

場の理論と結び目

山 崎 雅 人

1. 結び目理論のおこり

本特集号の取りまとめ役である村上先生からは、「場の理論と結び目理論」についての記事を依頼された。場の理論とは（少なくとも完全には）まだ厳密な数学にはなっていない物理学の理論のことである。結び目理論の様々な側面を扱ってきた本特集号ではあるが、純粋数学としての結び目理論に親しんできた読者にとっては、結び目理論が物理学の理論に応用を持つことは驚きかもしれない。

しかし、実は歴史を辿ると、そもそも結び目理論が生まれてきた背景には、物理学からの強い動機があったのだ。

時代は遡ること 19 世紀の後半、1860 年頃のことである。当時スコットランドでそして世界で最も著名な物理学者の一人がウィリアム＝トムソン（1824–1907、図 1 左）、後のケルビン卿であった。そう、絶対温度の単位に名前の付いているかの人だ。

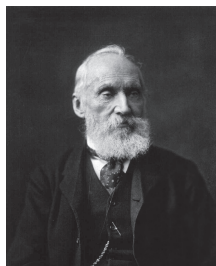


図 1 結び目理論の草創期に大きな貢献をなしたケルビン卿（左）とテイト（右）。wikipedia から転載。

当時の物理学においては光は波であるとの波動説が有力であったが、それならば光が伝搬するための媒質が必要となると考えられる。この媒質をエーテルと呼び、その流体としての性質が活発に研究されていた。

一方、当時の科学では既に 19 世紀初頭にドルトン（1766–1844）によって原子論が提唱されており、それ以上分解できない最小単位としての原子の存在の証拠が集まっていた。しかし仮に原子が存在するとしても、なぜそれが安定なのかは謎であった。

そこでケルビン卿は、エーテルという流体の中にある渦の作る結び目が原子でないかと考えた¹⁾。結び目は連続変形で保たれるので、原子の安定性をうまく説明できる可能性がある。エーテルという波動論から原子という粒子を導く点において、この理論はいわば波動と粒子の統一理論とでもいうべきものである。当時の科学界ではヘルムホルツ（1821–1894）の流体の渦についての研究が注目を集めており、特に二つの渦が結目のように絡まって相互作用する状況が既に調べられていた。この意味で、ケルビン卿の「渦の結び目＝原子」理論は時宜にかなったものであった。

渦を想像するには台風を思い浮かべれば良い。台風には少なくとも一つの目がある。これは地球の表面という二次元空間における渦であったが、同様に三次元空間を考えても、一次元的な「渦の芯」ができることが想像できるだろう（図 2）。これが流体

力学における渦糸である。大学でベクトル解析を学ぶと、この渦の数学的な特徴づけがわかる：測度場 $\mathbf{v}$ に対し、渦が存在する時には $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} \neq 0$ となっているのである。ケルビン卿の理論では、この渦糸が結び目となるのである。

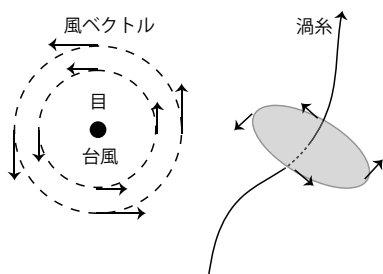


図 2 台風は渦を作り出し、その目の周りでは風の向きと速度を表すベクトル $\mathbf{v}$ が回転を持つ： $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$ 。台風の目は二次元空間におけるゼロ次元（点）であるが、次元を上げた三次元空間でも、一次元的な線（渦糸）の周りに渦が作り出される状況を考えることができる。

ケルビン卿は、例えば自明な結び目、三葉結び目、八の字結び目をそれぞれ水素、炭素、酸素に対応させた（図 3）。

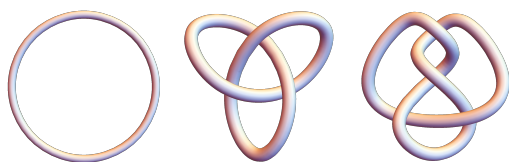


図 3 ケルビン卿の理論において水素、炭素、酸素に対応する結び目。結果的にはこの理論は失敗したので、現在の中高生が化学の授業で結び目を学ぶことはないだろう。フランク・ウィルチェックの言葉を借りれば²⁾、ケルビン卿の理論は“beautiful loser”だったのだ。

もし結び目が原子を表しているのならば、結び目を分類すれば原子の周期表ができることになる。これはとても重要な問題であったが、結び目理論を少しでも知っている読者ならご存知のように、実際には簡単な問題ではない。この問題はケルビン卿の友人であり共同研究者でもあった数理論理学者ピーター・テイト（1831–1901、図 1 右）によっ

て研究されることになり、テイトは結び目の交点数が小さい時の分類表を作ることになったのだ。

ケルビン卿とテイトが周期表を作ろうとしていた頃、ロシアの化学者メンデレーエフ（1834–1907）が 1869 年に独自の理論を発表した^{*1)}。特に、彼の周期表は当時発見されていなかった元素の存在とその性質を予言しており、その予言が確かめられるとともにメンデレーエフの理論は研究者たちに受け入れられていった。

こうして、現在の中高の化学の教科書に残ったのはケルビン卿ではなくメンデレーエフになったのである。しかしケルビン卿の理論は思わぬ副産物を生み出した—テイトが手がけた結び目理論はそれ自体純粋数学の一分野として発展していったのである。

2. 可換チャーヌ＝サイモンズ理論と絡み数

さて時代はくだって現代、結び目理論の研究はケルビン卿の頃からは随分進んだ。特に、ここ 20 年ほどの間に結び目の不変量の重要性が明らかになってきたことは本特集の記事でも既に述べられているとおりである。

そこで、数学を使って物理（化学）を説明しようとしたケルビン卿とは逆に、今度は物理を使って結び目不変量の数学を説明しようとしてみよう。ただし、今はケルビン卿のアイデアも少しは参考にしてみよう。つまり、三次元空間に存在する結び目を考え、それをこれを三次元空間に存在する「渦糸のようなもの」だと思ふことにしよう。ただし現在ではエーテルという流体の存在は実験的に否定されているので、代わりに電磁気学を考えることにしよう。流体力学では空間の各点で速度ベクトルを考えるが、電磁気学では空間の各点で磁場や電場、またベクトルポテンシャルなどのベクトルを考えることになるので、色々とアナロジーを考えることができる^{*2)}。

*1) この原稿を執筆中の 2019 年は彼の理論の 150 周年であり、国際周期表年として世界中でイベントが企画されている。

*2) 流体力学と電磁気学のアナロジーは歴史的にはたびたび用

結び目理論では、結び目を連続に変形しても同じ結び目だと思うので、結び目不変量も変化しない（もちろん、だからこそ不変量と呼ばれるのだ）。ただし、これは我々にとっては問題だ。というのも、我々が日ごろ慣れ親しんでいるような物理系では連続変形をすると物理量は変化してしまうからだ。例えば電磁気学のクーロンの法則は逆二乗則であり、距離を変えるとその力の大きさは変化してしまう。

そこで、距離に依存する通常の電磁気学とは異なり、トポロジーにしか依存しない理論、つまり位相的場の理論を考えることにしよう。そのような理論の典型的な例がチャーソン＝サイモンズ理論である。

チャーソン＝サイモンズ理論では三次元空間においてゲージ場 $A(x) = A_{i=1,2,3}(x)$ を考える。ただし、ここで x は三次元空間の座標 $x = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$ であり、ゲージ場とは電磁気学の教科書ではしばしばベクトルポテンシャルと呼ばれている。

我々の理論を指定するラグランジアンは、三次元空間 $\mathbb{R}^3$ において

$$S_{CS}[A] = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^3} A \wedge dA \quad (1)$$

で与えられる。但し h は理論の量子的性質の強さを指定するプランク定数である。また以下では A は微分形式の言葉では 1-形式であり、局所座標では $A = \sum_{i=1}^3 A_i dx^i$ とする。ラグランジアンは局所座標では

$$S_{CS}[A] = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_{ijk} A_i \partial_j A_k \quad (2)$$

となる。但し、 ϵ_{ijk} は $\epsilon_{123} = +1$ で定まる完全反対称テンソルである。

このラグランジアンには計量を一切用いていないので理論は位相的場の理論になっていることが

期待できる。この理論の古典的な性質は運動方程式（オイラー・ラグランジュ方程式）から得ることができ、それは

$$\frac{\delta S_{CS}[A]}{\delta A} = 0 \longrightarrow F = dA = 0 \quad (3)$$

となる。これはベクトル解析の記法で書くと磁場が存在しないこと： $B = \text{rot } A = 0$ であるので、ゲージ場は渦を持たないことになる。

我々の学ぶ通常の電磁気学では空間三次元、時間一次元であり、その空間方向に磁場 B がありそれは渦を持たない（ $\text{rot } B = 0$ ）。今は空間三次元しかない状況を考えていてそのゲージ場 A （ベクトルポテンシャル）そのものが既に渦を持たないので、 A 自体が通常の場合の磁場 B と類似の役割を果たすことになる。この辺りは通常の電磁気学に慣れているとかえって分かりにくいかもしれないので注意しよう。

物理学の理論を量子的に指定するための便利な方法の一つが経路積分である。その分配関数 Z は

$$Z = \int [DA] e^{S_{CS}[A]} \quad (4)$$

で与えられる。また、例えば二点 x, y におけるゲージ場の相関関数も考えることができ、それは

$$\begin{aligned} \langle A_i(x) A_j(y) \rangle &= \frac{1}{Z} \int [DA] A_i(x) A_j(y) e^{S_{CS}[A]} \end{aligned} \quad (5)$$

として計算できる。ただしここで $[DA]$ と書いたのは経路積分についての測度である。ファインマンの経路積分の考え方では、古典的な軌道 (3) のみならず、全ての可能な軌道を考え、それを足し上げるのであり、上の積分 (4) 及び (5) はそれを数学的に表現しようとしたものである。

もっとも、経路積分の測度を数学的にきちんと定義するのは至難の技である——少なくとも、今はゲージ場 $A(x)$ 自体が多様体 M の座標 x に依存しており、ゲージ場のなす空間は無限次元である。ただしここではおおらかに考えることにして、経路積分も有限次元の積分と似たようなものだと思っておくことにしよう。その場合、上の積分の

いられており、ファラデー、ヘルムホルツ、マックスウェルなどの研究ではこのアナロジーが重要な役割を果たした。面白いことに、ファラデーやマックスウェルは流体力学の考えを電磁気学に応用したらしいが、ヘルムホルツはむしろ逆に電磁気学の考え方を流体力学に持ち込んだらしい。

有限次元の類似は、ゲージ場を有限次元ベクトル $\mathbf{v} = (v^{a=1,\dots,N})$ で置き換えればよく、ラグランジアン^{*}の対応物は二次形式

$$S_{\text{有限}}[\mathbf{v}] = \mathbf{v}^t \cdot (C\mathbf{v}) = \sum_{a,b=1}^N v^a C_{ab} v^b \quad (6)$$

で与えられる（但し、 C は対称行列）。また径路積分の有限次元類似は

$$Z_{\text{有限}} = \int d\mathbf{v} e^{S_{\text{有限}}[\mathbf{v}]}, \quad (7)$$

$$\langle v^a v^b \rangle = \frac{1}{Z} \int d\mathbf{v} v^a v^b e^{S_{\text{有限}}[\mathbf{v}]} \quad (8)$$

で与えられる。この積分を実行するのはガウス積分の演習問題なので読者に委ねておこう^{*3)}。ここでは結果だけを書く

$$Z_{\text{有限}} \sim \sqrt{\frac{1}{\det C}}, \quad (9)$$

$$\langle v^a v^b \rangle \sim (C^{-1})_{ab} \quad (10)$$

となる。但し数係数（ π や 2 の冪など）は大雑把に考えることにして無視した。

径路積分は既に述べたとおり数学的な定義が難しいが、今は形式的に考えることにするとラグランジアンはやはりゲージ場の二次であるのでガウス積分が実行できる。その場合、行列 C に相当するのは外微分作用素 d であるので、その「逆行列」に相当するのは次の微分方程式の解である：

$$d_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (11)$$

但し $\delta^3(\mathbf{x})$ は三次元空間でのデルタ関数であり^{*4)} 関数空間における単位行列に相当するものである。こうして定義された関数 G は、学部^{*}の数学や物理の講義でしばしば現れるグリーン関数に他ならない。

方程式 (11) には解の不定性がある：というのも外微分の性質より $d^2 = 0$ であるので、 G に dH

^{*3)} まず $N = 1$ の場合をガウス積分の式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a} \sim \sqrt{1/a}$ を示そう。 $N > 1$ の時は、対称行列 C を対角化すれば $N = 1$ の場合に帰着する。

^{*4)} $\delta^3(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$ である。 $\delta^3(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = 0$ のみでゼロでない値を持ちその $\mathbb{R}^3$ での積分は $\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \delta^3(\mathbf{x}) = 1$ である。

(H はある関数) を足しても依然として (11) の解だからだ。このような不定性が存在することは、我々が考えている場はベクトル・ポテンシャルであり観測可能な物理量そのものではないことに由来する。物理量は磁場 $F = dA$ であり、それはゲージ変換

$$A \rightarrow A + d\lambda, \quad \lambda \text{ は関数} \quad (12)$$

のもとで不変である。このようにゲージ理論はゲージ不変性を持ち、我々のラグランジアン (1) はゲージ変換 (12) について ($\mathbb{R}^3$ での境界項を無視すれば) 不変である。

この不定性を取り除くため、さらに「ゲージ固定条件」 $d^*G = 0$ を課すことにしよう^{*5)}。この時、(11) の解は一意に定まって

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{x^i - y^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} (dx^j \wedge dy^k)$$

で与えられる。ベクトルの内積と外積の記法で書けば

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (d\mathbf{x} \times d\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}. \quad (13)$$

この関数が^{*} (11) 及び $d^*G = 0$ を満たすことを示すことは演習問題としておく。

このグリーン関数を用い、有限次元の時の (10) を参考にすれば、ゲージ場の二点相関関数は

$$\langle A_i(\mathbf{x}) A_j(\mathbf{y}) \rangle = G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{i,j} \quad (14)$$

と求められることになる。ここで $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタである。

こうして径路積分を実行して相関関数が求まったが、物理的にはまだ問題がある。ゲージ場そしてその二点関数はゲージ変換 (12) のもとで不変ではないので、物理量ではない。そこでゲージ変換で不変量として、 $A(\mathbf{x})$ の閉路に沿った積分

$$\oint_C A = \oint_C d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A} \quad (15)$$

を考えることにしよう。すると、先ほどの結果

^{*5)} これは、 d^{-1} の代わりにラプラシアン $\Delta = dd^* + d^*d$ を用いて $d^* \Delta^{-1}$ を考えることに相当する。

(14) を異なる二つの閉路 C_1, C_2 に沿って積分することで (図 4)

$$\left\langle \oint_{C_1} A \oint_{C_2} A \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} dx \oint_{C_2} dy \frac{(x-y) \cdot (dx \times dy)}{|x-y|^3} \quad (16)$$

を得る (但し、この量が発散しないように C_1, C_2 は交点を持たないとした). この量は閉路の組 C_1, C_2 についての位相不変量になっているはずだ. 実際、この量は閉路の絡み数 $\text{lk}(C_1, C_2)$ の定義を与えており、その値は整数であって直観的には C_1 と C_2 が何回絡まっているかを符号つきで数えるものである *6). 絡み数については本特集の今井氏の記事も参照されたい.

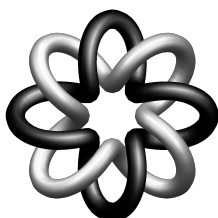


図 4 二つの閉路 (結び目) C_1, C_2 が絡みあってリンクを作る時、 C_1 と C_2 はゼロでない絡み数を持つ. この図では二つの閉路を異なる色で表しており、その絡み数は 4 である.

さてここまでの計算を反省してみよう. 我々は閉路に沿った積分を考えたが、これを指数関数の肩にのせたもの

$$W_C = \exp \left(\oint_C A \right) \quad (17)$$

を考えよう. これはウィルソン・ラインと呼ばれるゲージ不変な物理量であり、我々はその期待値

を計算することもできる:

$$\langle W_C \rangle = \frac{1}{Z} \int [DA] e^{S_{CS}[A] + \oint_C A}. \quad (18)$$

この指数関数を展開すると、例えば 2 次のオーダーでは先ほどの結果から我々は「 C のそれ自身との絡み数」を得る. これは先ほどの定義 (16) に戻ると素朴には発散しているの、適当に正則化して定義する必要がある. これはチャーン=サイモンズ理論のフレーミング・アノマリーと関係していて微妙なところではあるが、きちんとした説明には骨が折れるのでここでは気にせずに先に進もう.

ウィルソン・ラインの期待値の式 (18) をみると、ウィルソン・ラインを演算子と思う代わりに、ラグランジアン $S_{CS}[A]$ の変形とも思うことができることに気づく:

$$S_{CS}[A]' = S_{CS}[A] + \oint_C A. \quad (19)$$

この変形は、運動方程式 (3) を

$$dA + \hbar \delta_C = 0 \quad (20)$$

のように変形する *7). つまり、 C の上でのみゲージ場 A は渦を持つことになる. つまり、ウィルソン・ラインは渦を作り出す演算子でもあったのだ *8).

こう考えてみると、チャーン=サイモンズ理論での我々の設定は、もともとのケルビン卿の設定とそれほど遠くはない気がしてくる. つまり、エーテルという流体の代わりに電磁気学のゲージ場を考え、その渦を作り出すウィルソン・ラインを考えることで、結び目の不変量 (今の場合は絡み数) を得たのである. 歴史とともに設定も物理的意味も随分変わってきたが、核心となるアイデアはそれほど変わらないものなのかもしれない.

*6) 絡み数はこれはテイト以前に既にカール・フリードリヒ・ガウス (1777-1855) によって研究されていた古典的な位相不変量である. ガウスは電磁気学のビオ=サバールの法則の研究の中でこの量にたどり着いたと言われている. ここでもまた、物理学的な考察が背後にあったのだ. 絡み数の幾何と電磁気学との関係については、例えば 3) を参照されたい. また電磁気学を流体力学寄りの立場から議論した日本語の教科書に 4) があるが、本稿の趣旨とは方向性が随分違うようである.

*7) δ_C は C 上でのみゼロでないデルタ関数. 例えば C が局所座標で x 方向にのびている時、 $\delta_C = \delta(y)\delta(z)$.

*8) 絡み数の定義において、二つの閉路は交点を持たないと仮定したことを思い出そう. それにもかかわらず、絡み数のようにお互いの存在を「感じる」ことができるのは、ウィルソン・ループがその周りの空間に渦を作り出すからなのである. これは電磁気学におけるアンペールの法則 (電流の周りに磁場が作り出される) の類似である.

3. 非可換チャーン＝サイモンズ理論と 結び目不変量

ここまで説明してきたチャーン＝サイモンズ理論は電磁気学に相当するものであり、対応するゲージ群が可換なので可換チャーン＝サイモンズ理論と呼ばれる。我々の世界でも例えば原子核の物理は非可換ゲージ群で記述されることが知られているので、非可換チャーン＝サイモンズ理論を考えるのは自然であり、このような一般化によりさらに強力な位相不変量が得られるのではないかと期待できる。

非可換チャーン＝サイモンズ理論を指定するためにはゲージ群 G を選ぶ必要があり（先ほどの電磁気学は $G = U(1)$ の場合である）、ゲージ場は G の接空間であるリー環 $\mathfrak{g}$ に値を持つ。任意の有限次元半単純リー環は行列として実現できるので、実用上はゲージ場のそれぞれの空間成分 $A_i(\mathbf{x})$ が行列になるとしておけば良い。この時、ラグランジアンは

$$S_{\text{CS}}[A] = \frac{1}{h} \int_M \text{CS}[A] \quad (21)$$

で与えられる。但し今 $\mathbb{R}^3$ の代わりにより一般の三次元多様体 M を考えることにした。また $\text{CS}[A]$ は数学者の陳省身（1911–2004）とジェームズ・サイモンズ（1938 年–）が特性類の研究の中で見出した 3-形式（チャーン＝サイモンズ 3-形式）

$$\text{CS}[A] = \text{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (22)$$

である。Tr は行列として実現した時のトレース（を適宜規格化したもの）であり、より数学的にはリー環のキリング形式と呼ばれる $\mathfrak{g}$ -不変な双線型形式である。

ラグランジアン (21) から導かれる運動方程式は

$$F = dA + A \wedge A = 0 \quad (23)$$

と可換の時よりも多少複雑になるが、基本的な構造には大差ない。この場の強さは非可換版のゲ

ージ変換 $A \rightarrow g^{-1}Ag + g^{-1}dg$ のもとで不変であることが確認できる。

物理量としてやはりウィルソン・ライン (17) を考えることができるが、今度はゲージ場が行列であって必ずしも交換しないので指数関数の定義においてその順序に注意を払う必要がある：

$$W_C = \text{Tr}_R P \exp \left(\oint_C A \right). \quad (24)$$

上の式で P という記号は閉路 C に沿ってゲージ場を並べることを意味する記号である。またトレースを取る時にゲージ群の表現 R のもとでのトレースを取ることができるので、上のウィルソン・ラインは表現 R にも依存する。こうして定義したウィルソン・ラインがゲージ変換で不変であることを示すのは演習問題としておこう*9)。

さて、ここまで用意してしまえば経路積分により分配関数

$$Z = \int [DA] e^{S_{\text{CS}}[A]} \quad (25)$$

及びウィルソン・ループの期待値

$$\langle W_C \rangle = \int [DA] W_C e^{S_{\text{CS}}[A]} \quad (26)$$

を定義することができる。出発点となる理論がトポロジーにしか依存しなかったのも、特に $\langle W_C \rangle$ は自動的に結び目 C の不変量を与えるはずだ。つまりゲージ群 G とその表現 R ごとに、結び目の不変量が定まることになるのだ！このことを指摘したのが物理学者のエドワード・ウィッテン（1951–）である⁵⁾。

彼の計算によると、特に一番簡単な例として、 G を $SU(2)$ 、 R をその二次元基本表現とすると、対応する結び目の不変量として本特集でも既に説明されたジョーンズ多項式が再現されるのである。もちろん、 G や R を取り換えればざくざくと結び目不変量ができることになるのだ。結び目理論の研究者にとってはこれはなんとも嬉しいことである。

*9) 分からなかった場合は例えば場の理論の教科書 6) の 15.3 節参照。

その一方で、結び目不変量の径路積分による定義はジョーンズ多項式のような既知の結び目不変量に対しても新しい見方をもたらしたことも強調しておこう。ジョーンズ多項式のスケイン関係式による標準的な定義では結び目の平面への射影について多項式を定義し、次にこの定義が射影の取り方によらないことを計算によって示す必要があった。しかし径路積分による定義ではそもそもの定義に射影を用いる必要がないので、それが位相不変量であることは定義から自動的に従うのである。

4. 21 世紀の結び目思考法とは？

結び目理論の歴史をだると、ガウスにせよ、テイトにせよ、その初期の研究の背景には電磁気学や流体力学における「物理学的思考」があった。もちろんその後結び目理論は物理学とは独立に純粋数学として発展し、長足の進歩を遂げてきた。しかし場の理論としてのチャーン＝サイモンズ理論が近年結び目理論において華々しい成果をあげてきたことを考えると、物理学的な思考に由来する DNA は、現在の結び目理論においても脈々と受け継がれているのではないだろうか？「結び目の思考法」の精髓を得るためには、やはり「物理学的思考」は必要不可欠ではないだろうか？

場の理論は自然界において存在が知られている全ての力を記述することに成功し続けてきた理論的枠組みであり、20 世紀物理学における金字塔の一つであるといえるだろう。それでは 21 世紀に生きる我々のための「物理学的思考」は、どこからやってくるのだろうか？筆者にはその答えを知る由もないが、その鍵は「21 世紀の物理学」とも呼ばれる超弦理論にあるのではないかと考えている研究者は多い。既にチャーン＝サイモンズ理論は位相的弦理論と呼ばれる弦理論についての弦の場の理論から現れることが知られており⁸⁾、この意味で結び目理論やチャーン＝サイモンズ理論は弦理論の「大きな物語」の一端に過ぎないことが明らかになっている。だからこそ、筆者を含め多くの研究者が日々弦理論をそしてその数理を研究し

ているのであり、その営みは結び目理論の研究者達にとっても無縁のものではないのだ。

22 世紀の歴史家が 21 世紀の超弦理論の研究にどのような評価を下すことになるのだろうか？超弦理論は驚くべき豊富な内容を持っており、我々に既に多くの数学的世界をもたらしてきた。超弦理論の研究者達が自らの進む道に確信を持てる理由の一つはそこにある。もしかすると、超弦理論は自然界を記述する理論としてはケルビン卿の理論のように“beautiful loser”となる運命にあるのかもしれない——超弦理論が物理学の理論である以上、その可能性は常に存在している。しかしそれでも、そこに未来への夢がある限り、研究者たちは超弦理論の研究を続けるだろう。そしてその成果は、結び目理論を含む数学の中できつと脈々と受け継がれていくだろう。そんなことを考えながら寝られない夜を一人過ごしていると、遠い世界の人だと思っていたケルビン卿が、歴史上の先輩として今までよりもずっと身近な人のように感じられてくるのである。

参考文献

- 1) 本稿で述べた 19 世紀の歴史については Alexei Sossinsky “Knots, Mathematics with a Twist,” (Harvard University Press, 2002) の第 1 章が短く読みやすい。原論文は W. Thomson, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 25(1), 217-260 (1868) であり、ケルビン卿の全集の三巻にも収められている。著者は歴史には疎いのでより正確な史実をご存知の方は後日ご教示頂ければと思う。
- 2) F. Wilczek, “Beautiful Losers: Kelvin’s Vortex Atoms,” <https://www.pbs.org/wgbh/nova/article/beautiful-losers-kelvins-vortex-atoms/>
- 3) 深谷 賢治, 電磁場とベクトル解析 (現代数学への入門), 岩波書店, 2004 年。
- 4) 今井 功, 電磁気学を考える, サイエンス社, 1990 年。
- 5) E. Witten, “Quantum Field Theory and the Jones Polynomial,” Commun. Math. Phys. **121**, 351 (1989).
- 6) M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,” WestView Press, 1995.
- 7) 河野俊丈, 場の理論とトポロジー, 岩波書店, 1998 年。
- 8) E. Witten, “Chern-Simons gauge theory as a string theory,” Prog. Math. **133**, 637 (1995) [hep-th/9207094].

(やまざき・まさひと, 東京大学カブリ IPMU)