論理と抽象の彼方に [*]

山崎雅人 [†]

「なぜ数学を学ぶのか？」という特集の記事を引き受けてしまったが，著者自身も未だ数学を学ぶ身であり，こんな記事を書く資格があるかどうかは心もとない．ただ，本職の数学者ではないからかえって無責任に書けることもあるかもしれないから，以下に数学の一つの側面について僕の個人的な考えを述べさせていただく．

数学のことが苦手だと言う人は世の中には少なくないようだが，『数学セミナー』という名前の雑誌をわざわざ手にとっている読者の皆さんは，少なくとも「数学なんてこりごり，もう二度と見たくもない」と思っている人ではないだろう．そればかりか，きっと今まで何度も「数学は楽しい」と思ったことがあるのではなかろうか．数学の楽しさを少しでも知っているだけで，数学の学習が格段に充実したものになることは請け合いである．

だからといって，数学を学問として系統的に勉強するのにはまた別の難しさがあるのも事実である．授業がさっぱりわからなくて落ち込むこともあるだろう．胸躍らせて数学の分厚い教科書を開いたら，次から次へと抽象的な定義と証明が続いて，我慢しきれず本を途中で投げ出してしまうこともあるだろう．僕も数学に出会ってから長いことになるが，数学の教科書や論文を途中で投げ出してしまうことは今でも少なくない．

数学の一つの重要な側面はその論理である．つまり，一連の公理から出発して，そこからの帰結（命題，定理等）を演繹していく．そこには妥協は許されず，その論証の仮定で，例えば仮定として何が必要であるのか，何から何が従うのかといったロジックが明快にされていく．論理的に一歩一歩明晰であることは数学の肝であるし，数学を学ぶためには緻密な論理をきちんと追っていく経験をしていくことはトレーニングとして必要不可欠である．もちろん，こういった経験は実際の社会でも「役立つ」だろう．例えば，実際の社会でも，何を前提とし何が主張とされているのかが共有されていないために話し合いがうまくいかないことは少なくないのではないだろうか．

しかし，数学は単なる論理学ではない．目的もなくただひたすら論理を追っていくのは人間の忍耐力の限界を超えているし，正しいだけの主張ならば既に現在のコンピューターからでも無数に生み出すことができるだろうが，そのほとんどは数学的にはつまらないだろう．

もちろん，数学がそんな無味乾燥なものではないことは多くの読者にとって自明だろう．でも，実際に数学の教科書を開いて数学を学ぶとき，数学を楽しいと感じた初心を見失いがちなのは確かだ．例えば，数学の教科書では，定義が天下りに降ってくることが多い．とりあえず作法としてそれを受け入れても，なんだかもやもやしたものが残るし，結局何を目指しているのか先が見えずに不安に思うことも

---

[*] 『数学セミナー』2018 年 4 月号特集「なぜ数学を学ぶのか」の記事の著者稿.

[†] 東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構

あるだろう．個人的には，そう思うのは自然だと思う．歴史を遡れば，そもそも良い定義を見つけることは非常に重要なステップであり，現在となっては自明に見える出発点にたどり着くのにもしばしば膨大な時間，様々な紆余曲折，そして具体例に立脚した数え切れない先人の思考が必要とされた．そうした幾多の試行錯誤の末に，歴史の淘汰の中で生き残ってきた本質が，教科書に残っているのだ．それを一読して了解するのは簡単ではないとしても不思議ではないし，そういう「分からない」という気持ちは大切にしたい．

だからといって，必ずしも歴史を学べといっているのではない．数学の一つの利点として，そういう歴史や経緯と切り離してもその論理自体を直接に学べることが挙げられる．余計な前提条件がなくとも，定義からその先の論理を丹念に追っていければその定義が自然であることがなんとなく感じられることが多いし，複雑な証明も何となく方針が読み取れるかもしれない．習うより慣れろというわけで，経験を積んで行く中で，徐々に耐性が付いてくるものだろう．

ただし，単に「教科書に書かれている」「偉い先生が書いているから」からという理由で教科書の内容を盲目的に受け入れてしまうのはおすすめできない．数学は本質的に自由なものであるべきで，権威によって規定されるべきものではない．定義を変えたらどうなるのか，あるいは論証の順序を変えたらどうなるのか，また具体例で定理を確認できるのか，そういう試行錯誤を自分なりにして見ることが，理解を深める鍵になると思う．教科書の最後の章に書かれているいかめしい定理も，実は論理的には教科書の最初の方だけ読めば証明できることだってあるかもしれないし．自分が他の本ですでに知っている定理を使えば証明が簡単になるかもしれない．また，ある定理の証明を読んだら，今度は溯ってどんな命題が必要としていたか考えてみると，なぜその前のセクションでその命題が証明されていたかが納得のいくものだ（著者だって，きっとそうやって本を書いたのだ）．仲間と一緒にあれこれと検討してみるのも楽しい．結局，教科書の著者だって人間なのだから，（それを本に直接書くかどうかは別として）なんらかのストーリーなしには進めないものなのではないだろうか．

数学というのは浮世離れた天才・変人のやるぶっ飛んだ学問だというイメージは根強いようだが，（少なくともほとんどの）数学は我々の素朴な日常的直観と断絶されたものではないと筆者は信じている．むしろ，その直観を前提に，その地続きに，学問としてある一つの方法論を徹底してみせた一つの成功例が現在の数学なのではないだろうか．学問として成熟した現代数学において形式主義が大きな数学を収めてきたのは確かだが，より長いスパンにおいて数学を考えるとき，数学は単に形式的な論理以上のものであったことは間違いないだろう．この混沌とした世界に論理の力をもって光を与え，具体例の羅列から本質的な構造をとりだし抽象すること．そうして普遍性を獲得した対象をそれ自身として研究すると同時に，その知見を世界のより広い例へとさらに適用して行くこと[*1]．太古の昔から，人間はこうして数学を大切に育んできたのだ．

直観から出発し，そのことを忘れないこと．しかしその地に安住するのではなく，そこから一歩一歩進んで論理を積み上げ，やがてはその地平線の先に

[*1] リーマン幾何学が後にアインシュタインの一般相対性理論に用いられたように，純粋に数学的な興味によって作り上げられた理論が実際の宇宙に適用できた例は多い．また，純粋数学の範疇に限っても，完全に抽象的に見える理論でも，その背後にはより具体的な文脈があることが少なくない．例えば，グロタンディークによる壮大な理論の背後にも，ヴェイユ予想というより具体的な問題の刺激があったことが知られている．

直観を超える世界にたどり着くこと．その地でまた直観と論理を養い，更なる旅へと出発して行くこと．この絶え間ない営みこそが数学なのではなかろうか．その旅の彼方に姿を現わすのはどんな世界だろうか？あなたがそこで何をみつけ，そこでそこで何を感じるのか，そこに正解はない．たとえ天才でなくても構わない，自らの足で一歩一歩進み，ささやかながらも自分なりの数学の世界を作り上げて行くこと，それができるのは数学を学ぶものの特権である．数学の魅力に取り憑かれたあたなが来た道を振り返るとき，世界はきっと違って見えるに違いない．