_* = \frac{1}{2}(-5 + \sqrt{33}), \quad y_* = \frac{1}{4}(9 - \sqrt{33}), \quad w_* = \frac{1}{16}(17 - \sqrt{33}), \quad z_* = \frac{2}{16}(19 - 3\sqrt{33}) \quad (5.24)$$

であり、その時の a の値は、

$$a = \frac{243}{1024}(-59 + 11\sqrt{33}) \quad (5.25)$$

a が分かると、(4.1) 式を使って対応する佐々木多様体の体積を求めることができる。これは、

$$\text{Vol}(S_{dP_2}) = \frac{\pi^3}{4} \frac{1}{a} = \frac{(59 + 11\sqrt{33})\pi^3}{486} \quad (5.26)$$

このようにして、 S_{dP_2} の体積が求まってしまった！ ■

さて、ここまでやってきたことを振り返ってみよう。まず、トーリックデータが与えられると、そこから対応する関係付き籠を得ることができる (§5.2)。次に、その関係付き籠のデータから、 a -maximization を使って central charge a を計算することができる。最後に AdS/CFT の関係式 4.1 を使うと、トーリック佐々木・アインシュタイン多様体の体積が計算できることになる。つまり、これはトーリックデータだけからトーリック佐々木・アインシュタイン多様体の体積が具体的に計算できることを示しているのである！

トーリックデータが与えられれば基本的にすべてが決まるべきというトーリックの精神からいえば、これは自然なことに思えるが、これは決して自明な事実ではない。実際、ナイーブに考えると、体積を計算するには具体的な計量の形が必要に思えるが、Calabi-Yau 多様体の計量を求めることは、一般には非常に難しい問題だからである！つまり、佐々木-Einstein 計量を求めるには、計量の空間という無限次元の空間の上で変分を取らなければならないはずだが、一方、(4.1) 式を経由すると、高々三次関数の極大化という、有限次元空間の上の問題で済んでしまうのである。つまり、佐々木-Einstein 多様体の体積を、有限次元の変分問題によって求める、幾何学的方法があることが強く示唆されるのである。

この問題に対する答えは、Martelli-Sparks-Yau[62, 4] によって肯定的に与えられた。つまり、具体的な計量を求めずとも、トーリックデータだけから、有限次元空間の上での変分問題によって体積が求まることが示されたのである。以下では、その手続き (Volume minimization, Z-minimization) について述べていこうかと思う。

6 Volume Minimization (Z-minimization)

6.1 一般の場合

以下では、Martelli-Sparks-Yau[62, 4] の定式化に従う。1 本目の論文はトーリックの場合、2 本目の場合はより一般に論じている。また、ここでは、任意の奇数次元の佐々木 (-Einstein) 多様体を考え、その次元を $2n - 1$ と書くことにする。先に述べたように、籠との関係がはっきりしているのは $n = 3$ のときであるが、volume minimization 自体は任意の n で考えることができるので、ここでは n は任意である。

また、自己同型群 $\text{Aut}(S)$ の極大可換部分群 (maximal torus) を \mathbb{T}^s とし、その Lie 環を \mathfrak{t}_s と書くことにしよう。トーリックの場合は $s = n$ であるが、ここでは当分の間 $s < n$ の場合も含めて考えることにする。また、irregular の時には、Reeb ベクトル場の軌道が閉じないので、 $s > 1$ であることが言えることにも注意しておこう。

さて、佐々木-Einstein 体積を求めるには、素朴には計量が求まらなければならないので、佐々木多様体の上で Einstein 計量を求めるにはどうしたらよいかを考えよう。一つの答えは、Einstein-Hilbert 作用

$$S_{EH}[g] = \int_S [R + 2(n-1)(3-2n)] d\mu \quad (6.1)$$

の変分をとればよい、ということである。実際、変分して得られる式は、Einstein 計量であるという式

$$\text{Ric} = (2n-2)g \quad (6.2)$$

であり、これは計量錐を取ると Ricci 平坦であるという式に他ならない。

次に、単純な計算 (および、動径方向について変分をとること) により、実は、この Einstein-Hilbert 作用は佐々木多様体 S の体積に比例することが言えてしまう：

$$S[g] = 4(n-1)\text{Vol}(S)[g] \quad (6.3)$$

よって、問題は、 $\text{Vol}(S)[g]$ の極値を求める問題に帰着された。しかし、まだ計量という無限次元の空間の変分問題を解かなければいけないように見える。ところが、次の定理より、問題は、a-maximization のほうでそうであったように、有限次元の問題に帰着されてしまうのである：

命題 6.1. $\text{Vol}(S)[g]$ は、Reeb ベクトル場 ξ のみにより、transverse Kähler structure の変形に依らない。■

これは、驚くべき事であるが、Kähler-Einstein の場合に、体積が Kähler 類にしか依らないという類似の事実が知られており、また証明も同じような方法を用いる。

こうして、関数

$$\text{Vol} : \mathcal{R}(C(S)) \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (6.4)$$

の変分問題という有限次元の問題に帰着されたことになる。ただし、ここで $\mathcal{R}(C(S))$ と書いた定義域が問題であるが、これは次のように定義される：

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(C(S)) = \{ \xi \in \mathfrak{t}_s \mid C(S) \text{ にある計量が存在し、} \\ \mathbb{T}^s \text{ はその計量に Hamiltonian 作用をし、} \\ \xi \text{ は、その計量に対応する Reeb ベクトル場になっている。} \end{aligned} \quad (6.5)$$

である。ここで、 $\xi \in \mathfrak{t}_s$ は \mathbb{T}^s の作用が Reeb 型 (Reeb type) であることを保証するための条件である ([63])。

さて、関数 Vol の変分を計算すると、その結果は次の通りである：

命題 6.2.

$$d\text{Vol}(Y) = -n \int_S \eta(Y) d\mu \quad (6.6)$$

$$d^2\text{Vol}(Y, Z) = n(n+1) \int_S \eta(Y)\eta(Z) d\mu \quad (6.7)$$

$$(6.8)$$

ただし、ここで Y, Z は $\mathfrak{t}_\mathfrak{s}$ の正則 Killing ベクトル場であり、 η は佐々木計量の接触 1 形式、 $d\mu$ は Riemannian measure である。

このうち、第 1 式の右辺は、Kähler-Einstein 計量の存在への障害である二木不変量 [64, 65] と (係数を除いて) 一致することが示される。つまり、体積を最小化するというは、特にその 1 次変分がゼロになっているということであり、それは、Kähler-Einstein の存在への障害である二木不変量をゼロにしていることに他ならないのである！

また、第 2 式より、 Vol が凸関数であることがわかり、特に臨界点の一意性が言えることになる。

このように、Reeb ベクトル場の関数としての Vol を変分する手続きを Volume minimization (Z-minimization) と呼んでいる。Z-minimization という名前は、Martelli-Sparks-Yau の 1 本目の論文で、後から定義する量 (体積の定数倍) を Z と書いたことに由来しており、恐らく a-maximization に対応させようとネーミングしたものである。

次に、体積 $\text{Vol}(S)$ を、局所化を使って計算する方法について述べることにしよう。そのために、体積を

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \int_{C(S)} e^{-r^2/2} \frac{\omega^n}{n!} \tag{6.9}$$

と書いておこう。

すると、実は (ここまでで説明してこなかったが) $r^2/2$ は Reeb ベクトル場の Hamilton 関数であることが知られているので、それを H と書くことにすると、(6.9) 式は、

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \int_{C(S)} e^{-H} e^\omega \tag{6.10}$$

となる。この式の右辺は、Duistermaat-Heckman の公式 [66] に現れる式である！よって、この公式をつかって、体積を局所化を使ってあらわすことができる。

ただし、ここで少し微妙な点がある。つまり、Reeb ベクトル場は $r > 0$ では固定点を持たないので、すべての寄与は、 $r = 0$ から来ることになる。よって、形式的に Duistermaat-Heckman の式を適用するためには、 $r = 0$ にある特異点を (部分的に) 解消して公式を適用してから、特異点を解消した多様体の特異点をもつようになる極限を考えるということが必要になる。この部分は特に数学的に微妙であり、完全に正当化されているかどうか筆者には定かでない (が、正当化されるというのが Martelli 達の主張である。)

定理 6.3 (Martelli-Sparks-Yau).

$$\frac{\text{Vol}(g)}{\text{Vol}(S^{2n-1})} = \sum_{\{F\}} \frac{1}{d_F} \int_F \prod_{m=1}^R \frac{1}{\langle \xi, u_m \rangle^{n_m}} \left[\sum_{a \geq 0} \frac{c_a(\mathcal{E}_m)}{\langle \xi, u_m \rangle^a} \right]^{-1} \tag{6.11}$$

但し、

- $\{F\}$ は固定点集合の連結成分
- 各連結成分 F に対し、その normal bundle \mathcal{E} への \mathbb{T}^s の作用は重み $u_1, \dots, u_R \in \mathfrak{t}_\mathfrak{s}^*$ によって決定され、それに対応して \mathcal{E} は $\mathcal{E} = \bigoplus_{m=1}^R \mathcal{E}_m$ と分解する。
- $c_a(\mathcal{E}_m)$ は \mathcal{E}_m の Chern 類
- Duistermaat-Heckman を適用するとき、一般には $C(S)$ の partial resolution を取って考えるので、 \mathcal{E} のファイバーには一般に orbifold 特異点を持ち、 \mathbb{C}^l/Γ の形になっている。このとき、 $d_F = |\Gamma|$ と書いた。

また、式 (6.3) の右辺の u_m や $c_a(\mathcal{E}_m)$ などが有理数であることに注意すると、次の系が導かれる：

系 6.4. $2n - 1$ 次元佐々木-Einstein 多様体に対し、 $\frac{\text{Vol}(S)}{\text{Vol}(S^{2n-1})}$ は代数的数である。

さらに、単に代数的数であるのみならず、後から Z -minimization の具体例で見ると、この数の degree はそれほど大きくない。この代数的数の degree を $\text{deg}(S)$ と書くことにしよう。また、佐々木多様体 S に対して、Reeb ベクトル場の軌道の閉包の次元を $\text{rank}(S)$ と書くことにしよう。 $\text{deg}(S)$ について、Martelli-Sparks-Yau は、次のような予想も提出している：

予想 6.5 (Martelli-Sparks-Yau[4]).

$$\text{deg}(S) = (n - 1)^{\text{rank}(L) - 1} \quad (6.12)$$

例えば、これまで考えてきたような $T^{1,1}$ や $Y^{p,q}$ の場合には、 $\text{rank}(L) = 2$ (§6.2 の具体例を見よ)、 $n = 3$ であるから、この式は、確かに $\text{deg}(S) = 2$ を与える。

6.2 トーリックの場合

次に、今度はトーリックという条件を課してどうなるかを考えることにしよう。まずこの時に、 $\mathcal{R}(C(S))$ が \mathcal{C} であることが次のようにして分かる。

命題 6.6 ([62]). $C(S)$ の Kähler 計量の空間は、

$$\mathcal{C}_{\text{int}} \times \mathcal{H}^1(\mathcal{C}^*) \quad (6.13)$$

で与えられる。ただし、ここで Reeb ベクトル場が動く範囲で、 \mathcal{C}_{int} は \mathcal{C} の内部を表す。また、 $\mathcal{H}^1(\mathcal{C}^*)$ は \mathcal{C}^* 上滑らかな次数 1 の同次関数の全体である。

より具体的に書くために、 $C(S)$ が $\mathcal{C}^* = \mu(C(S))$ 上の \mathbb{T}^n -ファイブレーションになっていることを思い出し (§2.4)、そのシンプレクティック座標を $(y^1, \dots, y^n, \phi^1, \dots, \phi^n)$ とする ((y_1, \dots, y_n) は $\mathcal{C}^* = \mu(C(S))$ の座標、 ϕ^1, \dots, ϕ^n は \mathbb{T}^n の座標)。このとき、Kähler ポテンシャルを Legendre 変換して得られるシンプレクティックポテンシャルと呼ばれる量 G が、

$$G = G_{\text{can}} + G_\xi(y) + h(y) \quad (6.14)$$

によって書かれる。ここで、 G_{can} は、Guillemin が求めた [67] 標準的なシンプレクティックポテンシャル

$$G_{\text{can}}(y) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^d \langle y, v_a \rangle \log \langle y, v_a \rangle \quad (6.15)$$

であり、 G_ξ は Reeb ベクトル場 ξ によって決まる部分で、

$$G_\xi(y) = \langle \xi, y \rangle \log \langle \xi, y \rangle - \frac{1}{2} \left(\sum_{a=1}^d \langle y, v_a \rangle \right) \log \left(\sum_{a=1}^d \langle y, v_a \rangle \right) \quad (6.16)$$

である。また、 $h(y)$ は \mathcal{C} の境界まで含めて滑らかな関数である。このようにしてシンプレクティックポテンシャルが求まると、計量は、

$$g = G_{ij} dy^i dy^j + G^{ij} d\phi^i d\phi^j \quad (6.17)$$

のように求まる。但し、 $G_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial y^i \partial y^j}$ で、 G^{ij} はその行列としての逆である。

また、(6.14) 式から、 $\det(G_{ij})$ を計算すると、それが次のような特異性を持つことが分かる：

$$\det(G_{ij}) = f(y) \prod_a \frac{1}{\langle y, v_a \rangle} \quad (6.18)$$

但し、 $f(y)$ は滑らかな関数である。実は、Abreu によって示された ([68]、定理 2.8) ように、これは対応する Kähler 計量が滑らかになる条件になっている。

ちなみに、この $G(y)$ は Monge-Ampère 方程式を満たす。この方程式は、非線形であるので、解を具体的に求めることは非常に難しい。実際、 $L^{a,b,c}$ の時に知られている計量を積分してシンプレクティックポテンシャルを求めてみると、かなり複雑な形をしている [69]。

さて、この定理より、 ξ を C_{int} から任意に取ってくれば、常に対応する計量が存在することが分かる。よって、 $\mathcal{R}(C(S)) = C_{\text{int}}$ であり、これを定義域とする関数 Vol を考えることになる。Reeb ベクトル場を

$$\xi = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} \quad (6.19)$$

と書いたとき、 Vol を具体的に表すことができ¹⁸、その結果は、

命題 6.7. トーリックの時に、

$$\text{Vol}[b] = V[b_1 = n, b_2, \dots, b_n] = \frac{(2\pi)^n}{24} \sum_{a=1}^d \frac{(v_{a-1}, v_a, v_{a+1})}{(b, v_{a-1}, v_a)(b, v_a, v_{a+1})} \quad (6.20)$$

但し、 v_a と書いたのは、扇を指定する C の生成元であり、トーリック図上反時計回りに順番付けられているものとした。また、実は、この関数は b_1 については簡単に最小化でき、その結果が $b_1 = n$ になることが知られている。ここに書いたのは、既に $b_1 = n$ とおいた後の表式である。

Martelli-Sparks-Yau では、

$$Z[b] = \frac{1}{4(n-1)(2\pi)^n} S_{EH} = \frac{1}{(2\pi)^n} \text{Vol}[b] = \frac{1}{24} \sum_{a=1}^d \frac{(v_{a-1}, v_a, v_{a+1})}{(b, v_{a-1}, v_a)(b, v_a, v_{a+1})} \quad (6.21)$$

を Z と書いた。ここで、この量 $\text{Vol}[b]$ または $Z[b]$ を $b = (n, b_2, \dots, b_n)$ を C_{int} 上を動かして最小値を求めるのが Volume-minimization である。

さて、具体例を挙げておこう。

例 6.8 (conifold). まず、conifold の時は、図 1 から分かるように、

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 0, 0), v_4 = (1, 1, 0) \quad (6.22)$$

よって、Reeb ベクトル場を $b = (x, y, t)$ とすると、

$$Z[x, y, t] = \frac{(x-2)x}{8yt(x-t)(x-y)} \quad (6.23)$$

これを最小化して、

$$b_{\min} = (3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \quad (6.24)$$

但し、 $x = 3$ になるのは一般論から言えるが、この計算では残してみた。次の例でも同様である。

$$\text{Vol}(T^{1,1}) = \frac{16\pi^3}{27} \quad (6.25)$$

¹⁸この式は、トーリックの場合には、体積を具体的にトーリックデータから書き表せることに由来するものである。先程の (6.3) をトーリックの場合に用いた結果とは一見異なるように見えるが、実は非自明な関係によって一致することが確かめられる。

例 6.9 (del Pezzo 2). 次に、del Pezzo 2 上の場合の佐々木-Einstein 多様体の体積を考えることにしよう。トリーク図を指定するベクトルは、たとえば、

$$v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 1, 2), v_4 = (1, 2, 1), v_5 = (1, 1, 0) \quad (6.26)$$

であるから、

$$Z[x, y, t] = \frac{(x-2)(-t^2 + 2t(x+y) + (3x-y)(x+y))}{8yt(t-x-y)(t+x-y)(t-3x+y)} \quad (6.27)$$

これを極小化すると、

$$b_{\min} = \left(3, \frac{9}{16}(-1 + \sqrt{33}), \frac{9}{16}(-1 + \sqrt{33})\right) \quad (6.28)$$

これより、

$$\text{Vol}(S_{dP2}) = \frac{(59 + 11\sqrt{33})\pi^3}{486} \quad (6.29)$$

である、これは、以前に AdS/CFT の関係式 4.1 から「導出」した体積 (5.26) 式と確かに一致している！ ■

6.3 同変指数との関係

以下では、佐々木-Einstein 多様体 S の体積が、その計量錐 $C(S)$ の Cauchy-Riemann 作用素の同変指数と関係していることを述べよう。この部分は、非トリークの場合でも通用する議論である。

$C(S)$ 上の Cauchy-Riemann 作用素 $\bar{\partial}$ を考え、そこから楕円型複体

$$0 \rightarrow \Omega^{0,0}(C(S)) \rightarrow \Omega^{0,1}(C(S)) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^{0,n}(C(S)) \rightarrow 0 \quad (6.30)$$

を考える。この複体のコホモロジーを $\mathcal{H}^p := H^{0,p}(C(S), \mathbb{C})$ と書くことにしよう。このとき、 \mathcal{H}^0 は、コンパクトな場合と異なり、無限次元の空間になっている。

さて、 \mathbb{T}^r の作用は、 $\bar{\partial}$ と交換する。従って、 \mathbb{T}^r の \mathcal{H}^0 への作用が誘導される。そこで、 $q \in \mathbb{T}^r$ に対する同変指数は、

$$L(q, C(S)) = \sum_{p=1}^n (-1)^p \text{Tr}\{q|\mathcal{H}^p(C(S))\} \quad (6.31)$$

によって定義される¹⁹。本当は収束性が微妙であるが、ここでは議論しないことにする。

同変指数定理 [70] より、

$$C(q, W) = \sum_{\{F\}} \int_F \frac{\text{Todd}(F)}{\prod_{\lambda=1}^R \prod_j (1 - q^{u_\lambda} e^{-x_j})} \quad (6.32)$$

となる。但し、 $F, \mathcal{E}_\lambda, u_\lambda$ 等の記号は (6.3) 式と同じであり、 x_j は、splitting principle を使って $\mathcal{E}_\lambda \rightarrow F$ を

$$\mathcal{E}_\lambda = \bigoplus_{j=1}^{n_\lambda} \mathcal{L}_j \quad (6.33)$$

のように分解したときの第 1Chern 類である：

$$x_j = c_1(\mathcal{L}_j) \quad (6.34)$$

(6.3) 式と (6.32) 式を比べると、似たような式になっていることが分かるだろう。実際、 $C(q, C(S))$ と体積 $\text{Vol}(S)$ とは、次のように関係していることが分かる：

$$V(b) = \lim_{t \rightarrow 0} t^n L(\exp(-tb), C(S)) \quad (6.35)$$

¹⁹Lefschetz 数の意味で L と書いた。

つまり、 $C(q, C(S))$ は $q \rightarrow 1$ の極限で発散するが、その発散の漸近部分から、 $\text{Vol}(S)$ がもとめられるのであり、その意味で $C(q, C(S))$ は $\text{Vol}(S)$ よりもより多くの情報を持っていると言える。 $C(q, C(S))$ は、正則関数の数え上げを行っており、トーリックの場合には、それは C の格子点と 1 対 1 に対応することがよく知られている [5]。物理的には、 $C(q, C(S))$ は mesonic operator の数え上げに関連しており、最近、Plethystic と呼ばれる組み合わせ論的手法を用いてその数え上げの問題が議論されている [71, 72, 73]。

7 a-maximization は volume minimization である

7.1 5次元トーリック佐々木-Einstein 多様体の場合

さて、元に戻って、4.1式がどうなっているのか調べよう。以下では、トーリックに話を限定する。まず、a-maximization は、変数を矢印の数ほど用意して、そのうえで (5.9) 式や (5.11) 式などの条件を課すのであった。よって、独立な変数の数は、具体例を見れば分かるように矢印の数よりも少なくなる。それでは、一般のトーリック図から得られる籠の場合に、独立な変数はいくつで、他の変数をどのように取れば (5.9) 式や (5.11) 式などの条件を満たすようにとれるのだろうか、またそのときに関数 a はどのような形になるかを予想することが必要になる。幾つかの仮定のもとで、Butti と Zaffaroni は、この問題に一定の解答を与えた：

予想 7.1 (Butti-Zaffaroni[74], Benvenuti-Pando Zayas-立川,[75],Lee-Rey[76]). "minimal" な quiver に対しては、a-maximization は、

$$a^{\text{BZ}}[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d] = \frac{9}{32} \sum_{i,j,k=1, i < j < k}^d \phi_i \phi_j \phi_k |\det(v_i, v_j, v_k)| \quad (7.1)$$

を

$$\sum \phi_i = 2, \phi_i \geq 0 \quad (7.2)$$

のもとで極大化する問題に帰着する。 ■

ここで、 d というのは、§2.4の時に定義したように、扇の生成元 v_a 達の数のことである。つまり、トーリック図の境界上の格子点の数と言い換えても良い。また、"minimal" な quiver とは、恐らくあるトーリック図に対応する籠 (§5.3で述べたように、このような籠は一般には複数存在する) のうち、矢印の数が最小になるものを想定しているが、その正確な定義は与えられていない。ともかく、トーリック図が与えられれば、それに対してある意味標準的な籠を作ることができ、その形を予想する。この場合に、(5.9) 式や (5.11) 式などの条件をどう解けば良いかがわかるので、そこから a を計算すると a^{BZ} になったというわけである。

この予想を信じると、問題は a^{BZ} という三次関数の最大化の問題に帰着するので、それを調べればよく、その臨界点の存在と一意性が次の定理で示された：

定理 7.2 ([77]). a^{BZ} は上の条件 (7.2) のもとでただ一つの臨界点を持ち、それは最大値である。 ■

証明には、 a^{BZ} が zonotope と呼ばれる凸体の体積であることと、凸体の体積についての Brunn-Minkowski 不等式を用いる。

さて、以上の予想のもとで、いよいよ a-maximization と Z-minimization の等価性が示される：

定理 7.3 (Butti-Zaffaroni[74]).

$$a^{\text{MSY}}(b_2, b_3) := \frac{\pi^3}{4} \frac{1}{\text{Vol}(S)} \quad (7.3)$$

とし、また

$$f_i(b_2, b_3) := \frac{2l_i(b_2, b_3)}{\sum_i l_i(b_2, b_3)} \quad (7.4)$$

但し

$$l_i(b_2, b_3) = \frac{(v_{a-1}, v_a, v_{a+1})}{(u, v_{a-1}, v_a)(u, v_a, v_{a+1})} \quad (7.5)$$

$$(v_1, v_2, v_3) := \det(v_1 v_2 v_3) \quad (7.6)$$

$$u := \left(1, \frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right) \quad (7.7)$$

する。この時、

$$a^{\text{MSY}}(b_2, b_3) := a^{\text{BZ}}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d) \Big|_{\phi_i = f_i(b_2, b_3)} \quad (7.8)$$

証明は、基本的に、具体的な計算による。後に [76] によって簡単化された証明のほうが読みやすいかもしれない。

この定理の意味するところは、最大化問題や最小化問題をやる前から、 a -maximization と Z -minimization では、(反比例の関係にあるだけで) 同じ極大・極小化問題を考えているということが言えてしまうことである。

ただし、変数変換 $\phi_i = f_i(b_2, b_3)$ の本当の意味はあまり明らかにされていないうえに、変数の数は a -maximization では少なくとも d 個であるが、 Z -minimization のほうは 3 個 (あるいは b_1 をすでに決めたと思えば 2 個であり、異なっていることに注意が必要である²⁰。

なお、ここまではトーリックの場合について述べてきたが、non-toric の場合に、(4.1) 式を確かめることは、興味深い問題である。先に紹介した 2 色グラフを用いる方法は、(少なくとも現時点では) トーリックという条件に強く依存しており、non-toric の場合に一般化するのは全く容易ではなく、non-toric の場合には (toric の orbifold の場合を除いて) 解析は余り進んでいない。しかし、non-toric でも例えば del Pezzo 曲面 (dP_k , ($k = 4, 5, \dots, 8$)) の場合には、exceptional collection をから籠を書き下すことができる。また、トーリックに対応する関係付き籠から、籠 Q をそのままにしてポテンシャル W だけを変化させて得られるような non-toric の場合については (例えば dP_4 はその例である。 \mathbb{P}_2 の 4 点爆発で generic でない点を選ぶと、4 点爆発でもトーリックなものを作れるが、それからポテンシャルだけいじると普通の generic point で爆発した dP_4 がつくることが知られている。) [78] で議論されており、(4.1) 式が成り立つことが示されている。

また、この定理では、(4.1) 式を示すという問題が完全に解決されたわけではないことに注意したい。もちろん、予想 7.1 を正確に示すこと等の問題もあるが、その他にも、たとえば、次のような問題がある：

予想 7.4. S に「対応する」籠が、 Γ_1 と Γ_2 の二つあったとする。このとき、

$$a(\Gamma_1) = a(\Gamma_2) \quad (7.9)$$

ただし、ここで、 Γ が S に「対応する」とは、幾つかの定式化が考えられる。§5.3 で少し触れたような Kasteleyn 行列を使った定式化でもいいし、或いは §8 で述べるような $C(S)$ と Γ との対応をさすことにしてもよい。 ■

7.2 7次元の佐々木多様体の場合

さて、ここまでは、ほとんど全て 5 次元の佐々木-Einstein 多様体の場合を議論してきた。しかし、前にも少し述べたように、AdS/CFT 対応は、他の次元でも存在すると信じられている。そこで、ここでは、7 次元の佐々木-Einstein 多様体の場合に、話がどう変わるのかについてごく簡単にコメントしておこう。

予想 7.5 (AdS/CFT 対応 (7次元の佐々木-Einstein 多様体の場合)). S を 7次元の佐々木-Einstein 多様体とし、 AdS_4 を 4次元の反ド・ジッター空間とする。このとき、 $AdS_4 \times S$ 上の M 理論 (あるいは、その低エネルギーでの有効理論である 11次元超重力理論と、3次元の何らかの理論とは等価である。 ■

²⁰ d 個と 3 個の差 $d-3$ 個というのは、実は物理では baryonic symmetry と呼ばれるものに対応しており、数学的には佐々木-Einstein 多様体の 3 次のコホモロジーの次元に対応している。

これがまず、前に紹介した AdS/CFT 対応と違うのは、Type IIB 弦理論の代わりに、M 理論になってしまったところである。M 理論は難しいので、この予想を確かめるのはこれまでやってきた 5 次元の佐々木-Einstein 多様体の場合よりもずっと難しいのである！

ただ、一方で、これまで議論してきた Volume minimization は次元を問わないので、7 次元にも存在している。また、7 次元だと、cone を取ったときに hyperKähler になるという条件を考えることができるので、その意味ではより rigid な構造を考えることができ、得られる幾何的信息は多いとも考える。また、この場合にも、例えば S がトーリックの場合にはダイマーによる記述が可能であるという提唱もなされている [79, 80, 81] 他、 S が tri-Sasaki 多様体の場合に AdS/CFT 対応を議論した論文もある。7 次元の佐々木については、例えば [82, 83] などを見よ。

8 Calabi-Yau cone と籠との対応

さて、ここまでは、トーリック佐々木-Einstein 多様体と籠の対応については、もっぱら (4.1) 式を用いてきた。つまり、佐々木-Einstein 多様体 S と、関係付き籠 Γ が対応するとは、

$$a(\Gamma) = \frac{\pi^3}{4} \frac{1}{\text{Vol}(S)} \tag{8.1}$$

が成り立つこととしたのである。実は、佐々木のことは忘れて、その計量錐の Calabi-Yau $C(S)$ のことを考えるのならば、 $C(S)$ (あるいはそれを指定するトーリック図 Δ) と Γ との対応は、他にも幾つかの方法で数学的に定式化できる。なお、以下ではトーリック Calabi-Yau $C(S)$ のことを X と書くことにしよう。また、また、複素三次元の多様体 X は、複素 2 次元のトーリック Fano 多様体 Y (より正確にはトーリック Fano stack) 上の標準束になっていることに注意する。

8.1 導来圏による定式化

まず、最初の定式化は、 X の接続層の導来圏 $D^b(\text{coh } X)$ と、 Γ の道の代数 $\mathbb{C}\Gamma$ の有限生成加群のなす導来圏 $D^b(\text{mod } \mathbb{C}\Gamma)$ とが等しいというものである：

$$D^b \text{ coh } X = D^b \text{ mod } \mathbb{C}\Gamma \tag{8.2}$$

また、トーリック Fano の言葉でこれを述べることもできる。そのために、向きづけられた部分籠 (directed subquiver) を定義しよう。

定義 8.1. 籠 $Q = (V, A, s, t)$ の頂点の集合 V に定められた順序 $<$ に対し、向きづけられた部分籠 Q^\rightarrow とは、 Q から、 $s(a) > t(a)$ を満たす全ての矢印 $a \in A$ を取り除いてできる籠のことである。この時、 $\mathbb{C}Q^\rightarrow$ は $\mathbb{C}Q$ の部分代数であり、 $\mathbb{C}Q$ の両側イデアル I から $\mathbb{C}Q^\rightarrow$ の両側イデアル $I^\rightarrow = I \cap \mathbb{C}Q^\rightarrow$ が誘導される。 $\Gamma = (Q, \mathcal{I})$ に対し、 Γ^\rightarrow が $(Q^\rightarrow, \mathcal{I}^\rightarrow)$ で定義される。 ■

このとき、主張は、

$$D^b \text{ coh } Y = D^b \text{ mod } \mathbb{C}\Gamma^\rightarrow \tag{8.3}$$

読者の中には、どのような順序 $<$ を取るのかが気になる方がおられるだろう。実は、2 色グラフ上に perfect matching と呼ばれる概念が存在し、perfect matching の各々に対して、その perfect matching に対応する辺を籠から除くことで向きづけられた部分籠が得られるのである。また、そのとき、 $<$ の取り方に依らず、 $D^b \text{ mod } \mathbb{C}\Gamma^\rightarrow$ が導来同値であることが予想される。(このあたりの事情については、具体例による計算及び予想の提唱に関して [84] を、またトーリック del Pezzo 曲面の場合の定式化に関しては [41] の Theorem 1 を見よ。)

8.2 籠ゲージ理論の真空のモジュライによる定式化

また、別の定式化として、籠 Γ から作った「籠ゲージ理論」の真空のモジュライ $\mathcal{M}_{vac}(\Gamma)$ が、Calabi-Yau X と一致するべきだというものがある。

$$\mathcal{M}_{vac} = X \quad (8.4)$$

「籠ゲージ理論」あるいはその真空のモジュライを数学的に定式化することは、著者の知る限りなされていない。 \mathcal{M}_{vac} がどのようなものであるのかを、説明しよう。

定義 8.2. 籠 $\Gamma = (Q, W)$ が与えら得たとする。このとき、各 $a \in A$ に対して数 $x_a \in \mathbb{C}$ を用意する。ここで、 x_a 達のなす空間を、次の関係式達によって生成されるイデアルで割ってできたものが $\mathcal{M}_{vac}(\Gamma)$ である：

1. (F-term 条件)

道 $p = (a_n, a_{n-1} \dots a_1)$ に、 $\sum_{i=1}^n x_{a_i}$ を対応させる写像を \mathcal{F} と書くことにする。この写像は、線形に拡張することによって、 $\mathcal{F} : \mathbb{C}Q \rightarrow \mathbb{C}$ に拡張できる。このとき、 $\mathcal{I} = \left(\frac{\partial W}{\partial a}\right)_{a \in A}$ の任意の元に対し、その \mathcal{F} による像

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) \quad (8.5)$$

が F-term 条件の生成元である。

2. (D-term 条件) 任意の $v \in V$ に対し、

$$\sum_{a:s(a)=v} |x_a|^2 - \sum_{a:t(a)=v} |x_a|^2 \quad (8.6)$$

これが D-term 条件の生成元である²¹。

こうして得られた空間を、更に次のトラス作用（ゲージ変換）で商を取る：
（ゲージ変換）各 $v \in V$ に対し、

$$x_a \rightarrow x_a \times \exp(i\theta_v Q_a^v) \quad (8.8)$$

但し、ここで、 Q_a^v は、

$$Q_a^v = \begin{cases} 1 & (t(a) = v) \\ -1 & (s(a) = v) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (8.9)$$

で定義される行列である。

物理的に（おそらく）期待されるのが次の予想である：

予想 8.3. Δ を格子多角形とし、 Δ を最高次元の錐として持つような扇から作ったトーリック Calabi-Yau 多様体を X とする。そこから Hanany-Vegh のアルゴリズムで作った関係付き籠を Γ とする。 Γ から作られる多様体 \mathcal{M}_{vac} は、 X に一致する。

この定義をみて、何か似たようなものを見たことがあると感じられるかたもいるだろう。そう、籠多様体の定義は、これとほとんど同じようなものになっていた。主としてその場合考えていたのは、Calabi-Yau というよりも K3 的な場合であり、Calabi-Yau として $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2/\Gamma$ があったときである。この場合、対応する籠

²¹正確には、D-term 条件は、Fayet-Illiopoulos パラメーターと呼ばれるパラメーター ζ_v を用意して、

$$\sum_{a:s(a)=v} |x_a|^2 - \sum_{a:t(a)=v} |x_a|^2 - \zeta_v \quad (8.7)$$

のように書くべきである。この ζ_v は、次のコニフォールドの例で考えてみれば分かるように、数学的には flop のパラメーターに対応している。

は、 Γ から表現論的に定まる McKay 籠になっており、その籠から定まる $\mathcal{N} = 2$ 籠ゲージ理論の真空のモジュライが、対応する ALE 空間になっており [85]、それは数学的には Kronheimer による構成 [86] に対応していたのである。その場合は、ここで D-term 条件と F-term 条件と呼ぶものが、hyperKähler 運動量写像の 3 つ組 (D-term 条件は実の条件、F-term 条件は複素の条件なので全部で実三個分の条件である) になっていたのであった。

このストーリーの場合には、対応する籠ゲージ理論は、 $\mathcal{N} = 2$ の籠ゲージ理論であったが、それが本稿で考えている $\mathcal{N} = 1$ の籠ゲージ理論の場合が大きく異なるのは、D-term 条件と F-term 条件は、三つ組みの関係にあるのではなく、別のものになっているということである。 $\mathcal{N} = 1$ の超対称ゲージ理論では、有向グラフ Q を決めただけでは理論は決まらず、それに更にポテンシャル W の情報を含めた関係付き籠 $\Gamma = (Q, W)$ を決めるときに初めて理論、更には真空のモジュライが決まるのである。その意味で、本稿のような $\mathcal{N} = 1$ 籠ゲージ理論の真空のモジュライの定式化のためには、ポテンシャルに対応する部分、あるいは F-term 条件に対応する部分を新たに定式化に加えてやる必要があり、従って、ここで述べた \mathcal{M}_{vac} は、籠多様体のある意味での一般化になっているべきものである。従って、その意味で、上の予想は、「ポテンシャル」あるいは籠の関係というものを考えたときに、籠多様体に対応するものがどう一般化されるか考えよ、という問題を提起しているとも見ることができる。

さて、この予想が本当に正しいかどうか具体例を使ってみよう。

例 8.4 (コニフォールド²²). コニフォールドの場合は、そのポテンシャル 5.6 を微分することにより、F-term 条件は、

$$y_1 x_2 y_2 = y_2 x_2 y_1, \quad y_1 x_1 y_2 = y_2 x_1 y_1, \quad x_1 y_2 x_2 = x_2 y_2 x_1, \quad x_1 y_1 x_2 = x_2 y_1 x_1 \quad (8.10)$$

と求まる。今、 x_i, y_i はただの数であるので、これらの条件は全て自明に満たされている。一方、D-term 条件は、

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 - |B_1|^2 - |B_2|^2 = 0 \quad (8.11)$$

であり、さらにこれを

$$A_{1,2} \rightarrow e^{i\alpha} A_{1,2}, \quad B_{1,2} \rightarrow e^{-i\alpha} B_{1,2} \quad (8.12)$$

なるゲージ変換で割ると、欲しい真空のモジュライ \mathcal{M}_{vac} が得られる。これがコニフォールドであることは次のようにして分かる。

コニフォールドの式 (3.1) は、適当に線形変換すると、4 つの複素変数 $w_i (i = 1, 2, 3, 4)$ を用いて、

$$w_1 w_2 = w_3 w_4 \quad (8.13)$$

と書き表すことができる。この方程式は、

$$w_1 = A_1 B_1, \quad w_2 = A_2 B_2, \quad w_3 = A_1 B_2, \quad w_4 = A_2 B_1 \quad (8.14)$$

と置くと解くことができる。但し、 A_i, B_i が $\lambda \in \mathbb{C}^*$ により

$$A_k \rightarrow \lambda A_k, \quad B_l \rightarrow \lambda^{-1} B_l, \quad k, l = 1, 2 \quad (8.15)$$

と変換しても、 w_i は変わらないので、 λ の分は余分な自由度である。 λ の絶対値部分を適当に選ぶことにより、

$$|A_1|^2 + |A_2|^2 - |B_1|^2 - |B_2|^2 = 0 \quad (8.16)$$

と選ぶことができる。残る自由度は、 λ の偏角部分のみであり、実数 α により

$$A_k \rightarrow e^{i\alpha} A_k, \quad B_l \rightarrow e^{-i\alpha} B_l, \quad k, l = 1, 2 \quad (8.17)$$

な $U(1)$ で 8.16 式を割るとコニフォールドになる。これは、先程真空のモジュライとして我々が得た式に他ならない。 ■

²²なお、ここでは、 Γ から対応する conifold が出てくることを示したが、歴史的には逆で、むしろ conifold に対応するゲージ理論を探るため、コニフォールドの式を D-term 条件の形に書き、そこから籠ゲージ理論に対応するということが提唱されたのである [87]。

さて、コニフォールドの場合は、F-term 条件の部分が自明になってしまったので、ある意味余り面白くなかった。そこで、もう少し非自明な例が本質的である。例えば、 $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ の場合は [88] の §2 に詳しく書かれている。この場合は、F-term 条件を一旦解き、その後で変数を再度増やして F-term 条件をシンプレクティック商の形に書き直すという操作必要であり、一般の関係付き籠に対して、その方法が、[88] で与えられている。

さて、ここまでは、 x_a は単に複素数と思っていた。しかし、物理では、それは「場」、あるいはその表現に対応するものであるから、ゲージ群として $U(N)$ あるいは $SU(N)$ を考えているとすると、 $N \times N$ の行列と思うのが自然である。そこで、先程の定義を少しだけ修正して、次のようにしよう。

定義 8.5. 先程の \mathcal{M}_{vac} の定義において、 x_a を複素数ではなく、複素係数の $N \times N$ 行列であるとし、他は全く同じとして同様に定義したものを $\mathcal{M}_{vac,N}(\Gamma)$ とする。 ■

この時、次の問題が考えられる：

問題 8.6. Δ を格子多角形とし、 Δ を最高次元の錐として持つような扇から作ったトーリック Calabi-Yau 多様体を X とする。そこから Hanany-Vegh のアルゴリズムで作った関係付き籠を Γ とする。 Γ から作られる多様体 $\mathcal{M}_{vac,N}$ (の特異点を適当に解消したもの) は何であって、どのような性質を持つか? X の N 次の対称積でいいか? Fayet-Illipoulos パラメーターを入れたときにはどうか? ■

このセクションで述べたことは、数学的には全く未整備であるが、物理的には籠ゲージ理論の真空のモジュライを考えるのは自然であり、そこに何らかの数学的構造が潜んでいる可能性はあるのではないかと思われる。

9 最後に

冒頭でも述べたように、佐々木 (-Einstein) 多様体の幾何学は、近年その意義が真剣に見直されるようになったものであり、例えば Kähler-Einstein の幾何学と比べても、まだまだやるべきことが数多く残されていることができるように思う。また、物理からのインプットは、時に数学にとって重要であると同時に、逆に佐々木-Einstein 多様体の幾何学の理解が物理に関しても多くの知見をもたらすこともあり、相互の理解が重要であるといえよう。

ただし、佐々木-Einstein 多様体の登場する AdS/CFT 対応のうち、数学になっている(より正確には、なりつつある)のは、例えば (4.1) 式のような一番粗い情報の部分だけであることに注意したい。しかも、今回の場合は、AdS/CFT 対応と a-maximization から導かれた volume minimization という考えは、歴史的にはともかく、ひとたび気づいてしまえば数学的にはごく自然なことになっており、その意味では、物理の知識がもっとも深い部分で数学に活用されたとは言えない。より深い理解に到達するためには、弦理論および AdS/CFT 対応の数学的理解の為の努力が不可欠であり、ここで述べたことは、そのためのほんの第 1 歩にしか過ぎない。

また、同時に、幾何の側に知られている様々な概念のなかには、籠側での解釈がはっきりしないものが数多くなる。それらの「籠的」意味について考えることは、興味深い問題である。そこで、最後に一つの問題を提起して本稿を終わりにしよう。

Kähler-Einstein 計量の存在については、

予想 9.1 (Yau?[89]). Fano 多様体 V が Kähler-Einstein 計量を持つための必要十分条件は、それが幾何学的不変式論の意味で安定であることである。 ■

という予想が知られており、Hermite-Einstein の時の Hitchin-小林対応の類似であると考えられている。Donaldson や Tian をはじめとしていろいろ研究はなされているようであるが、この予想は未だ未解決である。そこで、問題は、次の通りである：

問題 9.2. 上述の予想を、佐々木-Einstein の場合に定式化し、その証明を与えよ。さらに、安定性の筋側での対応物を見だし、それを数学的に定式化せよ。 ■

10 参考文献

本稿執筆に当たっては、数多くの文献を参照させていただいた。最後に、本文中で既に述べたものも含めて、文献を少し挙げておこう。

まず、佐々木多様体の幾何学については、間もなく発売される予定の Boyer と Galicki による著書 [90] が参考になるはずである。

また、Martelli と Sparks による解説 [91] は、この分野の先駆者による、主に $Y^{p,q}$ を中心とした解説である。また、より最近のものとして、Sparks による解説 [22] は、数学者向けに手短かに内容をまとめたものである。佐々木-Einstein と密接に関連した Kähler-Einstein の幾何学については、[92] が日本語で読めて良い。

また、また、Hanany-Vegh とのアルゴリズム及びアメーバ、コアメーバについては、著者自身による解説 [46]、[93] 及び、植田氏によるより詳細な解説 [45]、[94] や [95] が参考になるだろう。ダイマー模型については、高崎氏による解説 [54] が読みやすい。また、[96] は、物理の観点から関連した内容をまとめた読みやすいレビューである。

参考文献

- [1] S. Sasaki, “On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. I,” *Tôhoku Math. J. (2)* **12** (1960) 459–476.
- [2] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*. Series in Pure Mathematics. World Scientific, 1984.
- [3] K. Yano and M. Kon, *CR submanifolds of Kaehlerian and Sasakian manifolds*, vol. 30 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Mass., 1983.
- [4] D. Martelli, J. Sparks, and S.-T. Yau, “Sasaki-einstein manifolds and volume minimisation,” [hep-th/0603021](https://arxiv.org/abs/hep-th/0603021).
- [5] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, vol. 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. , The William H. Roever Lectures in Geometry.
- [6] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, vol. 15 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese.
- [7] K. Altman, “Toric \mathbb{Q} -gorenstein singularities,” [alg-geom/9403003](https://arxiv.org/abs/alg-geom/9403003).
- [8] P. Candelas and X. C. de la Ossa, “Comments on conifolds,” *Nucl. Phys.* **B342** (1990) 246–268.
- [9] P. Griffith and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*. New York, Wiley, 1987.
- [10] T. Aubin, “Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kähleriennes compactes,” *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **283** (1976), no. 3, A119–A121.
- [11] S. T. Yau, “On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I,” *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), no. 3, 339–411.
- [12] Y. Matsushima, “Sur la structure du groupe d’homéomorphismes analytiques d’une certaine variété kählérienne,” *Nagoya Math. J.* **11** (1957) 145–150.

- [13] G. Tian and S.-T. Yau, “Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with $C_1 > 0$,” *Comm. Math. Phys.* **112** (1987), no. 1, 175–203.
- [14] S. Smale, “On the structure of 5-manifolds,” *Ann. Math.* **75** (1962) 38–46.
- [15] C. P. Boyer and K. Galicki, “New Einstein metrics in dimension five,” *J. Differential Geom.* **57** (2001), no. 3, 443–463.
- [16] C. P. Boyer and K. Galicki, “New Einstein metrics in dimension five,” *J. Differential Geom.* **57** (2001), no. 3, 443–463.
- [17] C. P. Boyer, K. Galicki, and M. Nakamaye, “On the geometry of Sasakian-Einstein 5-manifolds,” *Math. Ann.* **325** (2003), no. 3, 485–524.
- [18] C. P. Boyer and K. Galicki, “Sasakian geometry, hypersurface singularities, and Einstein metrics,” *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.* (2005), no. 75, 57–87.
- [19] J. Cheeger and G. Tian, “On the cone structure at infinity of Ricci flat manifolds with Euclidean volume growth and quadratic curvature decay,” *Invent. Math.* **118** (1994), no. 3, 493–571.
- [20] J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks, and D. Waldram, “Sasaki-einstein metrics on $s(2) \times s(3)$,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **8** (2004) 711–734, [hep-th/0403002](#).
- [21] J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks, and D. Waldram, “Supersymmetric $ads(5)$ solutions of m-theory,” *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 4335–4366, [hep-th/0402153](#).
- [22] J. Sparks, “New results in sasaki-einstein geometry,” [math.dg/0701518](#).
- [23] W. Chen, H. Lu, C. N. Pope, and J. F. Vazquez-Poritz, “A note on einstein-sasaki metrics in $d = 7$,” *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 3421–3430, [hep-th/0411218](#).
- [24] J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. F. Sparks, and D. Waldram, “A new infinite class of sasaki-einstein manifolds,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **8** (2006) 987–1000, [hep-th/0403038](#).
- [25] J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks, and D. Waldram, “Supersymmetric ads backgrounds in string and m-theory,” [hep-th/0411194](#).
- [26] D. Conti, “Cohomogeneity one einstein-sasaki 5-manifolds,” [math.dg/0606323](#).
- [27] M. Cvetič, H. Lu, D. N. Page, and C. N. Pope, “New einstein-sasaki spaces in five and higher dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 071101, [hep-th/0504225](#).
- [28] M. Cvetič, H. Lu, D. N. Page, and C. N. Pope, “New einstein-sasaki and einstein spaces from kerr-de sitter,” [hep-th/0505223](#).
- [29] D. Martelli and J. Sparks, “Toric sasaki-einstein metrics on $s^{**2} \times s^{**3}$,” *Phys. Lett.* **B621** (2005) 208–212, [hep-th/0505027](#).
- [30] Y. Hashimoto, M. Sakaguchi, and Y. Yasui, “New infinite series of einstein metrics on sphere bundles from ads black holes,” *Commun. Math. Phys.* **257** (2005) 273–285, [hep-th/0402199](#).
- [31] S. W. Hawking, C. J. Hunter, and M. M. Taylor-Robinson, “Rotation and the ads/cft correspondence,” *Phys. Rev.* **D59** (1999) 064005, [hep-th/9811056](#).

- [32] A. Futaki, H. Ono, and G. Wang, “Transverse kahler geometry of sasaki manifolds and toric sasaki-einstein manifolds,” [math.dg/0607586](https://arxiv.org/abs/math/0607586).
- [33] K. Cho, A. Futaki, and H. Ono, “Uniqueness and examples of compact toric sasaki-einstein metrics,” [math.dg/0701122](https://arxiv.org/abs/math/0701122).
- [34] S. Bando and T. Mabuchi, “Uniqueness of Einstein Kähler metrics modulo connected group actions,” in *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, vol. 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pp. 11–40. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [35] T. Mabuchi, “ K -energy maps integrating Futaki invariants,” *Tohoku Math. J. (2)* **38** (1986), no. 4, 575–593.
- [36] T. Oota and Y. Yasui, “Explicit toric metric on resolved calabi-yau cone,” *Phys. Lett.* **B639** (2006) 54–56, [hep-th/0605129](https://arxiv.org/abs/hep-th/0605129).
- [37] A. Futaki, “Complete ricci-flat kahler metrics on the canonical bundles of toric fano manifolds,” [math/0703138](https://arxiv.org/abs/math/0703138).
- [38] D. Martelli and J. Sparks, “Resolutions of non-regular ricci-flat kahler cones,” [arXiv:0707.1674](https://arxiv.org/abs/0707.1674) [[math.DG](https://arxiv.org/abs/math/0703138)].
- [39] B. S. Acharya, J. M. Figueroa-O’Farrill, C. M. Hull, and B. J. Spence, “Branes at conical singularities and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1999) 1249–1286, [hep-th/9808014](https://arxiv.org/abs/hep-th/9808014).
- [40] D. R. Morrison and M. R. Plesser, “Non-spherical horizons. i,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **3** (1999) 1–81, [hep-th/9810201](https://arxiv.org/abs/hep-th/9810201).
- [41] K. Ueda and M. Yamazaki, “Homological mirror symmetry for toric orbifolds of toric del pezzo surfaces,” [math.ag/0703267](https://arxiv.org/abs/math/0703267).
- [42] A. Hanany and D. Vegh, “Quivers, tilings, branes and rhombi,” [hep-th/0511063](https://arxiv.org/abs/hep-th/0511063).
- [43] K. Ueda and M. Yamazaki, “A note on brane tilings and mckay quivers,” [math.ag/0605780](https://arxiv.org/abs/math/0605780).
- [44] K. Ueda and M. Yamazaki, “Brane tilings for parallelograms with application to homological mirror symmetry,” [math.ag/0606548](https://arxiv.org/abs/math/0606548).
- [45] 植田一石, “ダイマーと藻類,” 数理解析研究所講究録 **1541** (2007) 102–123.
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kazushi/proceedings/rims_kokyuroku2006_8.pdf.
- [46] 山崎雅人, “Dimer, coamoeba and homological mirror symmetry,” 北海道大学数学講究録 **117** (2007) 20–24. <http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~yamazaki/files/2007/CCYR3pro.pdf>.
- [47] A. Hanany and K. D. Kennaway, “Dimer models and toric diagrams,” [hep-th/0503149](https://arxiv.org/abs/hep-th/0503149).
- [48] S. Franco, A. Hanany, K. D. Kennaway, D. Vegh, and B. Wecht, “Brane dimers and quiver gauge theories,” *JHEP* **01** (2006) 096, [hep-th/0504110](https://arxiv.org/abs/hep-th/0504110).
- [49] Y. Imamura, H. Isono, K. Kimura, and M. Yamazaki, “Exactly marginal deformations of quiver gauge theories as seen from brane tilings,” *Prog. Theor. Phys.* **117** (2007) 923–955, [hep-th/0702049](https://arxiv.org/abs/hep-th/0702049).
- [50] M. Yamazaki, “What is brane tiling?,”
<http://www-hep.phys.s.u-tokyo/~yamazaki/files/2007/niseko.pdf>, Transparency of Winter School Niseko, 2007.

- [51] B. Feng, Y.-H. He, K. D. Kennaway, and C. Vafa, “Dimer models from mirror symmetry and quivering amoebae,” [hep-th/0511287](#).
- [52] S. Franco *et al.*, “Gauge theories from toric geometry and brane tilings,” *JHEP* **01** (2006) 128, [hep-th/0505211](#).
- [53] R. Kenyon, “An introduction to the dimer model,” [math.CO/0310326](#).
- [54] 高崎金久, “ダイマー模型とその周辺,” 数理解析研究所講究録 **1541** (2007) 23–46.
<http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/res/kok0608.pdf>.
- [55] N. Seiberg, “Electric - magnetic duality in supersymmetric nonabelian gauge theories,” *Nucl. Phys.* **B435** (1995) 129–146, [hep-th/9411149](#).
- [56] C. P. Herzog, “Seiberg duality is an exceptional mutation,” *JHEP* **08** (2004) 064, [hep-th/0405118](#).
- [57] D. Berenstein and M. R. Douglas, “Seiberg duality for quiver gauge theories,” [hep-th/0207027](#).
- [58] V. Braun, “On berenstein-douglas-seiberg duality,” *JHEP* **01** (2003) 082, [hep-th/0211173](#).
- [59] K. Intriligator and B. Wecht, “The exact superconformal r-symmetry maximizes a,” *Nucl. Phys.* **B667** (2003) 183–200, [hep-th/0304128](#).
- [60] A. B. Zamolodchikov, “Irreversibility of the flux of the renormalization group in a 2d field theory,” *JETP Lett.* **43** (1986) 730–732.
- [61] J. L. Cardy, “Is there a c theorem in four-dimensions?,” *Phys. Lett.* **B215** (1988) 749–752.
- [62] D. Martelli, J. Sparks, and S.-T. Yau, “The geometric dual of a-maximisation for toric sasaki-einstein manifolds,” *Commun. Math. Phys.* **268** (2006) 39–65, [hep-th/0503183](#).
- [63] S. F. B. de Moraes and C. Tomei, “Moment maps on symplectic cones,” *Pacific J. Math.* **181** (1997), no. 2, 357–375.
- [64] A. Futaki, “An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics,” *Invent. Math.* **73** (1983), no. 3, 437–443.
- [65] A. Futaki, *Kähler-Einstein metrics and integral invariants*, vol. 1314 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [66] J. J. Duistermaat and G. J. Heckman, “On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space,” *Invent. Math.* **69** (1982), no. 2, 259–268.
- [67] V. Guillemin, “Kähler structures on toric varieties,” *J. Differential Geom.* **40** (1994), no. 2, 285–309.
- [68] M. Abreu, “Kähler geometry of toric manifolds in symplectic coordinates,” in *Symplectic and contact topology: interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001)*, vol. 35 of *Fields Inst. Commun.*, pp. 1–24. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [69] T. Oota and Y. Yasui, “Toric sasaki-einstein manifolds and heun equations,” *Nucl. Phys.* **B742** (2006) 275–294, [hep-th/0512124](#).
- [70] M. F. Atiyah and I. M. Singer, “The index of elliptic operators. III,” *Ann. of Math. (2)* **87** (1968) 546–604.

- [71] S. Benvenuti, B. Feng, A. Hanany, and Y.-H. He, “Counting bps operators in gauge theories: Quivers, syzygies and plethystics,” [hep-th/0608050](#).
- [72] B. Feng, A. Hanany, and Y.-H. He, “Counting gauge invariants: The plethystic program,” [hep-th/0701063](#).
- [73] A. Hanany and C. Romelsberger, “Counting bps operators in the chiral ring of $n = 2$ supersymmetric gauge theories or $n = 2$ brane surgery,” [hep-th/0611346](#).
- [74] A. Butti and A. Zaffaroni, “R-charges from toric diagrams and the equivalence of a- maximization and z-minimization,” *JHEP* **11** (2005) 019, [hep-th/0506232](#).
- [75] S. Benvenuti, L. A. Pando Zayas, and Y. Tachikawa, “Triangle anomalies from einstein manifolds,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **10** (2006) 395–432, [hep-th/0601054](#).
- [76] S. Lee and S.-J. Rey, “Comments on anomalies and charges of toric-quiver duals,” *JHEP* **03** (2006) 068, [hep-th/0601223](#).
- [77] A. Kato, “Zonotopes and four-dimensional superconformal field theories,” [hep-th/0610266](#).
- [78] A. Butti, D. Forcella, and A. Zaffaroni, “Deformations of conformal theories and non-toric quiver gauge theories,” *JHEP* **02** (2007) 081, [hep-th/0607147](#).
- [79] S. Lee, “Superconformal field theories from crystal lattices,” *Phys. Rev.* **D75** (2007) 101901, [hep-th/0610204](#).
- [80] S. Lee, S. Lee, and J. Park, “Toric $ads(4)/cft(3)$ duals and m-theory crystals,” *JHEP* **05** (2007) 004, [hep-th/0702120](#).
- [81] S. Kim, S. Lee, S. Lee, and J. Park, “Abelian gauge theory on m2-brane and toric duality,” [arXiv:0705.3540 \[hep-th\]](#).
- [82] D. Fabbri *et al.*, “3d superconformal theories from sasakian seven-manifolds: New nontrivial evidences for $ads(4)/cft(3)$,” *Nucl. Phys.* **B577** (2000) 547–608, [hep-th/9907219](#).
- [83] H.-U. Yee, “Ads/cft with tri-sasakian manifolds,” *Nucl. Phys.* **B774** (2007) 232–255, [hep-th/0612002](#).
- [84] A. Hanany, C. P. Herzog, and D. Vegh, “Brane tilings and exceptional collections,” *JHEP* **07** (2006) 001, [hep-th/0602041](#).
- [85] M. R. Douglas and G. W. Moore, “D-branes, quivers, and ale instantons,” [hep-th/9603167](#).
- [86] P. B. Kronheimer, “The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients,” *J. Differential Geom.* **29** (1989), no. 3, 665–683.
- [87] I. R. Klebanov and E. Witten, “Superconformal field theory on threebranes at a calabi-yau singularity,” *Nucl. Phys.* **B536** (1998) 199–218, [hep-th/9807080](#).
- [88] B. Feng, A. Hanany, and Y.-H. He, “D-brane gauge theories from toric singularities and toric duality,” *Nucl. Phys.* **B595** (2001) 165–200, [hep-th/0003085](#).
- [89] S.-T. Yau, “Open problems in geometry,” *Proc. Symp. Pure Math.* **54** (1993) 1–28.

- [90] C. Boyer and K. Galicki, *Sasakian Geometry*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, 2007 年 12 月発売予定.
- [91] D. Martelli and J. Sparks, “Toric geometry, sasaki-einstein manifolds and a new infinite class of ads/cft duals,” *Commun. Math. Phys.* **262** (2006) 51–89, hep-th/0411238.
- [92] 中島啓, 非線形問題と複素幾何学. 岩波講座 現代数学の展開. 岩波書店, 1999 年.
- [93] 山崎雅人, “Coamoeba and homological mirror symmetry for toric orbifolds of toric del pezzo surfaces,” 第 54 回幾何学シンポジウム予稿. <http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~yamazaki/> で近日公開予定.
- [94] 植田一石, “Coamoeba and mirror symmetry,” 数理解析研究所講究録に掲載予定. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kazushi/proceedings/rims_kokyuroku2006_12.pdf.
- [95] 植田一石, “コアメーバとトーラス同変なホモロジー的ミラー対称性,” 2007 年秋期数学会予稿.
- [96] 木村圭助, “Sasaki-einstein 多様体上の弦理論と $\mathcal{N} = 1$ 超対称ゲージ理論.” 東京大学理学系研究科修士論文, 2006.