

4次元チャーン=サイモンズ理論

と 可積分系

山崎雅人 (東大IPMU)

名古屋大学集中講義, 2021年4月6日

昨日のスライド・ノート

[http://member.ipmu.jp/
masahito.yamazaki/files/
2021/20210705_Nagoya_Lec1.pdf](http://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki/files/2021/20210705_Nagoya_Lec1.pdf)

[http://member.ipmu.jp/
masahito.yamazaki/files/
2021/20210705_Nagoya_Lec2.pdf](http://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki/files/2021/20210705_Nagoya_Lec2.pdf)

多弦セミナー，NUCTからも

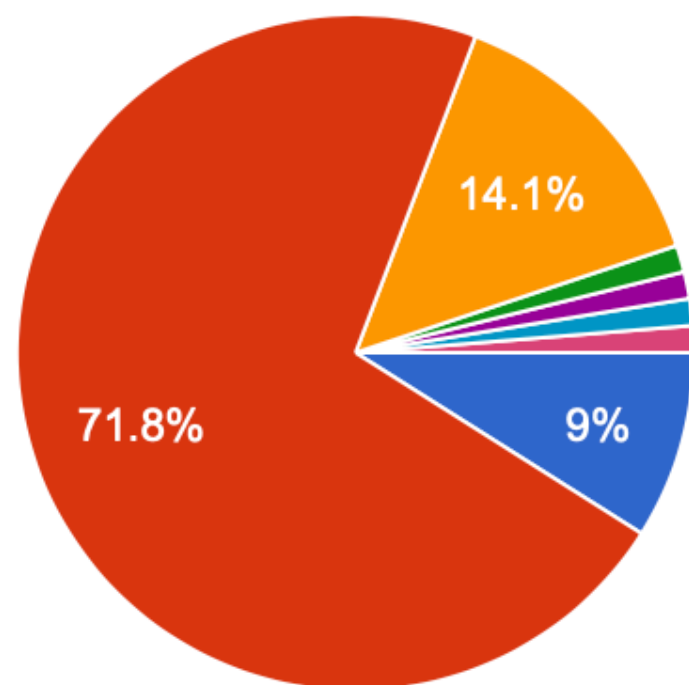
単位が必要な

履修学生の方のための連絡事項：

レポート：講義内容に関係したことについて考
え・調べてNUCTにpdfで提出
(締め切り 8/11 (木曜日)：24時
(11日いっぱい))

明日以降の進捗に希望はありますか？

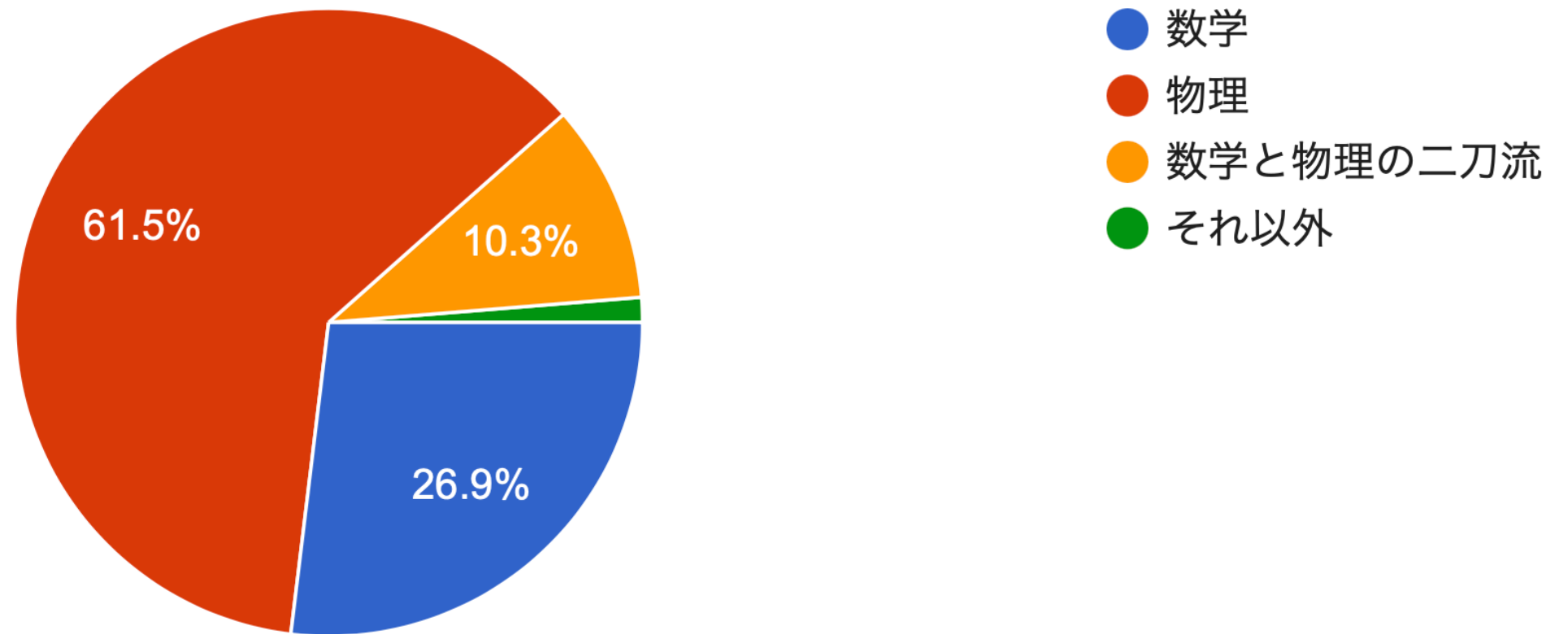
78 件の回答



- もっと早くしてほしい
- 今のままでちょうどいい
- 早すぎるのもっとゆっくり
- 声が大きすぎるのもう少し抑え目に...
- 2限目の前半はわかりやすかったです...
- 進捗も理解度も何ともコメントしかね...
- 進捗は適切だったと思うのですが、結...

あなたはどの分野の専門でしょうか？

78 件の回答



米国では、論文を一人で読むより、よく知っている人と直接しゃべって数学をする人が多い。日本人の若手に、そういう米国の世界を知って欲しい。

(小林昭七さん)

佐藤幹夫の数学



木村達雄
[編]

日本評論社

数理物理と佐藤幹夫先生

- 三輪哲二
野海正俊
高崎金久
上野健爾 [司会]

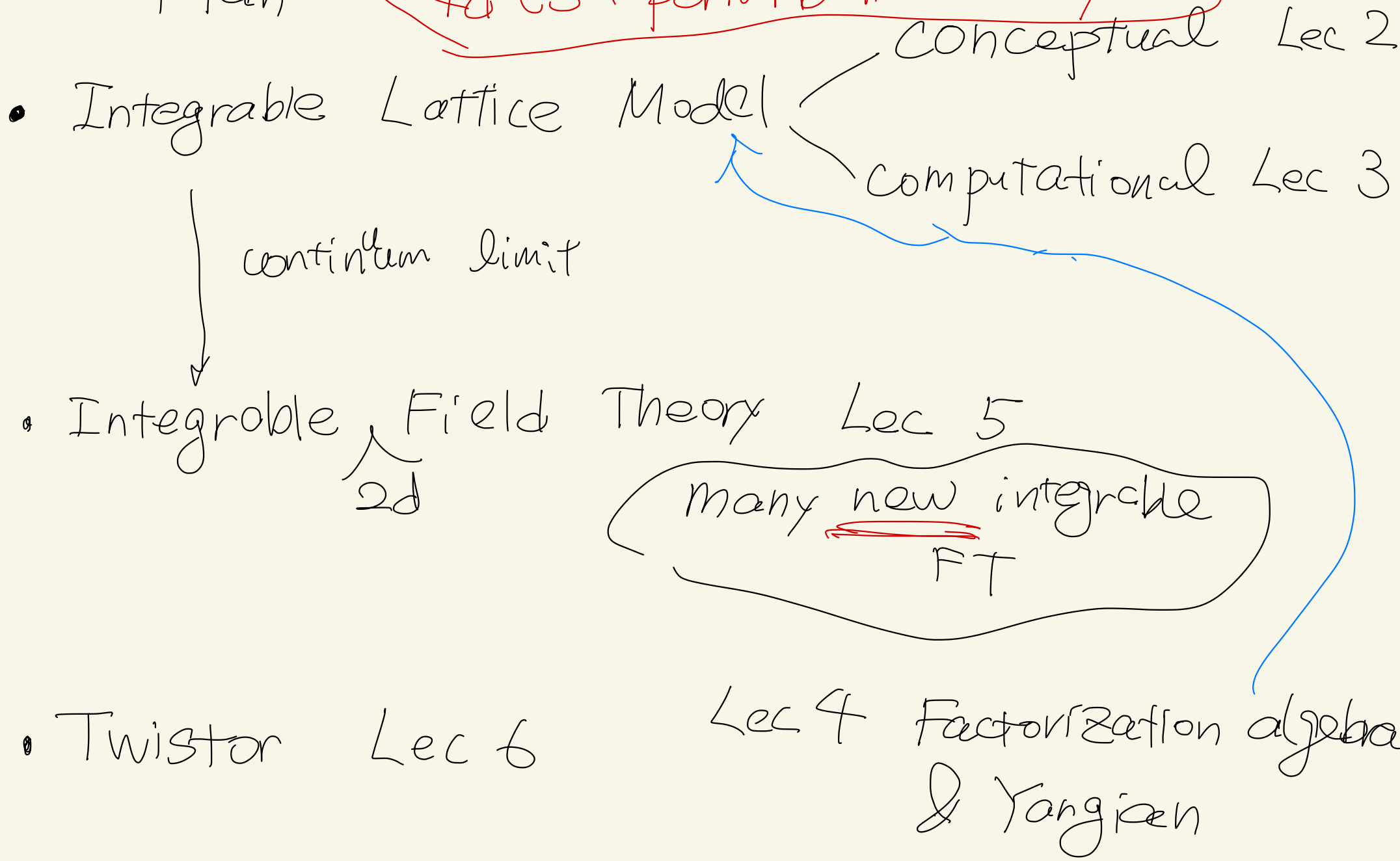
Lec 3

2021 / Jul / 6

Masahito Yamazaki

Plan

4d CS : perturbation theory



3d CS $g = \exp\left(\frac{2\pi i}{N\hbar R}\right)$

$$S = \frac{L}{2\pi\hbar} \int_M \text{Tr}(A \wedge A + \frac{2}{3} A^3)$$

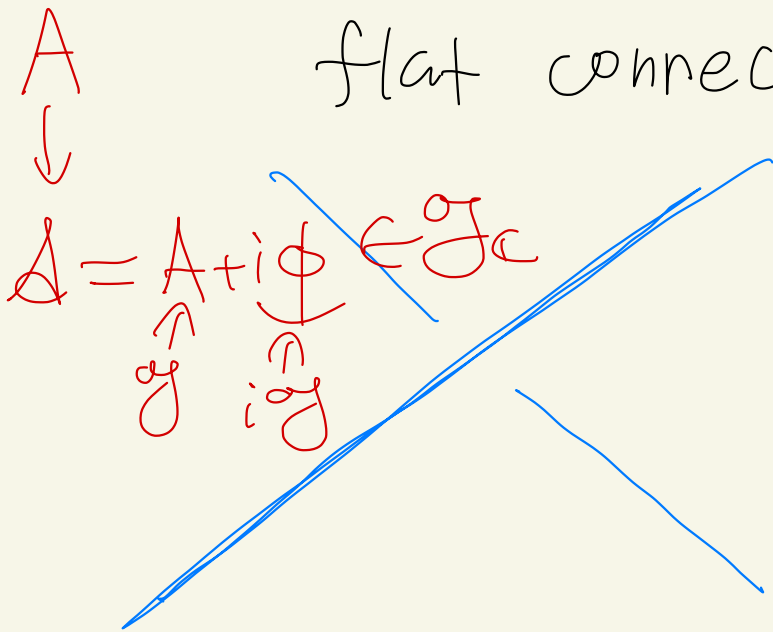
topological

$[k]$: dimensionless

e.o.m.

$$F_{x_1 x_2} = F_{x_2 x_3} = F_{x_3 x_1} = 0$$

flat connection



4d CS

$$S = \frac{L}{2\pi\hbar} \int_{\Sigma \times \mathbb{C}_z} d\bar{z} \wedge \text{Tr}(A \wedge A + \frac{2}{3} A^3)$$

hol.

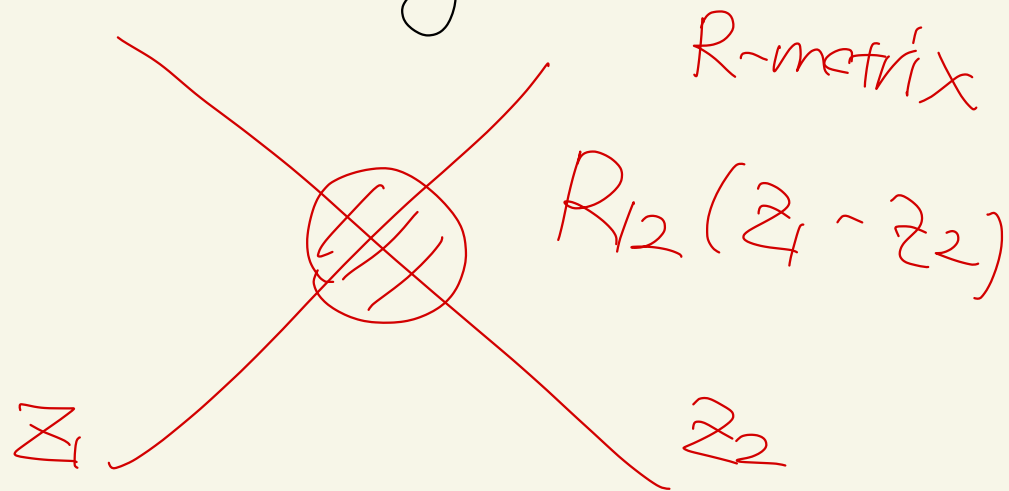
complex action $G \rightarrow GA$
top.

$[k]$: dim. of length

e.o.m. $F_{xy} = F_{x\bar{z}} = F_{y\bar{z}} = 0$

flat along Σ

hol. along C'



3d CS G

$$W_\gamma^R = \text{Tr}_R \left[P \exp \int_\gamma A \right] \rightarrow \int_\gamma A$$

Wilson line

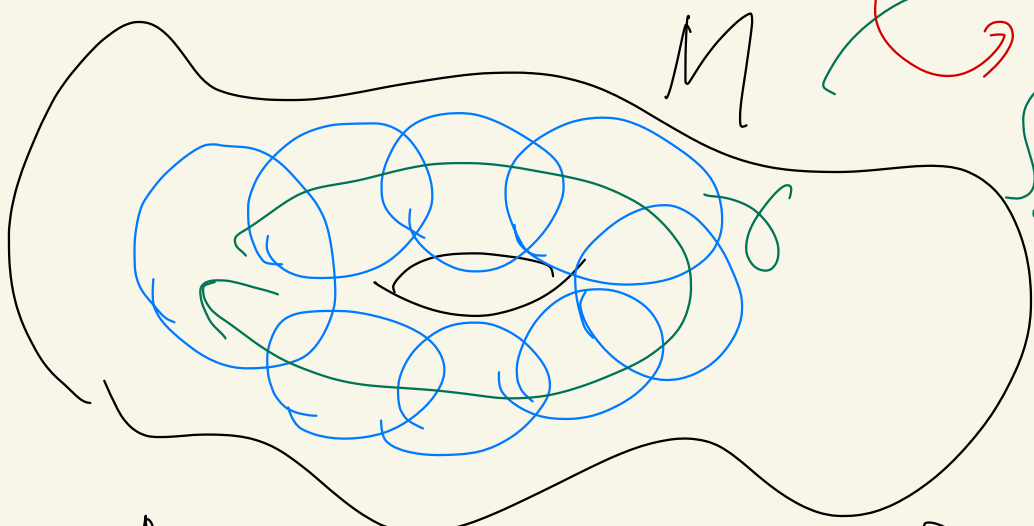
$$\int_M (F \wedge A + A \wedge A)$$

\uparrow R: G-rep.

(M, γ)

classical $F=0 \rightarrow$ local path $A=0$ (up to gauge transf.)
 $dA + A \wedge A$

$$\int_D F \neq 0$$
$$F + \mathcal{G} = 0$$



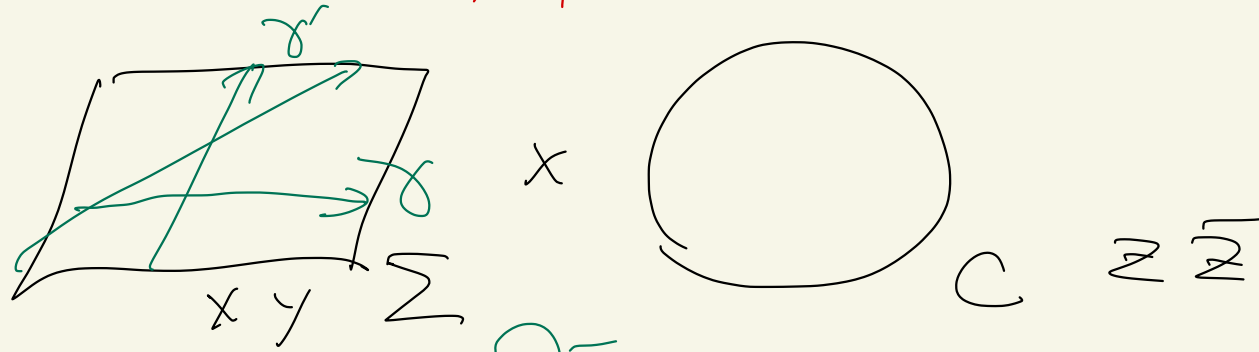
$\int_{S^1} A \therefore$ knot inv.

$(G, R)_{\hbar \rightarrow 0}$

M_γ : monodromy along γ

4d CS $A = A_x dx + A_y dy + A_{\bar{z}} d\bar{z}$

$\Sigma \times \mathbb{C}$
 $x, y, \bar{z}, \mathbb{R}$



"Wilson line"

$$W_{\gamma_x}^R = \text{Tr}_R \left(\exp \int_{\gamma_x} d\bar{z} A_x \right)$$

The integral is over a path γ_x in the x direction. The gauge field component $A_{\bar{z}}$ is circled in red.

Wilson line

$(G, \mathbb{R}) \rightarrow U(\mathfrak{g}[\bar{z}])$

$\partial_{\bar{z}}$ - derivative ok \odot γ only along x, y

$$W_{\gamma_x}^{\hat{R}} = \text{Tr} \left(\exp \int_{\gamma_x} d\bar{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_{\bar{z}}^n A_x(x, y, \bar{z}, \bar{z}_0) \right)$$

The derivative $\partial_{\bar{z}}$ and the term $(\bar{z} - \bar{z}_0)^n$ are circled in blue. A red line is drawn through the right side of the equation.

\hat{R} : Rep of $U(\mathfrak{g}[\bar{z}])$

$\bar{z} = \bar{z}_0$

Lie alg $[t_a, t_b] = i \sum_c f_{ab}^c t_c$, $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})$

∞ -dim.

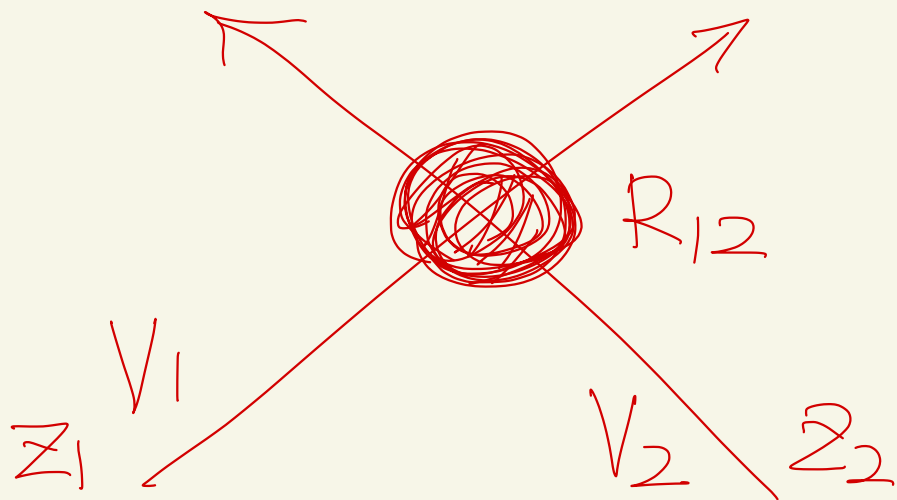
$\mathfrak{g}[[z]]$ $[t_a^n, t_b^m] = i \sum_c f_{ab}^c t_c^{n+m}$

$t_a^n = t_a z^n$ ($n=0, 1, 2, \dots$ level)

eg. of Rep $\mathfrak{g}[[z]]$.
non-evil repr.

$t_a^0 = \begin{pmatrix} t_a & 0 \\ 0 & t_a \end{pmatrix}$, $t_a^1 = \begin{pmatrix} 0 & t_a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $t_a^{n \geq 2} = 0$

$(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{h} - \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g}) - [g, h]$
 $\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g}$



$V_i : U(\mathfrak{g}[[z]]) - \text{Rep.}$

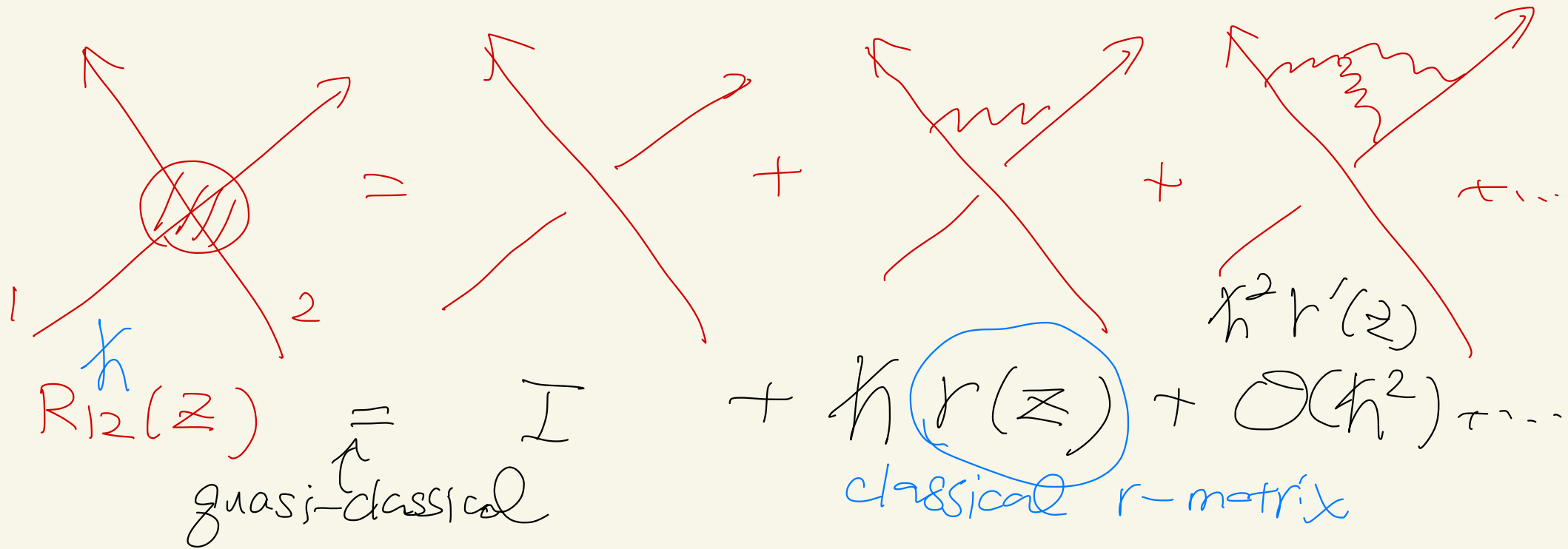
$R_{12} : V_1 \otimes V_2$

$\rightarrow V_2 \otimes V_1$

$$\sum_a t_a \overline{z}^n \partial_{\overline{z}}^n A_a$$

$t_{a,n}$ ↑

Feynman diagram



YBE at $O(\hbar^2)$ $[r_{12}, r_{13} + r_{23}] + [r_{23}, r_{13} + r_{12}] = 0$

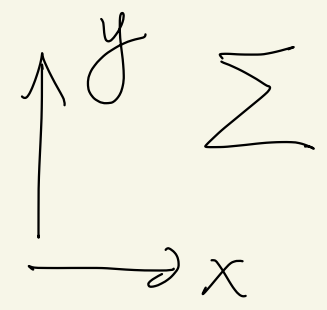
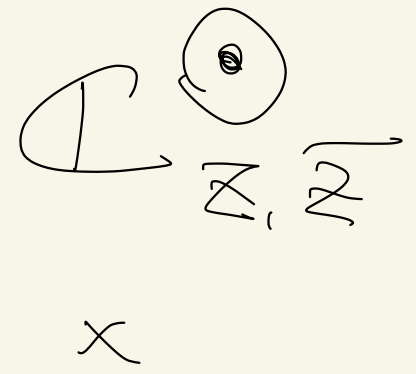
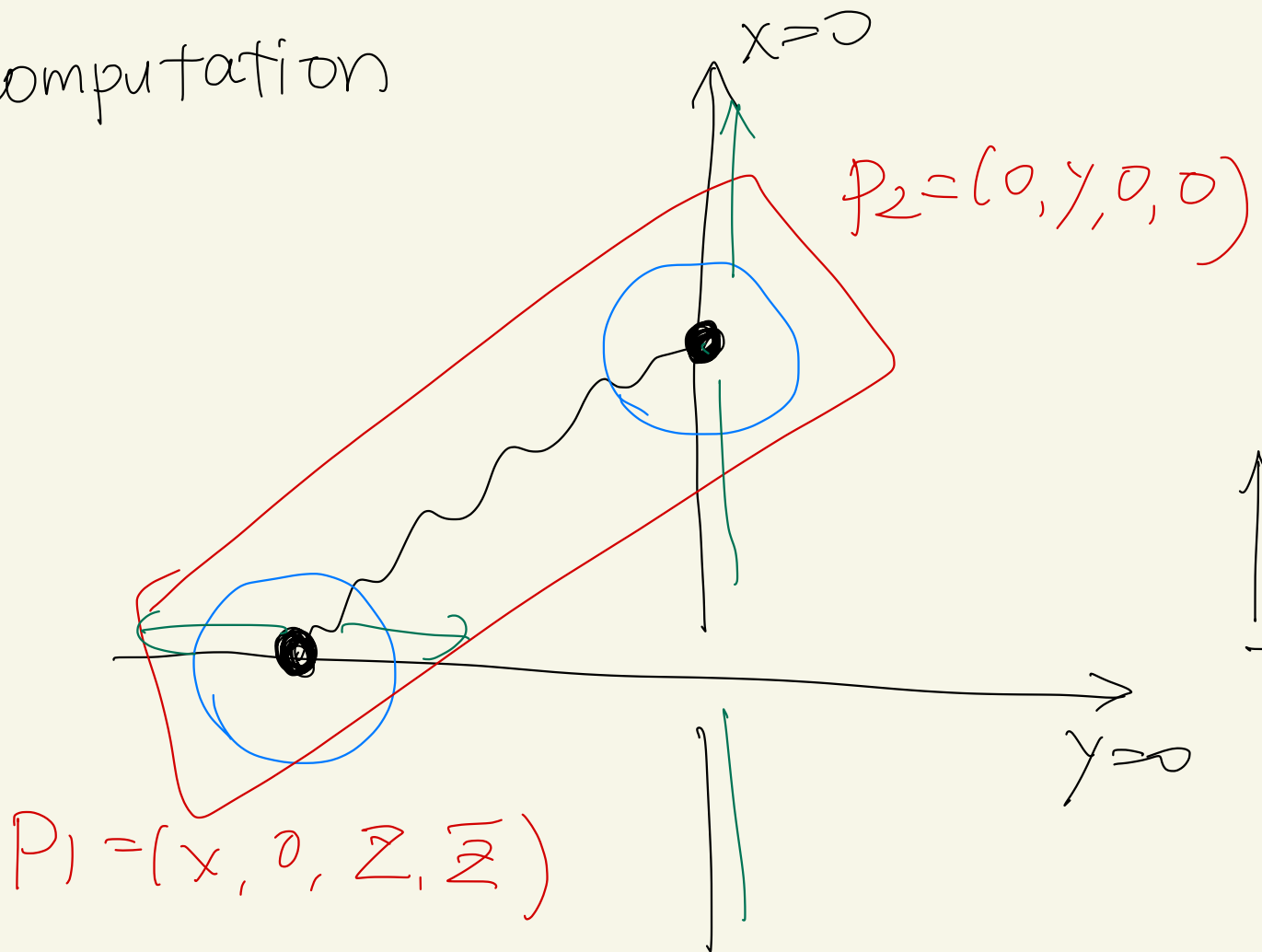
$r_{ij} = r_{ij}(z_i \sim z_j)$

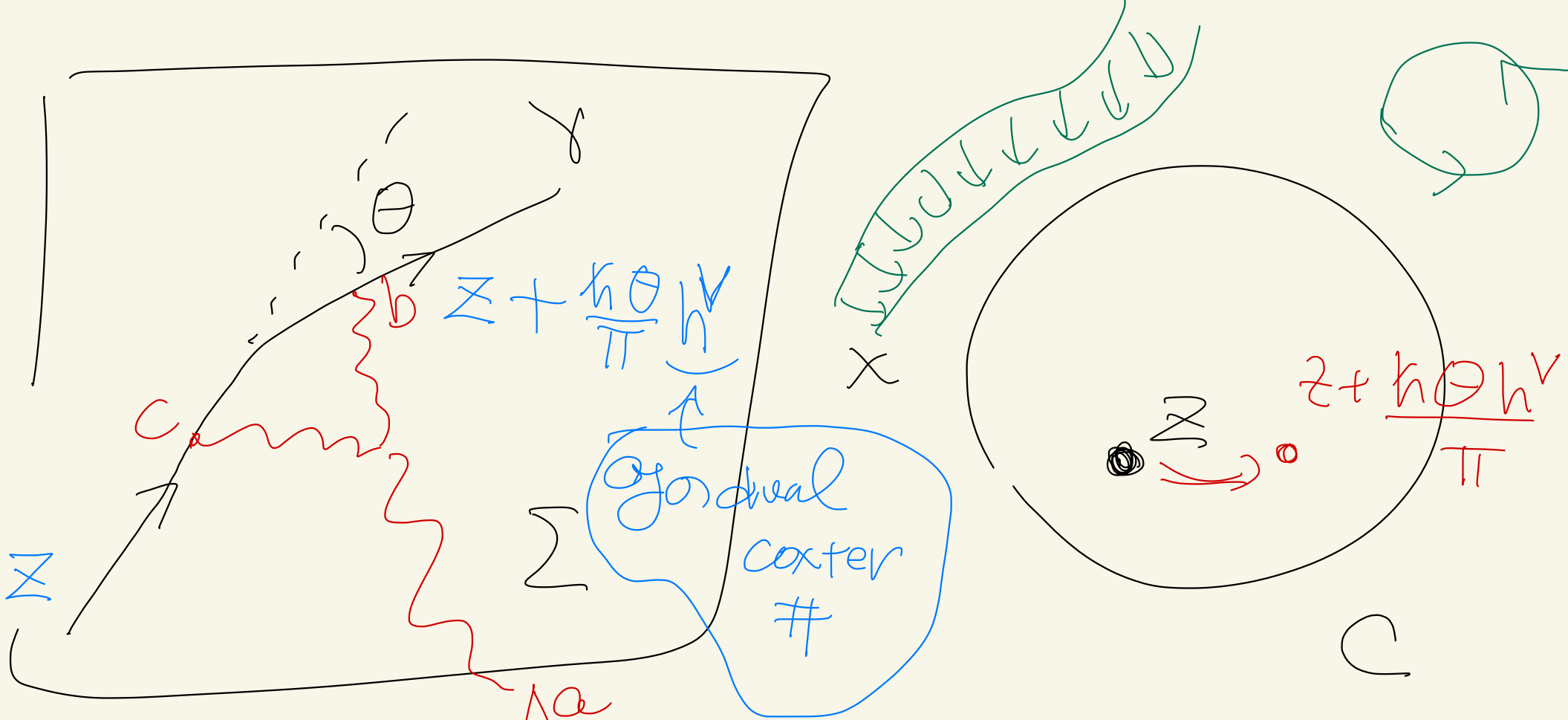
$\left\{ \begin{array}{l} r(z) \text{ determined} \\ R_h = I + h r(z) + \dots \end{array} \right.$

R_h : determined
 "uniquely"
 all order in h

R_h : YBE

$r(z)$: computation



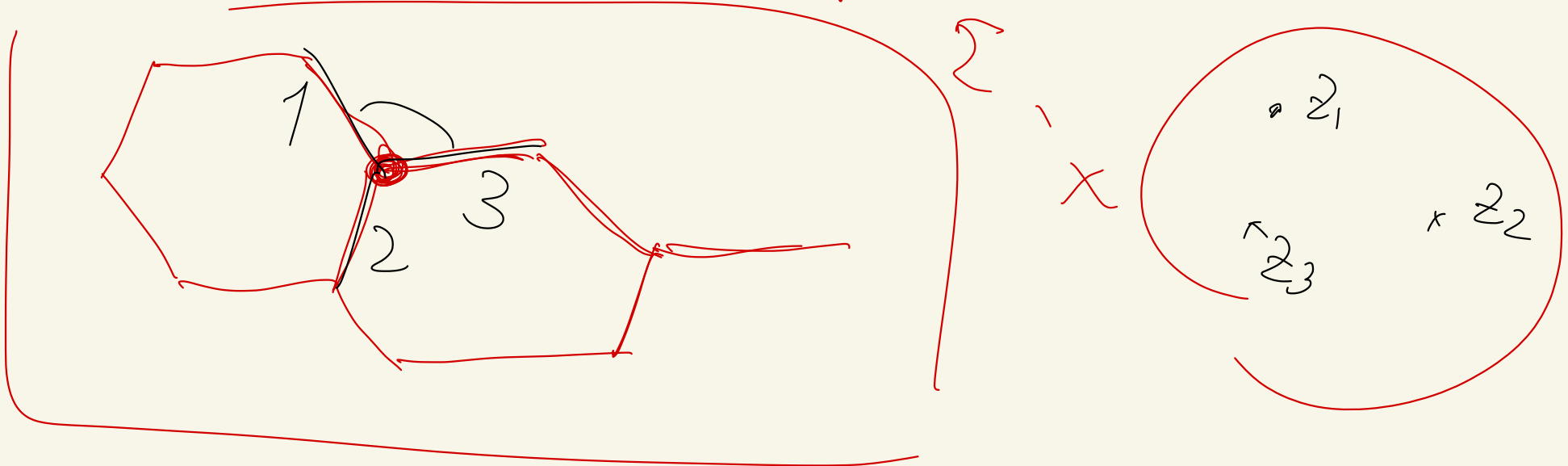
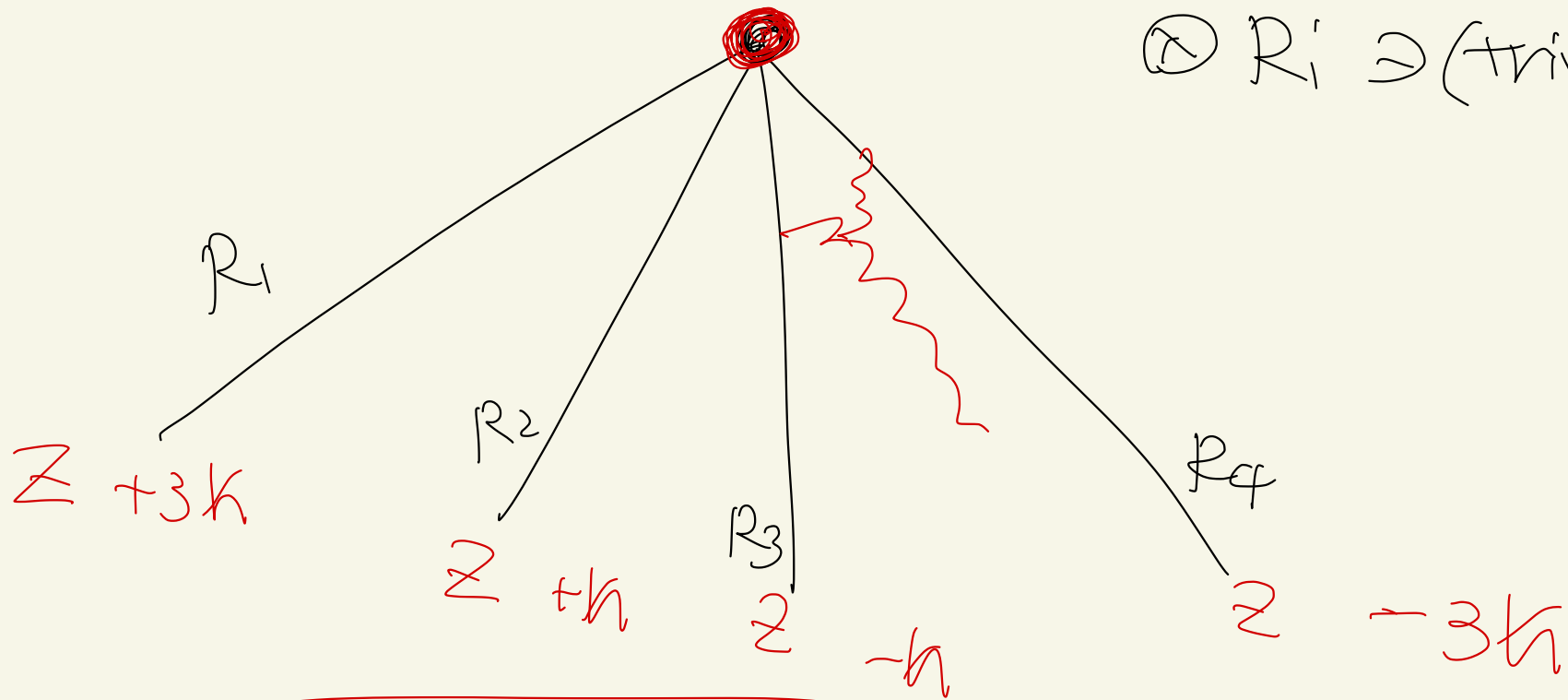


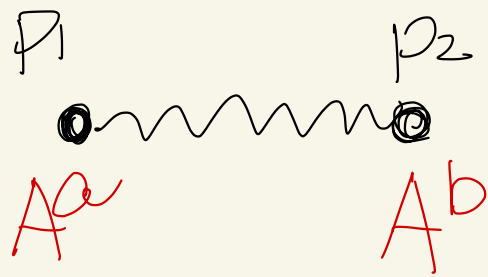
$A^a \rightarrow A^a + dC^a$

inv. tensor

R of \mathcal{G}

$\bigoplus R_i \ni (\text{triv})$





propagator 2-form

$$P(p_1, p_2) \delta^{ab}$$

$$\frac{\sqrt{F}}{2\pi} dz \wedge dP(p_1, p_2) = \delta_{p_1 = p_2}$$

$$iS = \frac{i}{2\pi\kappa} \int dz \wedge A^a dA^a + \dots$$

R

