佐々木多様体と箙ゲージ理論との出会い

AdS/CFT 対応の魔法

山崎　雅人

1. 多様な森の個性的な仲間たち

一口に多様体と言っても、その生態は文字通り多様である. 多様体のジャングルを駆け回って力の及ぶ限り多くの多様体を探索してみるのもいいが、時には気に入った多様体を見つけてじっくりと観察してみるのもまた格別である.

今回の話の主人公は、多様体の中でも特に**トーリック・佐々木・アインシュタイン多様体**（以下、長いのでしばしば単に佐々木多様体と呼ぶ）と呼ばれる仲間たちだ. 名前の長さが示唆する通り彼らは強烈な個性と豊かな構造の持ち主であるが、21 世紀に入って再び注目を集めるまでほとんど忘れ去られた存在であった．本稿の目的は，物理学者達が如何にして佐々木多様体たちに出会うことになったのか，そのいきさつと興奮を伝えることである．我々の舞台は超弦理論の世界，そこでは D ブレーンと AdS/CFT 対応の魔法によって佐々木多様体は箙（えびら）ゲージ理論へと変貌し，物理と数学の双方にまたがる美しい世界が姿を現す*1).

2. 超弦の世界から佐々木が現れる

話の舞台は超弦の国，ここは仲が悪いとされている場の理論（量子力学）と重力の理論（一般相対性理論）が共存できるパラダイスである．我々は後者から出発しよう．超弦理論においては重力の低エネルギー有効理論は超重力理論で与えられる． 超重力とは怖そうな名前だが，ここでは普通の一般相対性理論に電磁気の類似（例えば 4-form の場）を組み合わせたようなものだと思っておけば差し支えない.

超重力理論の解として，次のブラック 3-ブレーン解と呼ばれるものを考えよう：

$$ds_{10}^2 = f^{-1/2}(r)\, ds_4^2 + f(r)^{1/2}(dr^2 + r^2 ds_X^2). \quad (1)$$

ただし，ここで ds_4^2 の部分は平坦なミンコフスキー空間，X は 5 次元のアインシュタイン多様体（計量が $R_{\mu\nu} = 4g_{\mu\nu}$ を満たす）である．超弦理論では数学的整合性から時空が 10 次元に定まってしまうが，上の計量は合計でちゃんと 10 次元あることがすぐに確認できる．$f(r)$ を関数

$$f(r) = 1 + \frac{L^4}{r^4}$$

の形に取り，かつ超重力理論に存在する 4-form の場のフラックスを適当に選ぶことで上の重力場は運動方程式の解となる.

さて，上の式で $r \to 0$ の極限を考えよう*2)．この時，計量の形は，r を定数倍で適当に変数変換してやると（計量全体の定数倍を除いて），

$$ds_{10}^2 = r^2 ds_4^2 + \frac{dr^2}{r^2} + ds_X^2.$$

*1) 佐々木多様体の幾何的側面については本誌の二木先生の記事を併せて参照されたい．また，この記事の内容のより詳細な紹介は[1] から手に入る.

*2) この極限はしばしば near horizon 極限と呼ばれる.

この計量には二つの解釈がある．まず一つ目の解釈では，第 1 項と第 2 項をまとめて一つの多様体としてみることにして，5 次元の反ド・ジッター空間*3)

$$ds^2_{\mathrm{AdS}_5} = \frac{dr^2 + r^2 ds_4^2}{r^2}$$

と，残りの 5 次元多様体 X の直積とみる．もう一つの解釈は，第 2 項と第 3 項をまとめて

$$ds^2_{10} = r^2 ds_4^2 + \frac{1}{r^2}(dr^2 + r^2 ds_X^2) \qquad (2)$$

のように書く見方で，r のべき（歪み因子）を気にしないことにするとこれはミンコフスキー空間と Y の（歪んだ）直積である．ここで Y は X の計量錘と呼ばれるものであり，それは X に新たな座標 r を加え，計量を

$$ds_Y^2 = dr^2 + r^2\, ds_X^2 \qquad (3)$$

で与えた多様体である．r を定数倍してもこの計量は全体が定数倍されるだけなので，Y は名前の通り確かに錘になっている.（図 1 を参照）.

さて，我々は以後の解析のために，上の解が超対称性の一部を保つことを要請しよう．一般相対論の教科書にでてくる対称性（等長写像）はキリングベクトル場で現されるが，ここでは超対称性を考えていて対称性はフェルミオニックなのでキリングスピノルの存在を要請する．この時，Y は複素 3 次元のカラビ・ヤウ多様体と呼ばれる多様体である．Y がカラビ・ヤウであるときに， X が佐々木多様体であるというのが佐々木多様体の定義である．さらに，議論を具体的にするために，Y は（局所）トーリック多様体であるとし， この時 X もトーリックであると呼ぼう*4)．これは，大雑把に言えば Y がトーラス $U(1)^3$ の作用を持つことを意味しており，そのトーラスの作用の様子はトーリック図とよばれる $\mathbb{Z}^2$ の凸多角形から定まる．以上すべてを合わせると，X は 5 次元のトーリック・佐々木・アインシュタイン多様体であることになる．これが冒頭に出てきた多様体である．

*3） これはいわゆる双曲空間（の符号を一部逆にしたもの）のことである．

*4） この仮定は以下で述べる AdS/CFT 対応（箙ゲージ理論との対応）には必要ではないが，以下の考察をはるかに具体的なものにする．

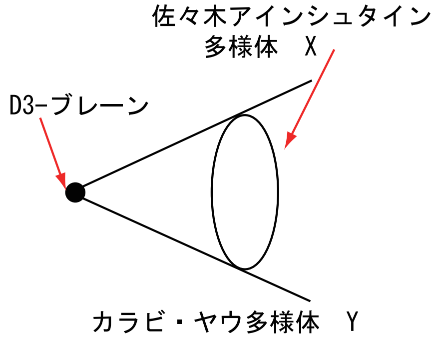

図 1　錘のてっぺん（黒丸）に D ブレーンを置く．

3. D ブレーンの魔法と AdS/CFT 対応

さて，我々は 5 次元の佐々木多様体 X を使い，$AdS_5 \times X$ の形の重力解を構成した．これは，ブラック 3-ブレーン解の極限として得られたものであった．

超弦理論には，ブラックブレーン解とよく似たものが存在する．それが **D ブレーン**だ．ブラックブレーン解と D ブレーンが同一の物理的実体であることを看破したのがポルチンスキーであり，その考えをさらに徹底させて **AdS/CFT 対応**を提唱したのがマルダセナ[2] であった．AdS/CFT 対応についての詳細な説明は本誌の以前の特集[3] に譲るが，ここでは佐々木に特に注目して少々説明してみよう．

ここでは D3 ブレーンと呼ばれる空間 3 次元，時間 1 次元に広がったブレーンを考える．式 (2) のように，ミンコフスキー空間と錘 Y の直積を考え，その Y のてっぺんに D3 ブレーンを置いて何が起こるか調べてみよう（図 1）．D ブレーンは開いた弦が端を持ち，さらに開いた弦はゲージ理論を記述するので，D ブレーン上にはあるゲージ理論が現れることになる．D3 ブレーンは (3+1) 次元（ミンコフスキー空間）に広がっているので，これは 4 次元のゲージ理論である上，Y が錘であることに対応してスケール不変性を持つことが予想される．どんなゲージ理論が現れるかは多様体の X のとり方によって変わるわけである．

さて，錘のてっぺんに置く D ブレーンの枚数を N 枚とし，N をどんどん大きくしよう．それぞれの D ブレーンは質量を持つので，一般相対性理論の教えるところによるとまわりの時空は歪み，やがてはブラックホールになるだろう．それが上のブラックホール解 (1) であると解釈するのである．*5)

このことから予想されるのは

AdS/CFT 対応：　Type IIB 超弦理論*6)を $AdS_5 \times X$ の上で考えると，それは $R^{3,1} \times Y$ の錘の頂点に置かれた D ブレーン上に現れる 4 次元の超共形ゲージ理論と等価である．

ここで AdS_5 は 5 次元の反ドジッター多様体，CFT というのは共形場理論のことをさしており，前者の持つ対称性 $SO(4,2)$ が 4 次元共形場理論の共形対称性 $SO(4,2)$ と同一視される．

AdS/CFT 対応がもっともよく知られているのは X が S^5 の場合であり，その場合対応するゲージ理論は $\mathcal{N}=4$ の超対称性を持つことから一意に同定できる．それでは X が一般の佐々木多様体のときどうなるだろうか？$\mathcal{N}=1$ の超対称性を持つ共形場理論であることが予想されるが，より具体的にはどう決めればいいのだろうか？それが次の問題である．

4. 具体例：$T^{1,1}$，コニフォールド

理解のためには具体例をあげるのが一番だ．ここでは $T^{1,1}$ とよばれる 5 次元佐々木多様体を考えよう．これは 80 年代から超重力の文脈で知られている古参の佐々木・アインシュタイン多様体である．$T^{1,1}$ の一つの記述は，二つの群の直積 $SU(2)_1 \times SU(2)_2$ を持ってきて，それをその対角 $U(1)$ ゲージ群 $U(1)_{\mathrm{diag}} \subset U(1)_1 \times U(2)_2 \subset SU(2)_1 \times SU(2)_2$ で割ったものであり，

$$T^{1,1} = \frac{SU(2)_1 \times SU(2)_2}{U(1)_{\mathrm{diag}}}.$$

計量の具体的な形は座標 $(\psi, \theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2)$ を用いて

$$\begin{aligned} ds^2_{T^{1,1}} &= \tfrac{1}{9}(d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 \\ &+ \tfrac{1}{6}(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2) + \tfrac{1}{6}(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2) \end{aligned}$$

で与えられる．但し，ここで $0 \le \psi \le 4\pi, 0 \le \theta_i < \pi, 0 \le \phi_i < 2\pi$ である．(ψ, θ_i, ψ_i) $(i=1,2)$ の部分に注目すると，S^2 上の S^1 ファイブレーションとして書かれた S^3 の計量になっており，S^2 は $SU(2) \simeq SO(3)$ の対称性を持つので，$SU(2)\times SU(2)$ の対称性を持つことが確認できる．また，計量テンソルを計算すると，これがアインシュタイン多様体であることが示せる：$R_{\mu\nu} = 4g_{\mu\nu}$．

さて，その計量錘 Y はコニフォールドと呼ばれており，複素数 4 つを用いて

$$z_1 z_2 = z_3 z_4 \tag{4}$$

と簡潔に書かれる．これは確かに複素 3 次元のカラビ・ヤウ多様体になっており，またスケール変換 $z_i \to \rho z_i$ のもとで不変だから錘になっている．逆に佐々木多様体 $X = T^{1,1}$ を取り出すにはその自由度をなくしてしまえばよく，例えば条件

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2 + |z_4|^2 \tag{5}$$

のもとでの切り口が X となる．

問題は，これに対応するゲージ理論は何かであった．そこで (4) を解いて，

$$z_1 = A_1 B_1,\ z_2 = A_1 B_2,\ z_3 = A_2 B_1,\ z_4 = A_2 B_2$$

と書くことにしよう．この書き方には任意性があって，条件 (5) のもとでは

$$A_i \to e^{i\theta} A_i,\ B_i \to e^{-i\theta} B_i\ (i=1,2) \tag{6}$$

の任意性が残る．これは，ゲージ理論のゲージ変換に見えないだろうか？また，(5) は超対称ゲージ理論の基底状態を決める式の一つ，D ターム条件と呼ばれるものとそっくりである．これは，超対称ゲージ理論の真空のなす空間と，コニフォー

*5)　D ブレーン上の理論としてゲージ理論を取り出すには極限をとる必要があるが，それは重力側では上で議論した $r \to 0$ の極限と解釈される．

*6)　超弦理論の種類のことであるが，ここでは気にする必要はない

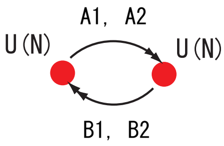

図 2　$T^{1,1}$ に対応する箙.

ルドが一致することを示しているのではないだろうか？

以上のような考察を推し進めることにより，クレバノフとウィッテン[4] は，$T^{1,1}$ に対応するゲージ理論は (1) ゲージ群 $U(N) \times U(N)$ を持ち，(2) そのもとで $(N, \overline{N})$ で振る舞う場 A_i 及び $(\overline{N}, N)$ を持つ場 B_i $(i = 1, 2)$ をもつと結論づけた[*7].

このゲージ理論は，次の有向グラフ（**箙；えびら**）によって簡潔に現される．グラフの頂点は $U(N)$ のゲージ理論を現し，また向きのついた辺は矢印の始点（終点）の頂点のゲージ群のもとで $N(\overline{N})$ の表現にしたがう．このように，箙からはゲージ理論のゲージ群と物質場が指定される．

5. 無限個の佐々木，箙との対応

さて，$T^{1,1}$ の例は面白いが，高い対称性に助けられた側面がある．もっと他の佐々木多様体を沢山作って，それに対応するゲージ理論が何であるか一般的に調べることはできないだろうか？それには佐々木の方でよく分かっているものから出発するのが賢明だろう．

実は，計量の具体形が知られている佐々木・アインシュタイン多様体は，長い間 S^5 と $T^{1,1}$ の二つの例だけであった．状況は 21 世紀に入ってから一変する．主に超重力理論のコンパクト化やブラックホール解の考察から，$Y^{p,q}$ [8] および $L^{a,b,c}$ [9] とよばれる無限個の 5 次元佐々木・アインシュタイン多様体の計量の具体形が発見されたのである[*8]．これらは X がトーリックの例であるので，前に述

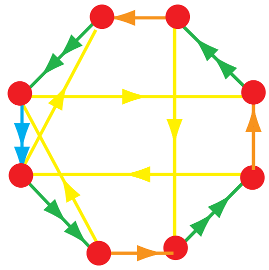

図 3　$Y^{4,1}$ に対応する箙.

べたように X はトーリックと限定しよう．この場合のゲージ理論はなんだろうか？

ここでも活躍するのが D ブレーンである．超弦理論では T 双対とよばれる双対性が存在し，物理的に等価な理論の組を生み出す．我々が考えてたのはカラビ・ヤウ多様体 Y と D3 ブレーンの組み合わせであったが，これに T 双対を適当に施すと平坦な時空における D5 ブレーンと NS5 ブレーンの配意に写すことができる．これは平坦な時空の問題だから話は簡単で[*9] どんなゲージ理論が出てくるかを読み取ることができる．これを Y がトーリックの場合に組織的にやる方法がブレーンタイリングとよばれるものであり，トーリック多様体のデータを与えたときに，対応する 4 次元の箙ゲージ理論を与えるアルゴリズムが確立している．[*10] 具体例として，$Y^{4,1}$ の場合に箙を与えておいた（図 3）．

さて，このことから以前の予想をより正確に書くと，

AdS/CFT 対応（再）：　5 次元のトーリック佐々木・アインシュタイン多様体 X を考える．この時，Type IIB 超弦理論を $AdS_5 \times X$ の上で考えたものは，錘 Y から定まる箙の指定する 4 次元超対称ゲージ理論と等価である．

6. AdS/CFT 対応の定量化

さて，上の予想をより定量的に具体的に見てい

*7）　どちらのゲージ理論についてのゲージ変換も (6) になる．

*8）　p, q および a, b, c は適当な条件を満たす整数である．これらの佐々木多様体の計量の形は複雑であるが，例えば $Y^{p,q}$ で p と q が互いに素だと佐々木多様体のトポロジーは p, q によらずすべて $S^2 \times S^3$ である．

*9）　もっとも，カラビヤウ多様体の情報を持っている NS5 ブレーンの形は複雑である．

*10）　正確には，箙だけでは理論のラグランジアンは指定されないが，ブレーンタイリングはその情報も与えてくれる．

こう．ゲージ理論の方には，QCD の時と同様，メソンやバリオンが存在する．また，ゲージ理論には大域対称性が存在する．その数を d と書くことにする．特に，バリオンのチャージがゼロ（ノンゼロ）である対称性をメソニック（バリオニック）対称性と呼ぶ．この数は，

$$\#\,(\text{メソニック対称性}) = 3,$$
$$\#\,(\text{バリオニック対称性}) = d-3$$

となっている．佐々木多様体の方には，まず，トーラス $U(1)^3$ に相当する等長写像が存在する．この数は 3 であり，これはメソニック対称性の数と同じである．一方，佐々木多様体に 3-サイクルが存在すると，D3 ブレーンと呼ばれるブレーンがそのサイクルを巻いてそれがバリオンに見えることが知られている．*11).

$$\dim H_3(X) = d-3$$

であるから，この数が上で書いたバリオン対称性の数と一致するのである．ここで注目すべきは，重力側ではまったく違うように見える等長写像と 3-サイクルが，ゲージ理論側ではともに大域対称性として見えることである．

7. 変分問題の対応

さて，話はまだ終わりではない. ゲージ理論側では理論は共形場理論であると書いたが、実は今まで議論してきた箙ゲージ理論は UV での記述であり，それが繰り込み群のもとで IR の固定点に流れていくと考えられているのだ．IR では超共形対称性を持ち，特にその代数の中に **R 対称性** ($U(1)_{\mathrm{CFT}}$ と書こう）が存在する．繰り込み群が関わってくるので，$U(1)_{\mathrm{CFT}}$ は UV では上に書いた d 個の対称性が混じり合ったもであると考えられ，それが正確に何であるのかを知るのは簡単ではない. つまり，UV での R 対称性（R でない対称性）の生成子を R ($F_I,\ I=1,...d-1$) と書くことにすると，$U(1)_{\mathrm{CFT}}$ の生成子は実数 t_I を用いて

$$R_t = R + \sum_{I=1}^{d-1} t_I F_I$$

のようにかけるはずである． この不定性 t_I を決めるのが a-maximization[6] である．

上で書いた $U(1)$ 対称性 R_t に対して，関数

$$a[t] = \frac{3}{32}(3\mathrm{Tr}R_t^3 - \mathrm{Tr}R_t)$$

を考えよう．ここでトレースは理論に存在する物質場についての和である．主張は，R 対称性 $U(1)_{\mathrm{CFT}}$ は上の関数を局所的に最大化するというものである．$a[t]$ は単純な 3 次関数だから、$U(1)_{\mathrm{CFT}}$ を決めるのはこの主張を認めれば簡単だ.

実は，$a[t]$ の極値における値は，4 次元共形場理論の**中心電荷**と呼ばれる重要な量であり，繰り込み群の流れにに沿って単調減少すると予想されている．さらに，AdS/CFT 対応は，ゲージ理論に対応する佐々木多様体 X の体積との間に次の関係式を予言する[5]：

$$\mathrm{Vol}(X_5) = \frac{\pi^3}{4}\frac{1}{a}. \tag{7}$$

これを佐々木の側で再現することはできるだろうか？$Y^{p,q}$ の場合には計量が知られているのでこれは単純な計算だが， 計量の計量の具体形が知られていその他のトーリック佐々木多様体についてはどうだろうか？AdS/CFT 対応を信じれば答えは知っているが，もっと直接的に佐々木の側からこれを理解する方法があるはずだ.

この問題に対する答えを与えたのがマルテリ，スパークスとヤウ[7] である．興味深いことに，それは再び変分問題として定式化できるのである．

佐々木多様体 X とその計量錘 Y との関係を思い出そう．これは少々微妙な問題である．Y を与えると X は式 (3) によって一意に定まるが，逆に Y から X を復元するには r が Y の座標系で書いたときに何であるかを知らなければいけない. そのためにしばしば使われるのが**リーブベクトル** $\xi = J(r\frac{\partial}{\partial r})$ である．ここで J は Y の複素構造で

*11） D3 ブレーンの結合する 4-form の場が佐々木の 3-form と AdS_5 の 1-form に分解する.

ある．X がトーリックの場合には，$U(1)^3$ の座標 $\phi_i\,(i=1,2,3)$ を用いて

$$\xi = \sum_{i=1,2,3} b_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}$$

のように書くことができ，ξ を決めることは b_i を定めることと等しい．

b_i の値はは佐々木・アインシュタイン多様体では一意に決まっているが，b_i を変化させ（その時 X はアインシュタインではなくなる），その佐々木多様体の体積を関数 $V[b]$ と書こう．主張は，リーブベクトル場に対応する b は $V[b]$ を最小化するというものだ．$V[b]$ はトーリックの場合には具体的な関数形が書けるので， これはすぐに実行できる手続きであり，こうして求めた体積は見事にゲージ理論からの予言（7）を満たすことが確認できる！ *12)，こうして AdS/CFT 対応のまた一つ定量的なチェックがなされたのである．

8. 佐々木の世界の広がり

さて，ここまでが本稿の主たる内容だが，佐々木多様体とゲージ理論の対応はまだまだ続く．例えば， トーリックでないあるクラスの佐々木多様体の場合には，佐々木・アインシュタイン多様体の計量の存在がゲージ理論側での固定点の存在と対応するという主張がなされている[10]．またここで考えたのよりもより一般のコンパクト化を考えた時には,「一般化された」佐々木多様体が現れることが知られており，ごく最近その体積の変分問題も議論されている[11]．

また，ここまでの話は 5 次元の佐々木多様体に特化してきたが，他の次元ではどうだろうか？例えば 11 次元で定義された M 理論に存在する M2 ブレーン解から出発して本稿と同様の考察をすると，X を 7 次元佐々木・アインシュタイン多様体としたとき，$AdS_4 \times X$ 上の M 理論とを M2-brane 上の (2+1) 次元超対称場の理論が等価であることが予想される．M2 ブレーン上の理論については最近チャーンサイモンズ項を持つゲージ場と物質場とが結合した理論であることがわかってきており，佐々木多様体との対応も種々の場合に議論されているが，5 次元の佐々木の場合に比べると分かっていないことも多い．

佐々木・アインシュタイン多様体は長らく多様体の世界の異端児とみなされてきたが，超弦理論の研究はその豊かな世界を探求する強い動機を与え，箙ゲージ理論との対応を明らかにした．佐々木多様体の研究が本格的になされたのはごく最近，21 世紀になってからであり，その含意するものは到底尽くされていないといえるだろうが，我々が学んだものは既に劇的である．多様体のジャングルの中にはさらにどんな驚きが待っているのか，そして超弦の魔法はそれらについて何を教えてくれるのか，未知の世界への期待に胸が高まる．

参考文献

1) 山崎雅人， http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~yamazaki/files/2007/kinosakisasaki.pdf
2) J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].
3) 数理科学 2008 年 2 月号， 特集：ゲージ重力対応
4) I. R. Klebanov, E. Witten, Nucl. Phys. **B536**, 199-218 (1998). [hep-th/9807080].
5) S. S. Gubser, Phys. Rev. D **59**, 025006 (1999) [arXiv:hep-th/9807164].
6) K. A. Intriligator, B. Wecht, Nucl. Phys. **B667**, 183-200 (2003). [hep-th/0304128].
7) D. Martelli, J. Sparks and S. T. Yau, Commun. Math. Phys. **268**, 39 (2006) [arXiv:hep-th/0503183].
8) J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and D. Waldram, Adv. Theor. Math. Phys. **8**, 711 (2004) [arXiv:hep-th/0403002].
9) M. Cvetic, H. Lu, D. N. Page and C. N. Pope, Phys. Rev. Lett. **95**, 071101 (2005) [arXiv:hep-th/0504225].
10) J. P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and S. T. Yau, Commun. Math. Phys. **273**, 803 (2007) [arXiv:hep-th/0607080].
11) M. Gabella and J. Sparks, arXiv:1011.4296 [hep-th].

（やまざき・まさひと，プリンストン大学）

*12） 実は， $a[t]$ と $V[b]$ の間には， 極大／極小化する前にも等価性が成り立つことが示されている．