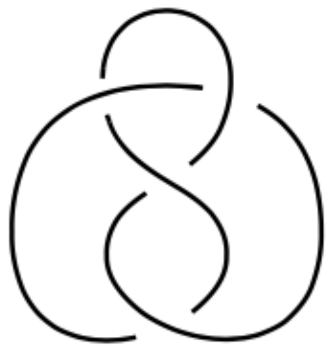
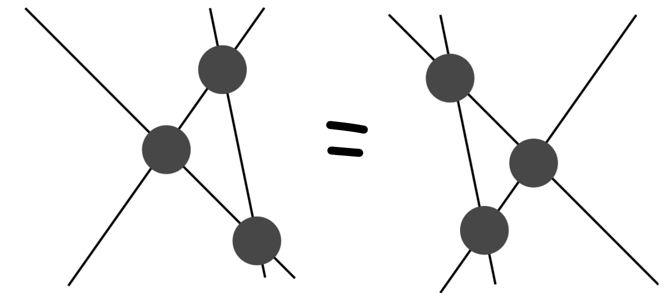




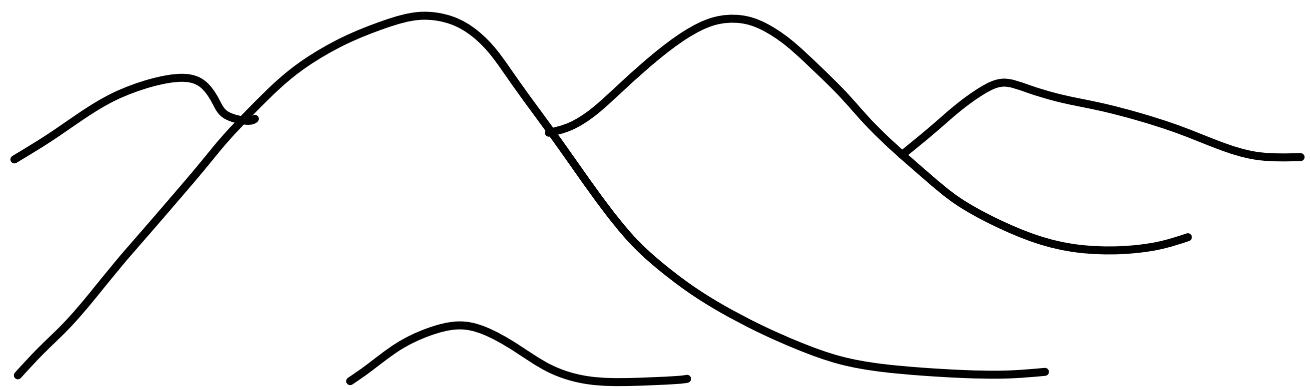
量子場の理論の数理

山崎雅人

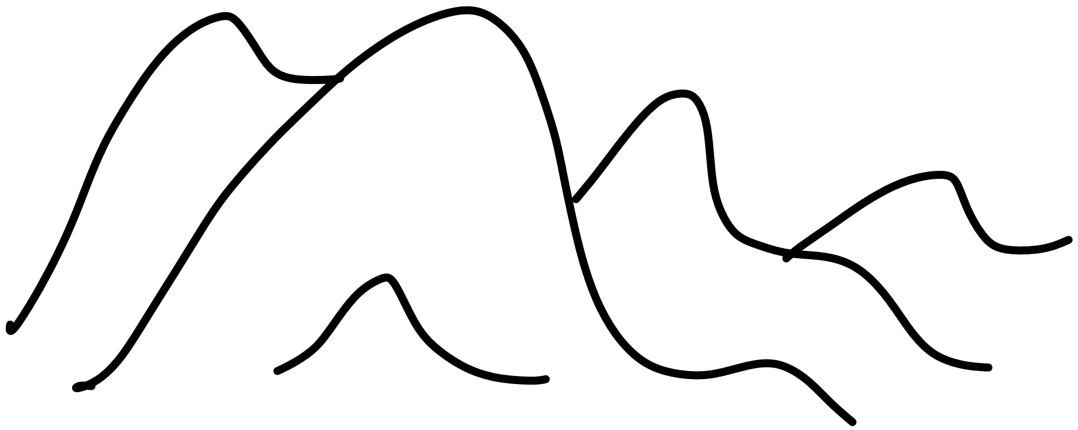
(東大IPMU/東大数理)

東大理物談話会，2022年2月4日

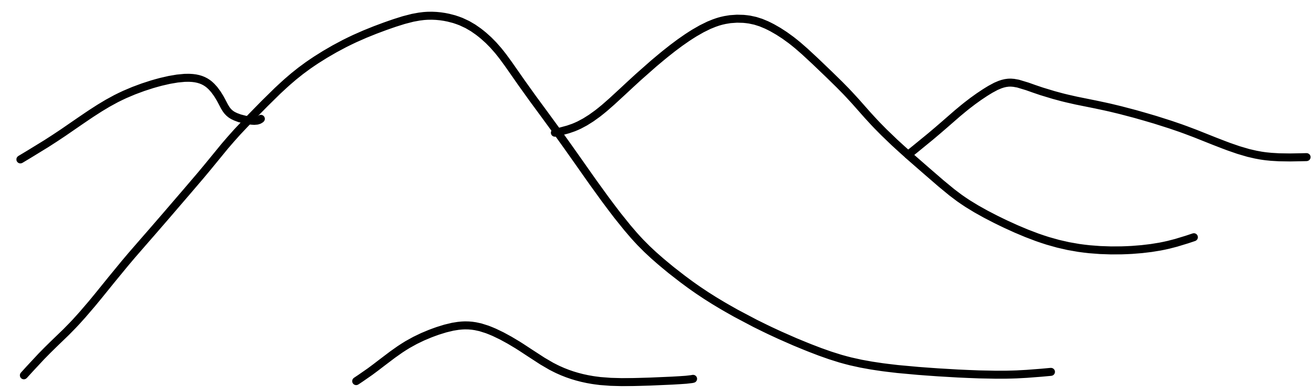
物理学

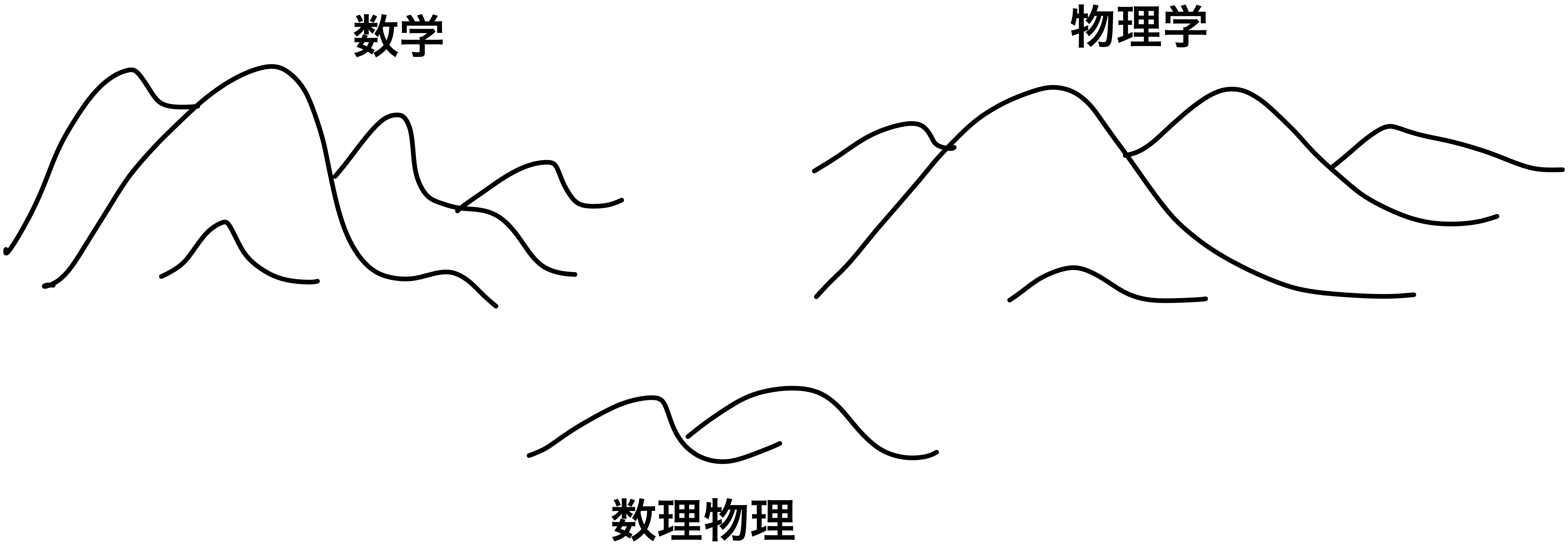


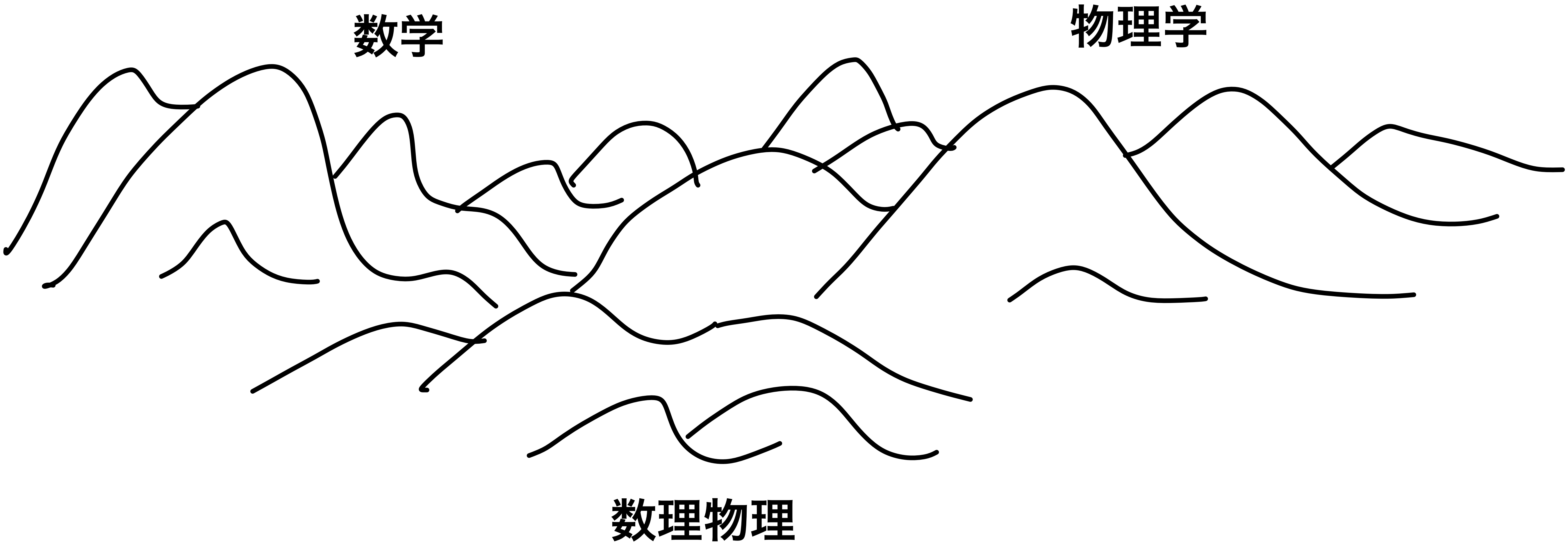
数学



物理学




数学
物理学
数理物理



問題意識も研究手法も文化も異なる…だけれども
不思議にお互いに必要としあっている

Reprinted from *Communications in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13, No. I (February 1960). New York: John Wiley & Sons, Inc. Copyright © 1960 by John Wiley & Sons, Inc.

THE UNREASONABLE EFFECTIVENSS OF MATHEMATICS IN THE NATURAL SCIENCES

Eugene Wigner

Wigner 1960

Let me end on a more cheerful note. The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future

Reprinted from *Communications in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 13, No. I (February 1960). New York: John Wiley & Sons, Inc. Copyright © 1960 by John Wiley & Sons, Inc.

THE UNREASONABLE EFFECTIVENSS OF MATHEMATICS IN THE NATURAL SCIENCES

Eugene Wigner

Wigner 1960

Let me end on a more cheerful note. The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future

今日の話：

“Unreasonable effectiveness of Physics in Mathematics”

cf. Atiyah-Dijkgraaf-Hitchin 2010

情報が溢れている現在だからこそ,
基本的な文献にじっくりと取り組むと得ることが多い

お手本にしたくなるような,
場の量子論の数理の「古典」は？

量子場の理論（チャーン＝サイモンズ理論）による
結び目不変量の導出

Quantum Field Theory and the Jones Polynomial *

Edward Witten **

School of Natural Sciences, Institute for Advanced Study, Olden Lane, Princeton, NJ 08540, USA

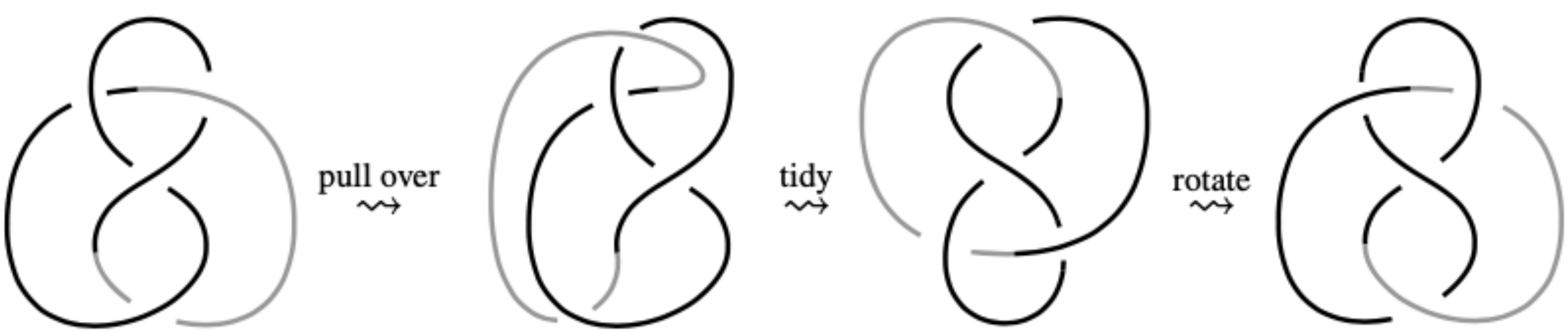
Abstract. It is shown that 2 + 1 dimensional quantum Yang-Mills theory, with an action consisting purely of the Chern-Simons term, is exactly soluble and gives a natural framework for understanding the Jones polynomial of knot theory in three dimensional terms. In this version, the Jones polynomial can be generalized from S^3 to arbitrary three manifolds, giving invariants of three manifolds that are computable from a surgery presentation. These results shed a surprising new light on conformal field theory in 1 + 1 dimensions.

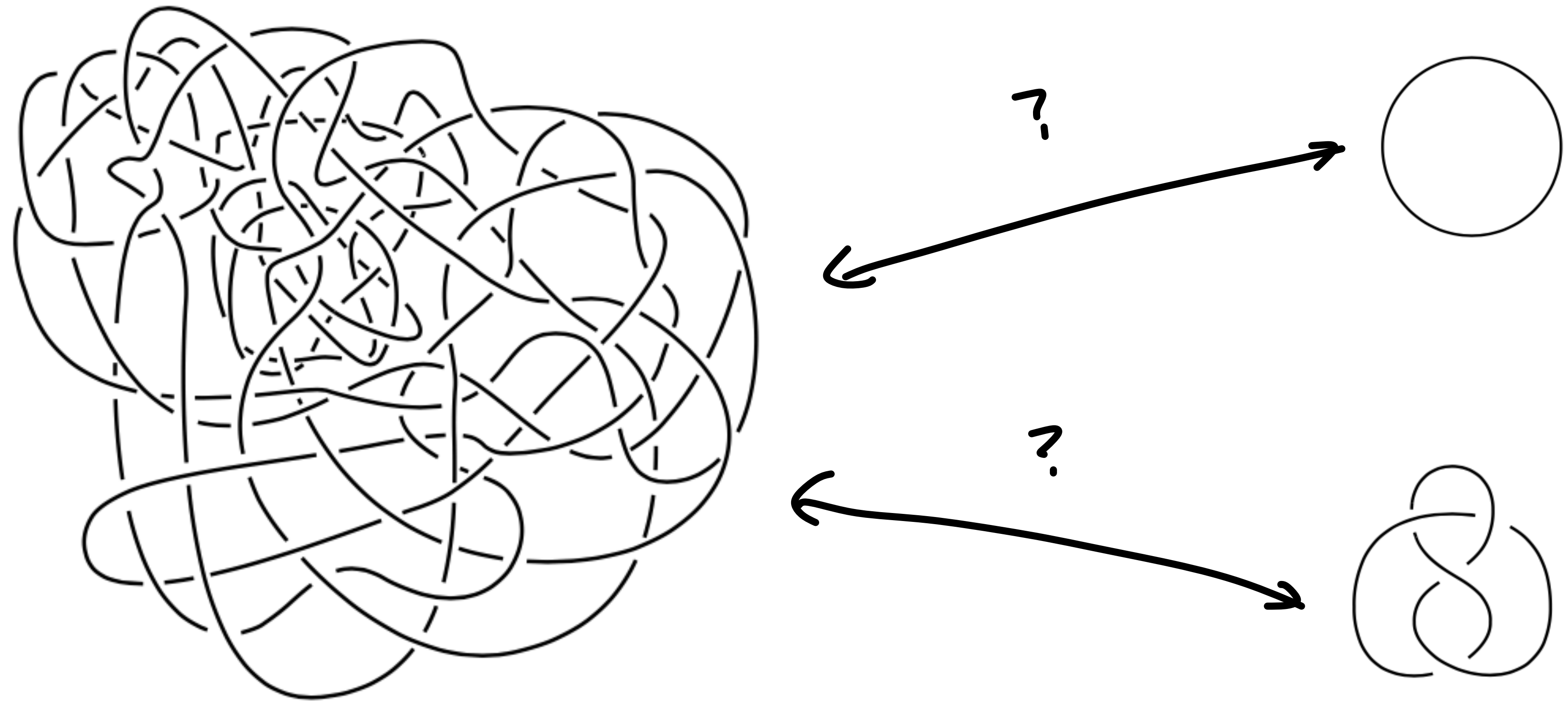
Witten 1989
（フィールズ賞）

現在では数学のみならず物理・自然科学の諸分野に応用
（例：物性におけるトポロジカルな相,
量子コンピューター, DNA・高分子, …)

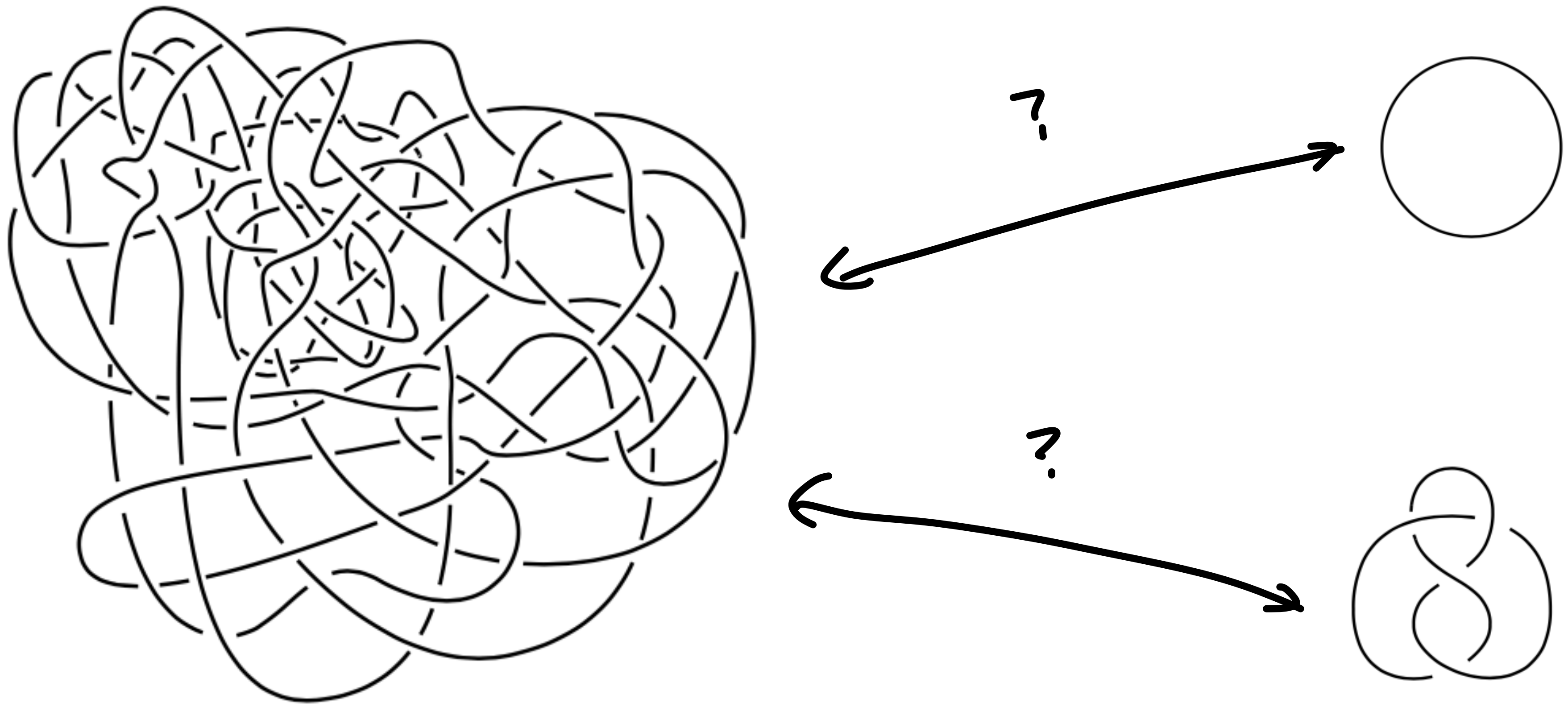
数学的な問題：結び目を（連続変形を除いて）区別できるか？

紙の上への射影は見かけが違っても同じことがある
（ほぐしたり，引っ張ったりする）





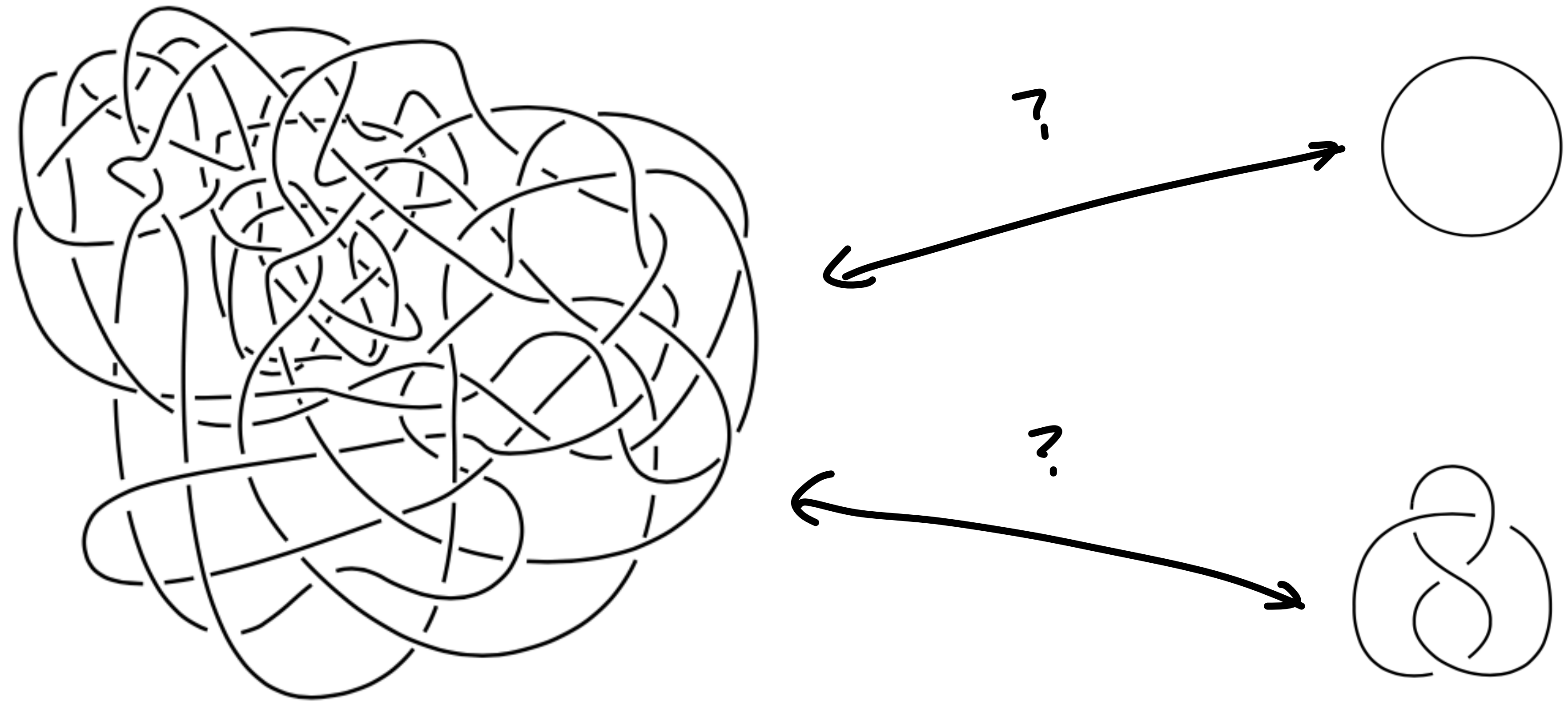
Haken’s Gordian knot



Haken's Gordian knot

結び目不変量：結び目の連続変形で変わらない量

（トポロジカルな量，位相不変量）　$K_1 \sim K_2 \Rightarrow Z(K_1) = Z(K_2)$



Haken's Gordian knot

結び目不変量：結び目の連続変形で変わらない量

（**トポロジカルな量，位相不変量**） $K_1 \sim K_2 \Rightarrow Z(K_1) = Z(K_2)$

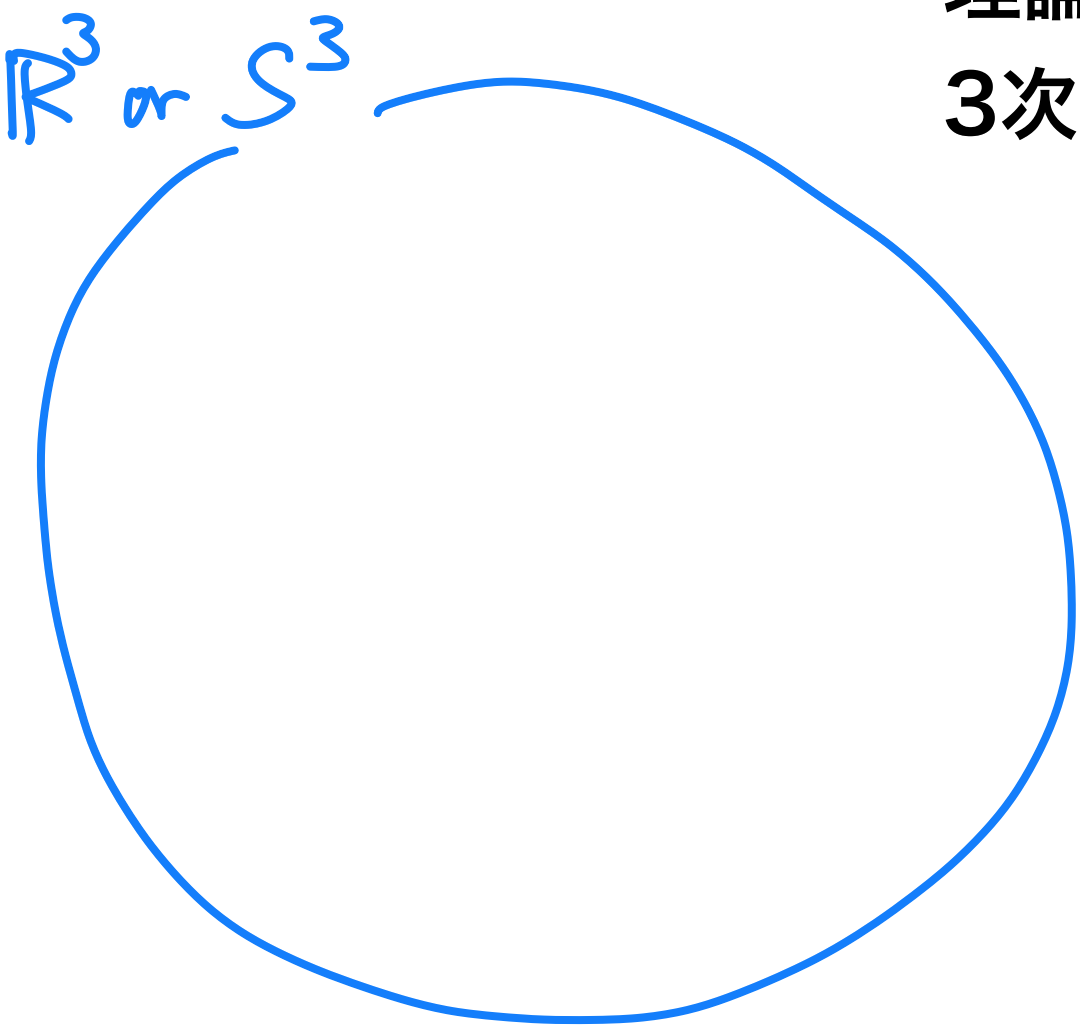
結び目の区別に使える $Z(K_1) \neq Z(K_2) \Rightarrow K_1 \not\sim K_2$

結び目を取った残りの空間（三次元多様体）の不変量でもある

結び目をもっと物理的に解釈できないか？

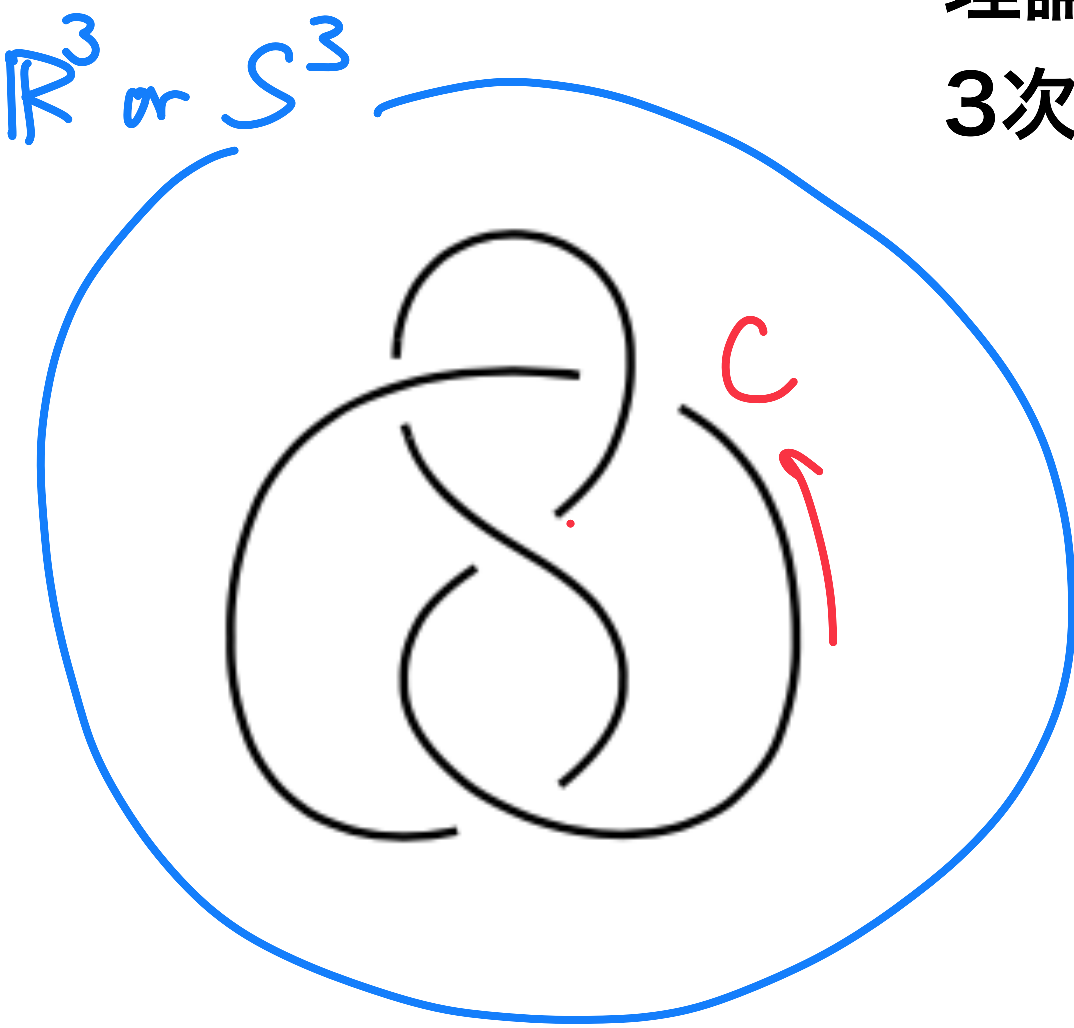
トポロジカルな不変量が欲しいので，**トポロジカルな理論**を３次元で考えたい.

理論そのものは
3次元空間に住んでいる



結び目をもっと物理的に解釈できないか？

トポロジカルな不変量が欲しいので，トポロジカルな理論を３次元で考えたい.



理論そのものは
3次元空間に住んでいる

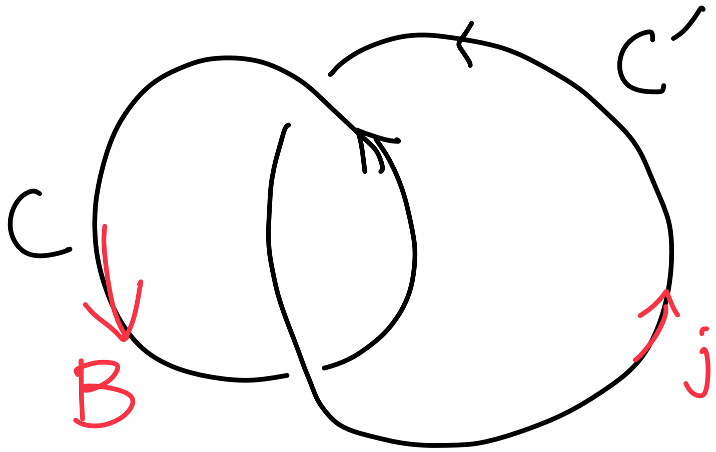
1次元的な線に沿って
ベクトル量の場を積分して
物理量を得る

$$O_C = \oint_C \text{“何か”}$$

射影を考える必要はないので，自動的にトポロジカルな不変量が得られる

電磁気学と絡み数
(linking number)

Gauss 1833

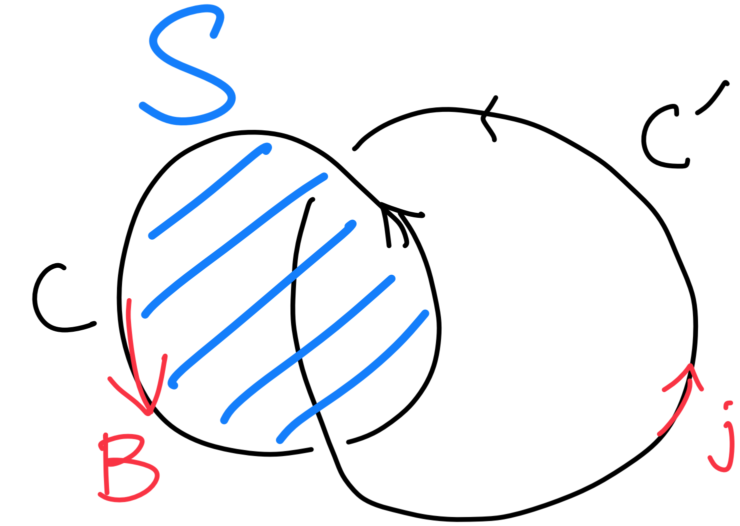


磁場

電流

電磁気学と絡み数
(linking number)

Gauss 1833



磁場

電流

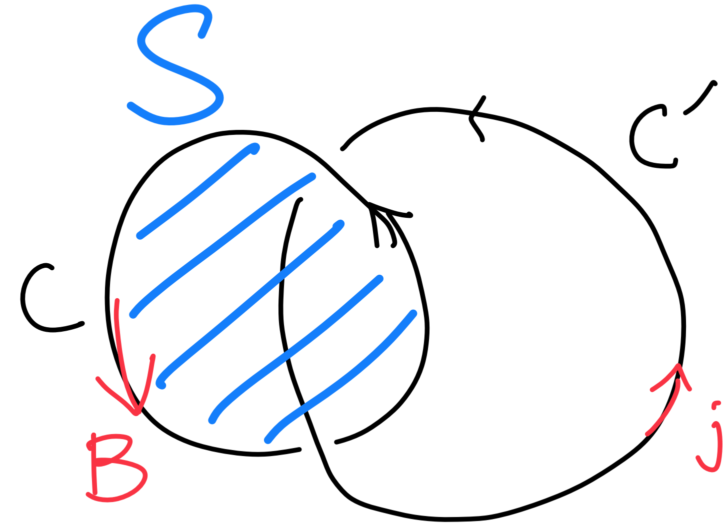
ストークスの定理

アンペールの法則

$$\oint_C B \xrightarrow[\partial S = C]{\text{ストークスの定理}} \int_S (\nabla \times B) \overset{\text{アンペールの法則}}{=} \mu_0 \int_S j = \mu_0 I$$

電磁気学と絡み数 (linking number)

Gauss 1833



磁場

電流

ストークスの定理

アンペールの法則

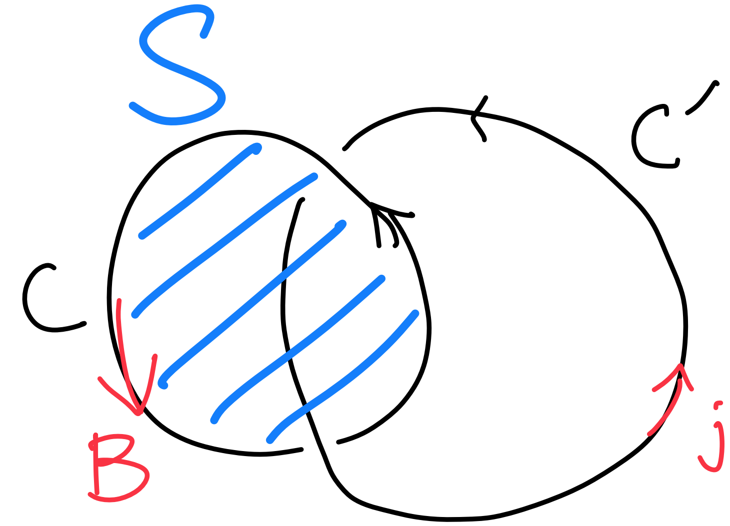
$$\oint_C B \xrightarrow[\partial S = C]{} \int_S (\nabla \times B) = \mu_0 \int_S j = \mu_0 I$$

ビオ・サバールの法則

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C dl \oint_{C'} dl' \frac{[(l - l') \times dl] \cdot dl'}{|l - l'|^3}$$

電磁気学と絡み数
(linking number)

Gauss 1833



磁場　　電流

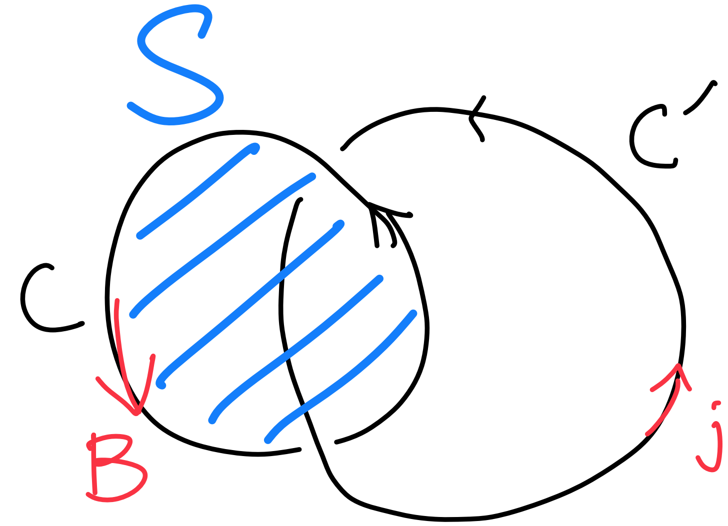
$$\oint_C B \xrightarrow[\partial S = C]{\text{ストークスの定理}} \int_S (\nabla \times B) \overset{\text{アンペールの法則}}{=} \mu_0 \int_S j = \mu_0 I$$

ビオ・サバールの法則

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C dl \oint_{C'} dl' \frac{[(l - l') \times dl] \cdot dl'}{|l - l'|^3}$$

電磁気学と絡み数
(linking number)

Gauss 1833



磁場 電流

アンペールの法則

ストークスの定理

$$\oint_C B \xrightarrow{\partial S = C} \int_S (\nabla \times B) = \mu_0 \int_S j = \mu_0 I$$

ビオ・サバールの法則

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\ell \oint_{C'} d\ell' \frac{[(\ell - \ell') \times d\ell] \cdot d\ell'}{|\ell - \ell'|^3}$$

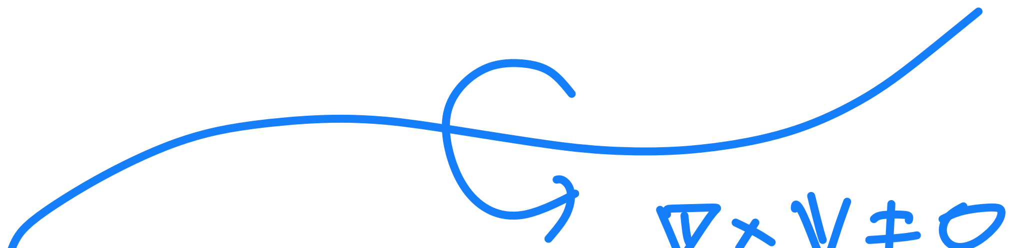
$$\|$$

絡み数 $lk(C_1, C_2) \in \mathbb{Z}$

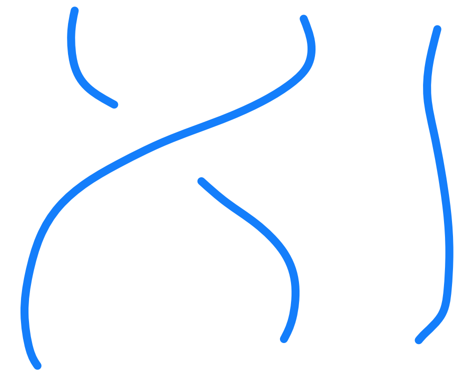
古典場の理論の数理！

ガウスの後，ヘルムホルツらによって渦糸が調べられた

Helmholtz 1858

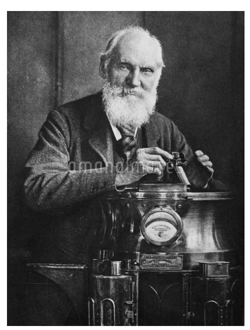


$\nabla \times V \neq 0$



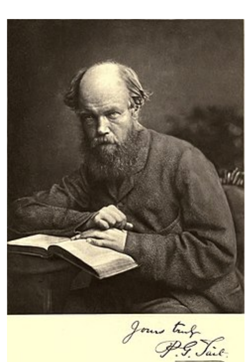
ケルヴィン卿はエーテル内の渦糸で原子を説明しようとした（トポロジカルなので安定？）

William Thomson (Lord Kelvin) 1869



これがテイトらによる結び目の数学の元々の動機

Tait 1876-77



特集／結び目的思考法のすすめ

場の理論と結び目

山崎　雅人

1. 結び目理論のおこり

本特集号の取りまとめ役である村上先生からは，「場の理論と結び目理論」についての記事を依頼された．**場の理論**とは（少なくとも完全には）まだ厳密な数学にはなっていない物理学の理論のことである．結び目理論の様々な側面を扱ってきた本特集号ではあるが，純粋数学としての結び目理論

当時の物理学においては光は波であるとの波動説が有力であったが，それならば光が伝搬するための媒質が必要となると考えられる．この媒質をエーテルと呼び，その流体としての性質が活発に研究されていた．

一方，当時の科学では既に 19 世紀初頭にドルトン（1766–1844）によって原子論が提唱されており，それ以上分解できない最小単位としての原

電磁気学

(空間3次元)

$$\theta_C = \oint_C \mathbb{B}$$

$$\mathbb{B} = (B_1, B_2, B_3)$$

$$\nabla \times \mathbb{B} = 0 \qquad (\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A})$$

電磁気学
(空間3次元)

$$\theta_C = \oint_C \mathbb{B}$$

$$\mathbb{B} = (B_1, B_2, B_3)$$

$$\nabla \times \mathbb{B} = 0 \qquad (\mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A})$$

チャーン=サイモンズ理論
(時空3次元)

$$\theta_C = \oint_C A$$

$$(A \to A + d\lambda)$$

$$A = (A_1, A_2, A_3)$$

$$\nabla \times A = 0 \qquad (dA = 0)$$

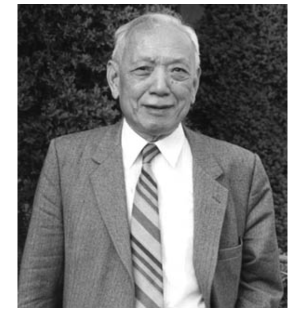
$$L = \int A \wedge dA$$

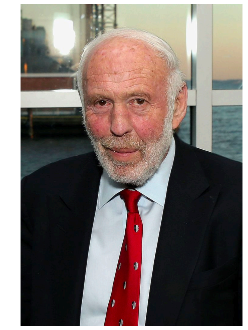
トポロジカルな不変量と
して絡み数が得られる。

$$lk(C_1, C_2) = \left\langle \left(\oint_{C_1} A \right) \left(\oint_{C_2} A \right) \right\rangle$$

非可換ゲージ群で考えるとさらに豊かな結び目不変量が得られる

非可換チャーン＝サイモンズ理論





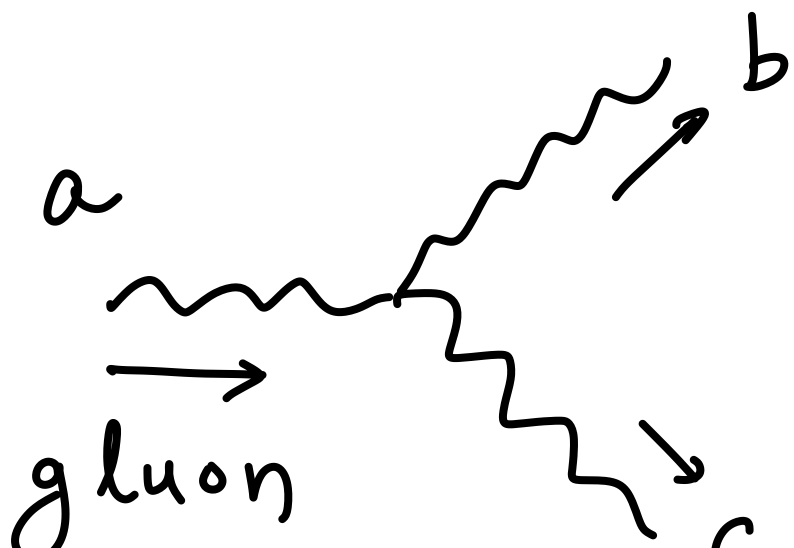
$$S = \int_M \mathrm{tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A\right)$$

$$A = \sum_a A^a t^a \in \mathfrak{g}$$

e.g. $SU(2)$, $SO(3)$

$$\left(A \to g^{-1} A g + g^{-1} dg\right)$$

$$F = dA + A \wedge A = 0$$



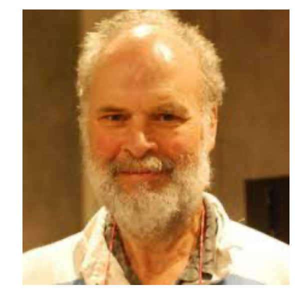
非可換ゲージ群で考えるとさらに豊かな結び目不変量が得られる

Witten

$$Z_C = \left\langle \mathrm{Tr}_R P\left(\exp \oint_C A\right)\right\rangle$$

ウィルソン・ライン

e.g. $G = SU(2)$ $R = \square$ Jones多項式



$G = SU(N)$ $R = \square$ HOMFLY-PT多項式

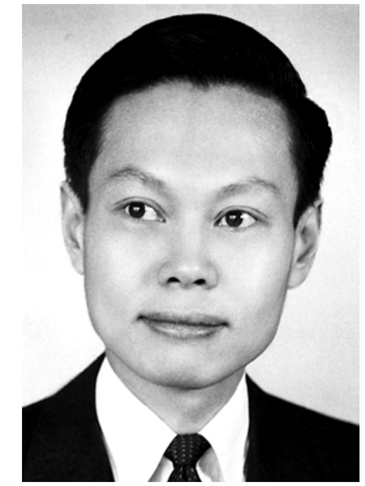
数学の不変量を構成するという問題が，物理量を計算する問題に翻訳された：数学を知らなくても，物理の問題を解けば良い

- 強力な量子不変量が得られる
- 位相不変性も定義から自動的

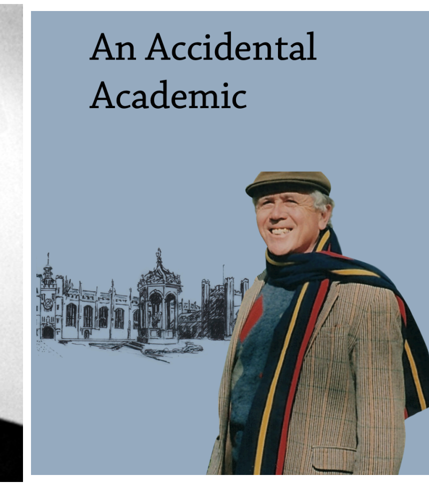
近年私の研究対象の一つ：

可積分系

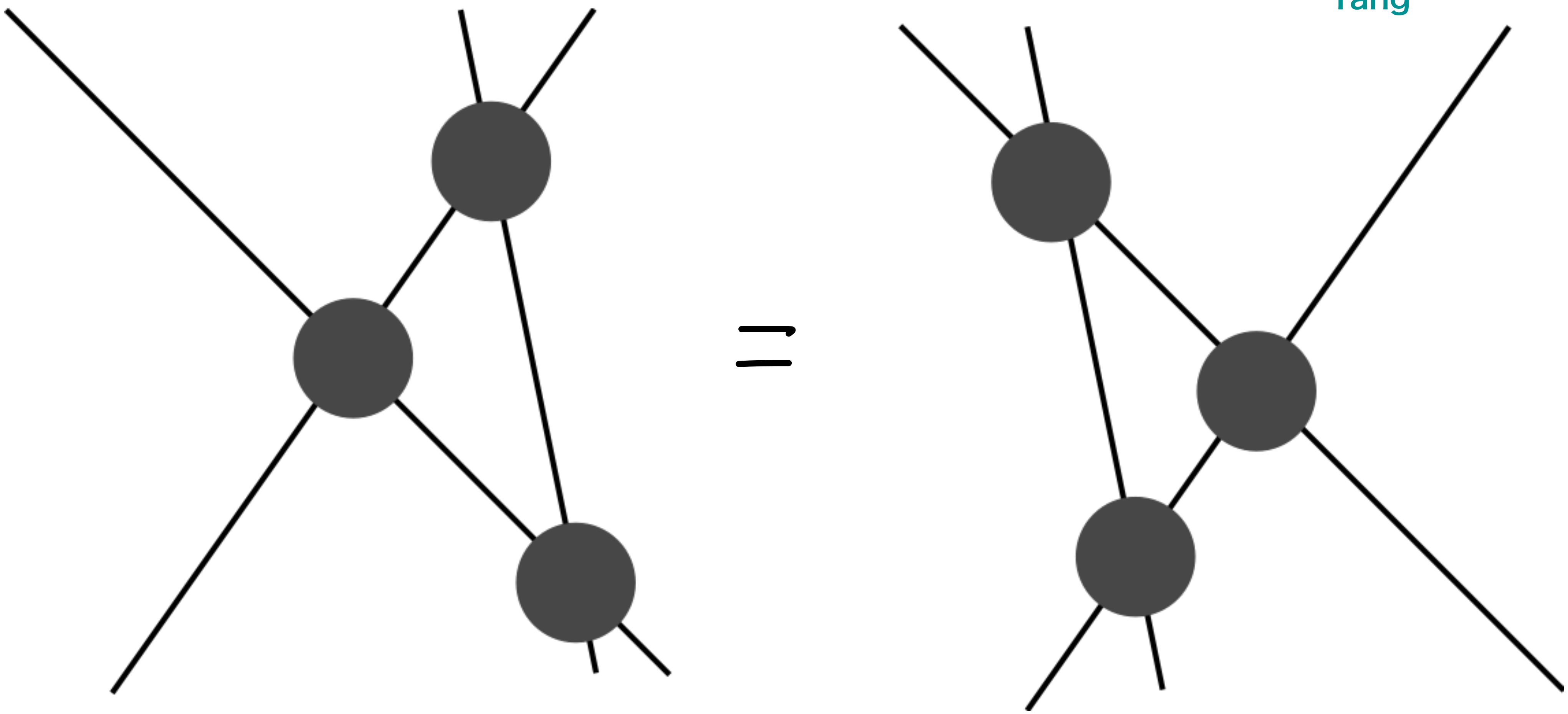
可積分性: ヤン・バクスター方程式



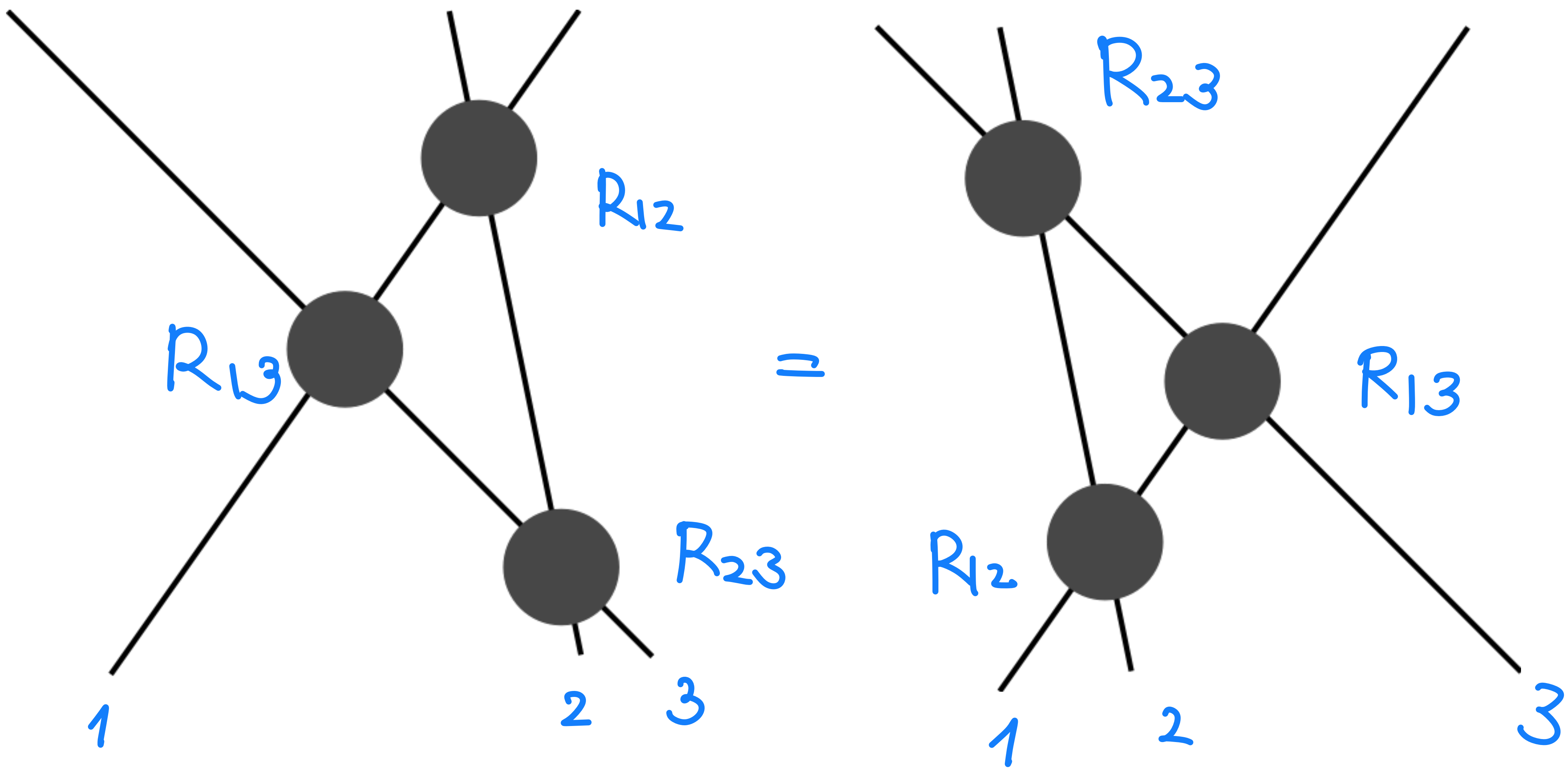
Yang



Baxter

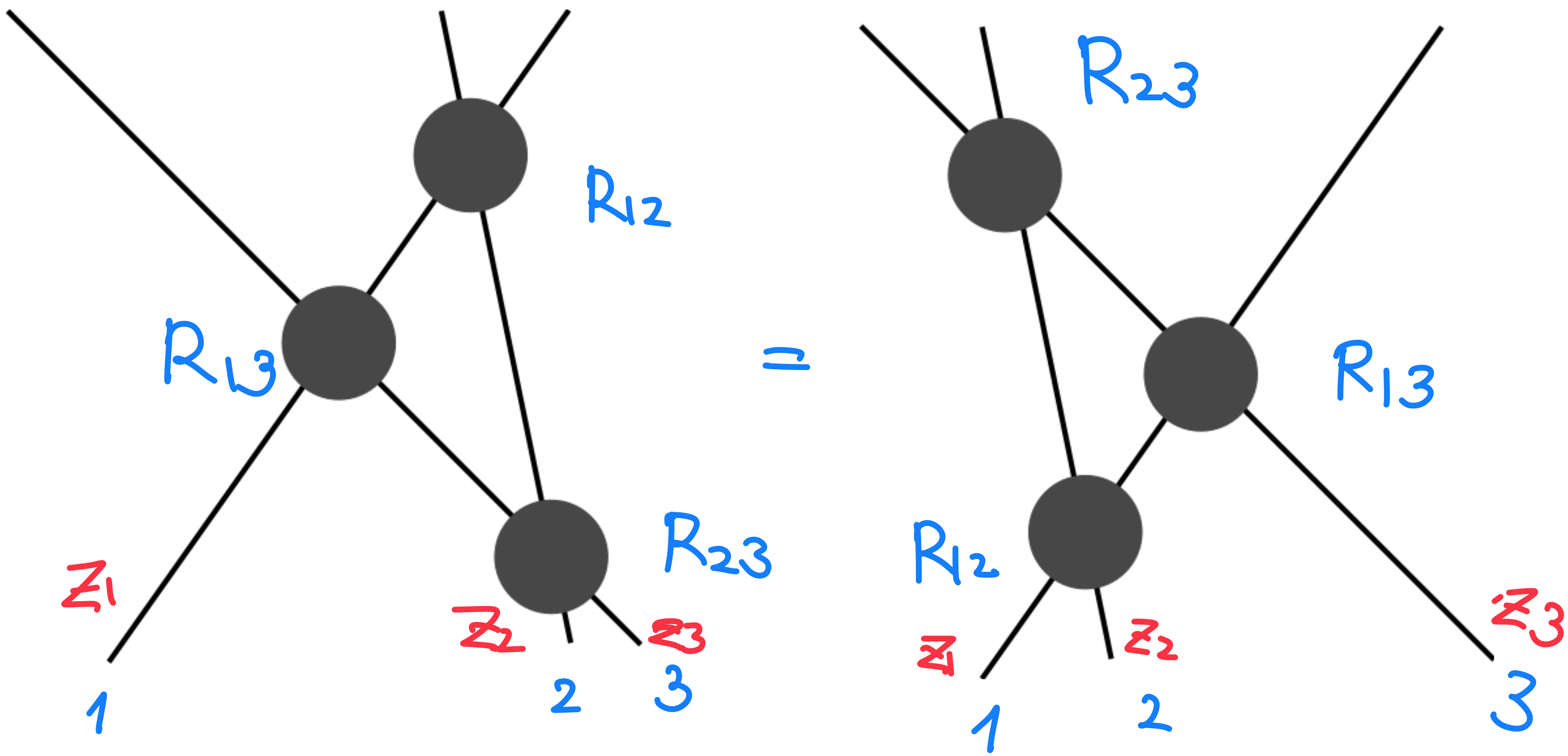


可積分性: ヤン・バクスター方程式



$$R_{12}\,R_{13}\,R_{23} = R_{23}\,R_{13}\,R_{12}$$

可積分性: ヤン・バクスター方程式

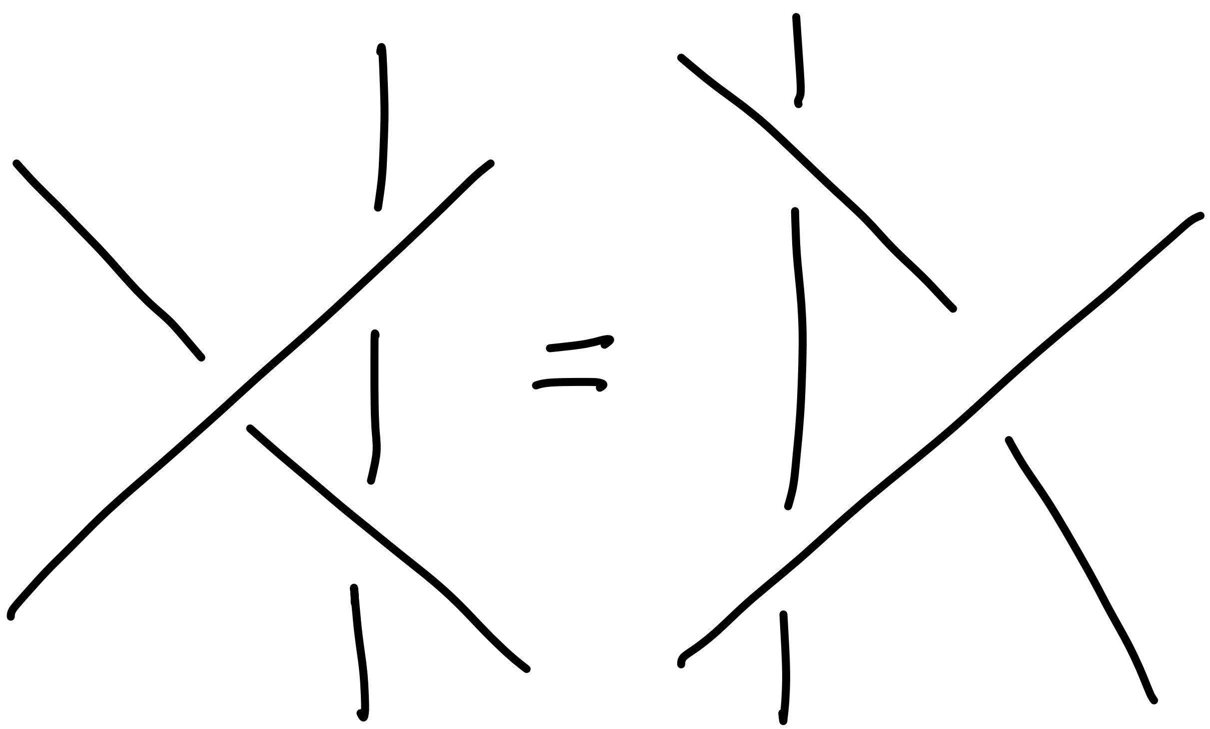


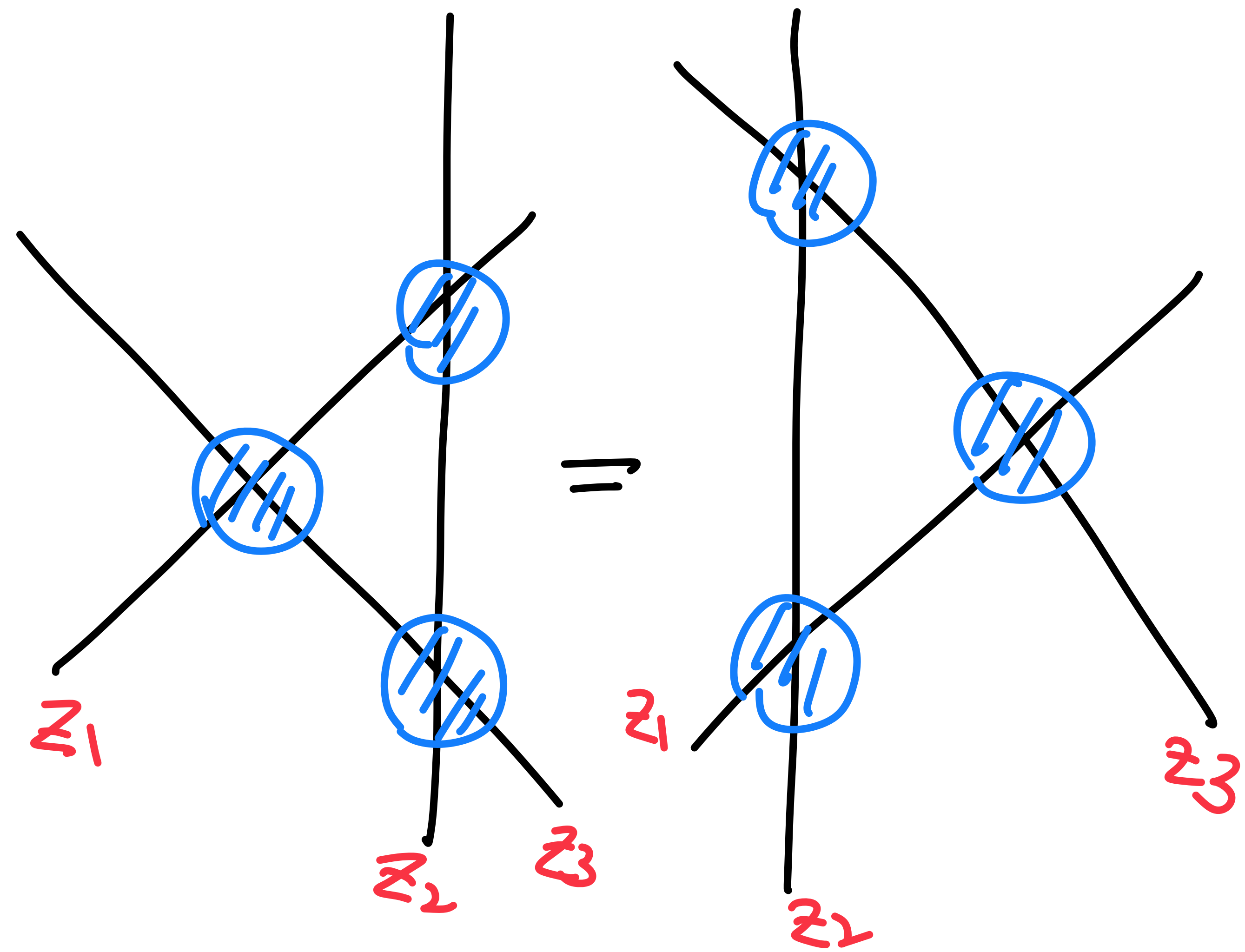
$$R_{12}\, R_{13}\, R_{23} = R_{23}\, R_{13}\, R_{12}$$

$$R_{ij} = R_{ij}(z_i - z_j)$$

z_i: スペクトル変数

結び目理論と可積分系の類似と相違





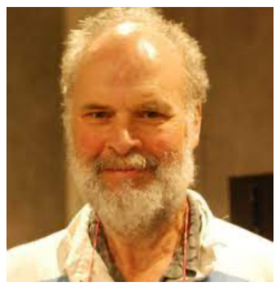
結び目理論

上下の区別あり

可積分系

スペクトル変数

そもそもJones理論の背景には可積分系があった



Jones 1989

PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 137, No. 2, 1989

ON KNOT INVARIANTS RELATED TO
SOME STATISTICAL MECHANICAL MODELS

V. F. R. JONES

Dedicated to the memory of Henry Dye

We use three different kinds of statistical mechanical models to construct link invariants. The vertex models emerge as the most general. Our treatment of them is essentially the same as Turaev's. Using the work of Goldschmidt we are able to define models whose invariants are homology invariants for branched covers. Thus the statistical mechanical framework embraces both the "classical" and the "new" link invariants.

Wadati

EXACTLY SOLVABLE MODELS AND KNOT THEORY

Akutsu Deguchi Wadati 1987-

Miki WADATI and Tetsuo DEGUCHI

Institute of Physics, College of Arts and Sciences, University of Tokyo, Komaba, Meguro-ku, Tokyo, Japan 153

and

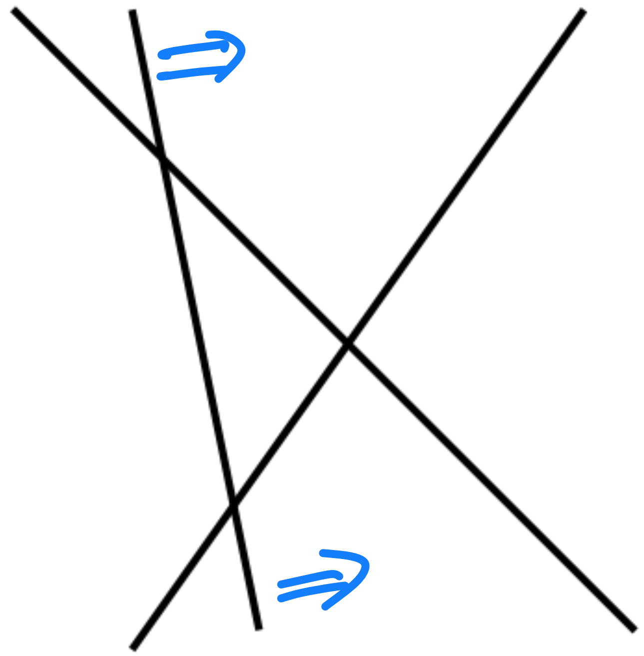
Yasuhiro AKUTSU

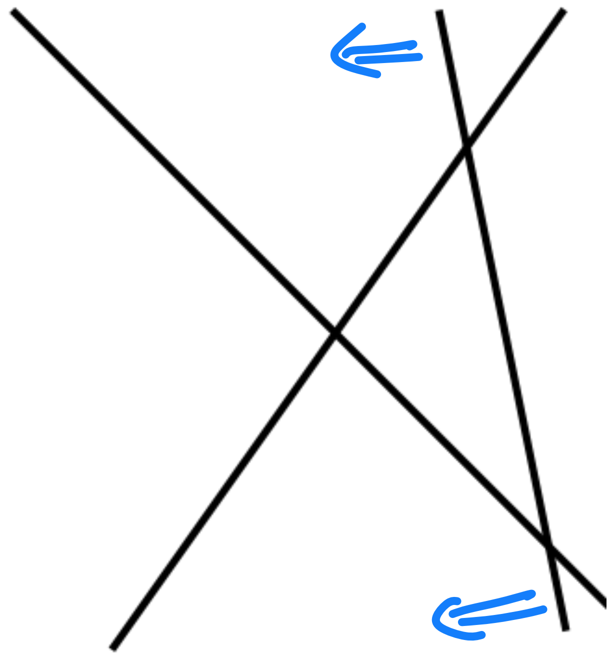
Institute of Physics, Kanagawa University, Rokkakubashi, Kanagawa-ku, Yokohama, Kanagawa, Japan 221

可積分系もチャーン=サイモンズ理論で説明？

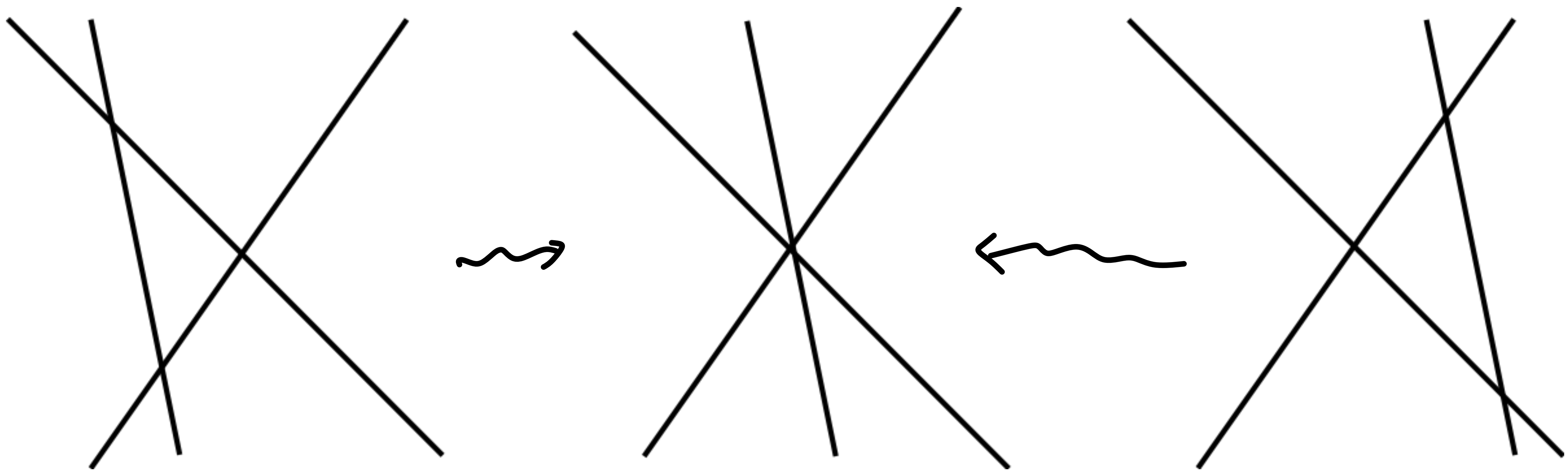
2匹目のドジョウ？

位相不変性からヤン・バクスター方程式が示せないか？





位相不変性からヤン・バクスター方程式が示せないか？



可積分系の時は二次元的なので
途中で特異点が生じるように見える

チャーン・サイモンズ理論にはスペクトル変数も見当たらない

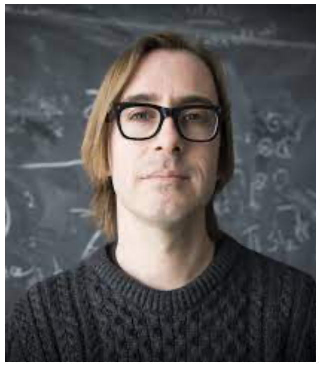
Witten 1989

There are several obvious areas for further investigation. In terms of statistical mechanics, one compelling question is to understand the origin of the spectral parameter (and the elliptic modulus) in IRF and vertex models; this is essential for explaining the origin of integrability. Another question, which may or may not be related, is to understand the spin models formulated only rather recently [24] in which the spectral parameter is not an abelian variable (as in previous construc-

Wittenは可積分系の説明には成功しなかった

その後20年ほどの間誰もこの問題に戻ってこなかった

2013年頃



Costello 2013

SUPERSYMMETRIC GAUGE THEORY AND THE YANGIAN

KEVIN COSTELLO

INTRODUCTION

In recent years, great progress has been made in performing exact calculations in the $N = 2$ and $N = 4$ supersymmetric gauge theories. Exact calculations can be made in the $N = 2$ theory by considering the topological twist and using the method of localization [Nek02]. Inspired by the AdS/CFT correspondence, an integrable structure has been discovered in the $N = 4$ gauge theory, leading to many exact calculations [ABMS11, AHBC$^+$10]. However, the $N = 1$ gauge theory has proved more difficult; it is not integrable, and does not admit a topological twist.

PU

Quivers, YBE and 3-manifolds

Masahito Yamazaki

Princeton Center for Theoretical Science,
Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA

MY 2012, 2013

New Integrable Models from the Gauge/YBE Correspondence

Masahito Yamazaki[♦,◇]

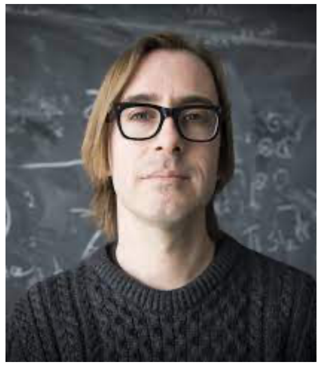
[♦] *Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe (WPI), the University of Tokyo, Chiba 277-8583, Japan*

[◇] *Princeton Center for Theoretical Science, Princeton University, Princeton, NJ 08544, USA* arXiv:1709.09993 (hep-th)

[Submitted on 28 Sep 2017 (v1), last revised 4 Feb 2018 (this version, v2)]

Gauge Theory and Integrability, I

Kevin Costello, Edward Witten, Masahito Yamazaki



Costello

Witten

Download PDF

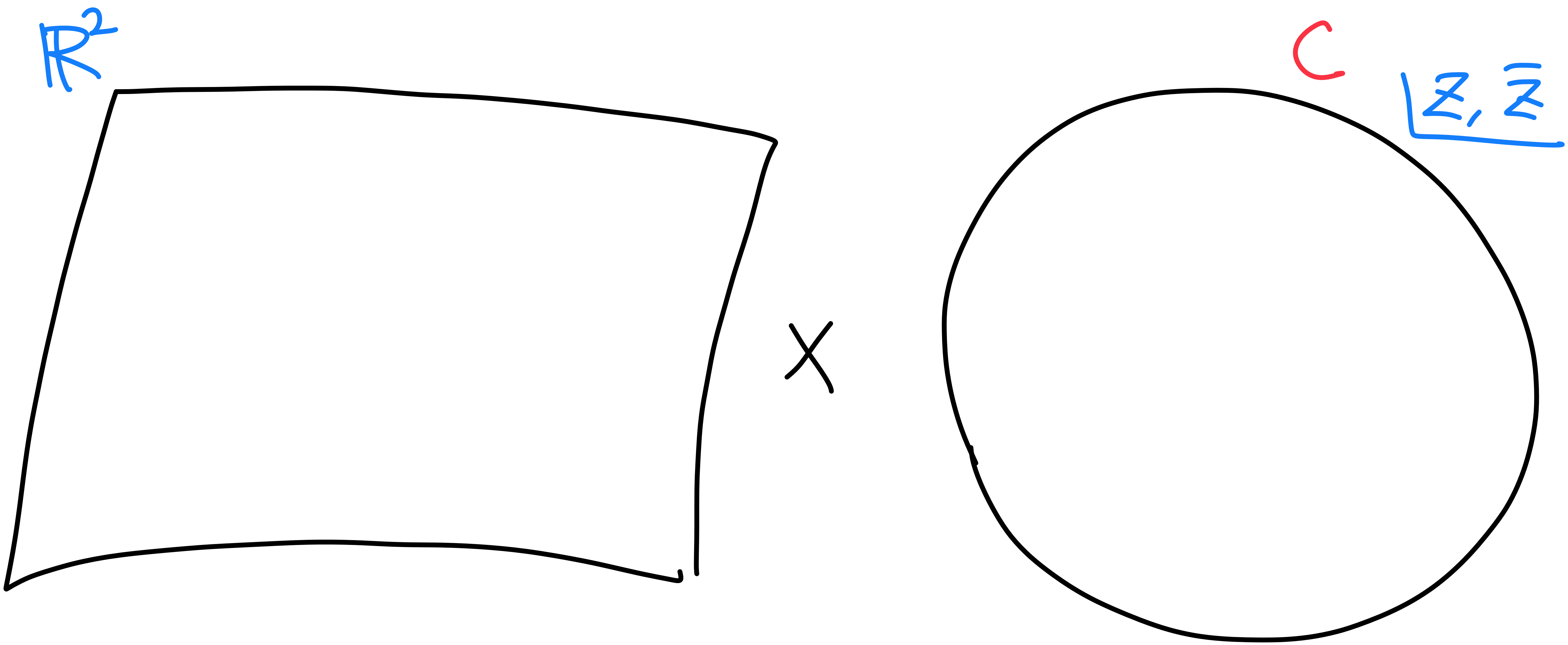
Several years ago, it was proposed that the usual solutions of the Yang-Baxter equation associated to Lie groups can be deduced in a systematic way from four-dimensional gauge theory. In the present paper, we extend this picture, fill in many details, and present the arguments in a concrete and down-to-earth way. Many interesting effects, including the leading nontrivial contributions to the R-matrix, the operator product expansion of line operators, the framing anomaly, and the quantum deformation that leads from $\mathfrak{g}[[z]]$ to the Yangian, are computed explicitly via Feynman diagrams. We explain how rational, trigonometric, and elliptic solutions of the Yang-Baxter equation arise in this framework, along with a generalization that is known as the dynamical Yang-Baxter equation.

Comments:	141 pp
Subjects:	**High Energy Physics - Theory (hep-th)**; Statistical Mechanics (cond-mat.stat-mech); Quantum Algebra (math.QA)
Journal reference:	ICCM Not. 6, 46-119 (2018)

4次元の場の理論を考える

Costello

$$S = \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}} dz \wedge \mathrm{Tr}\left(A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right)$$



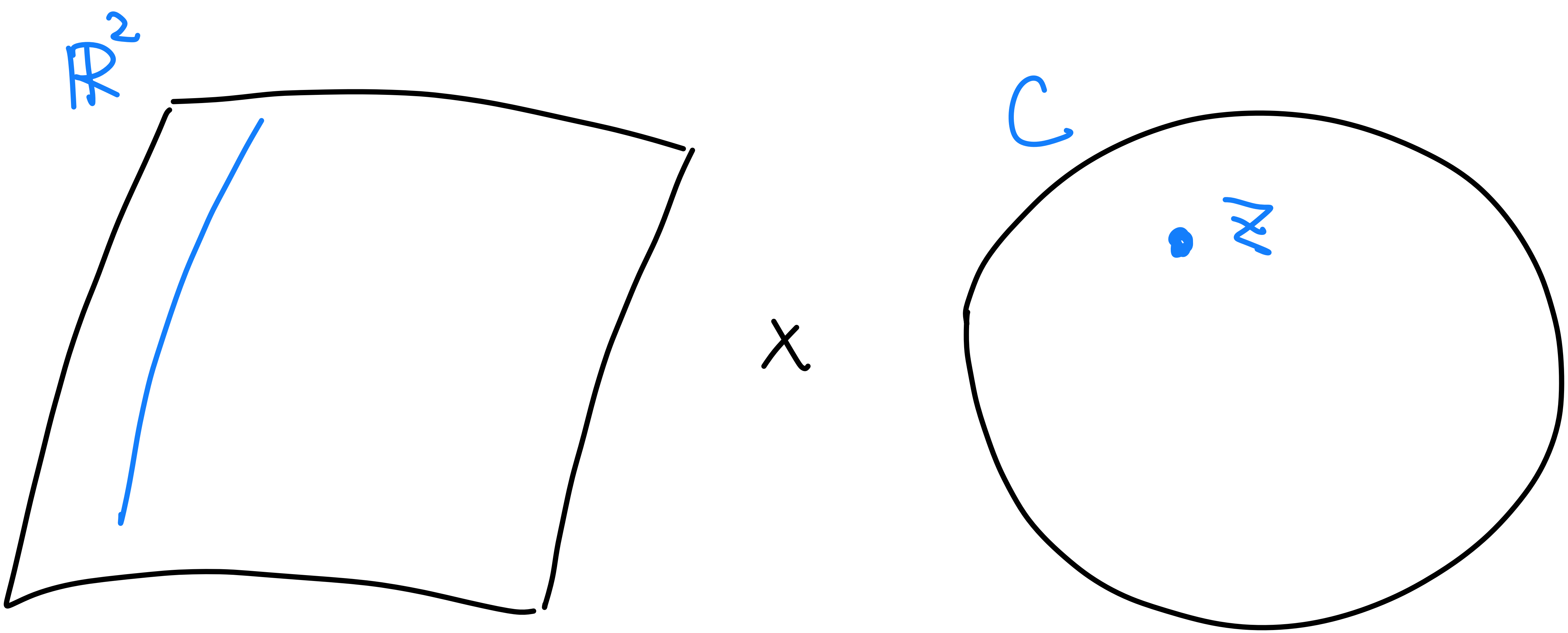
２次元部分：
トポロジカル（ギャップあり）

残りの２次元：
正則（ギャップなし）

設定は変わっても考えるのは

ゲージ場のウィルソン・ライン

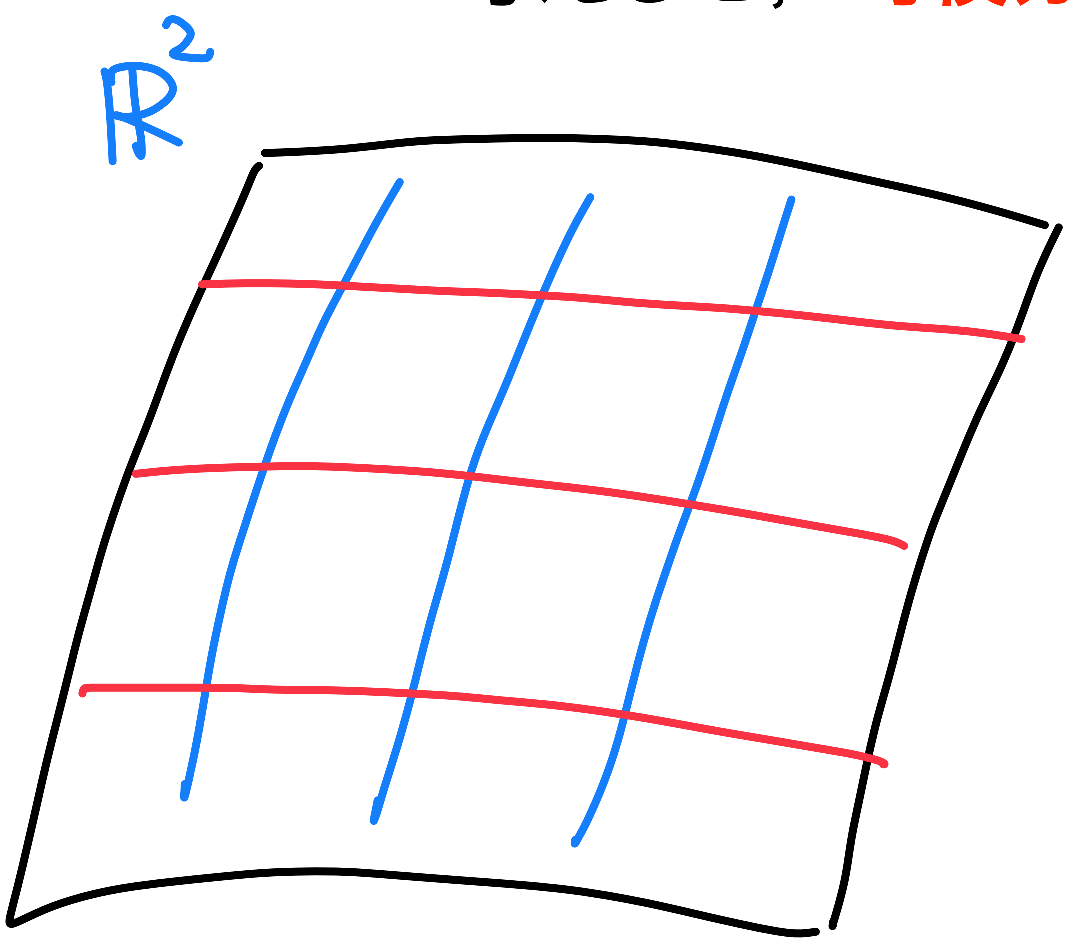
$$\langle W_c \rangle = \left\langle \mathrm{Tr}\left(\exp \oint_c A\right) \right\rangle$$



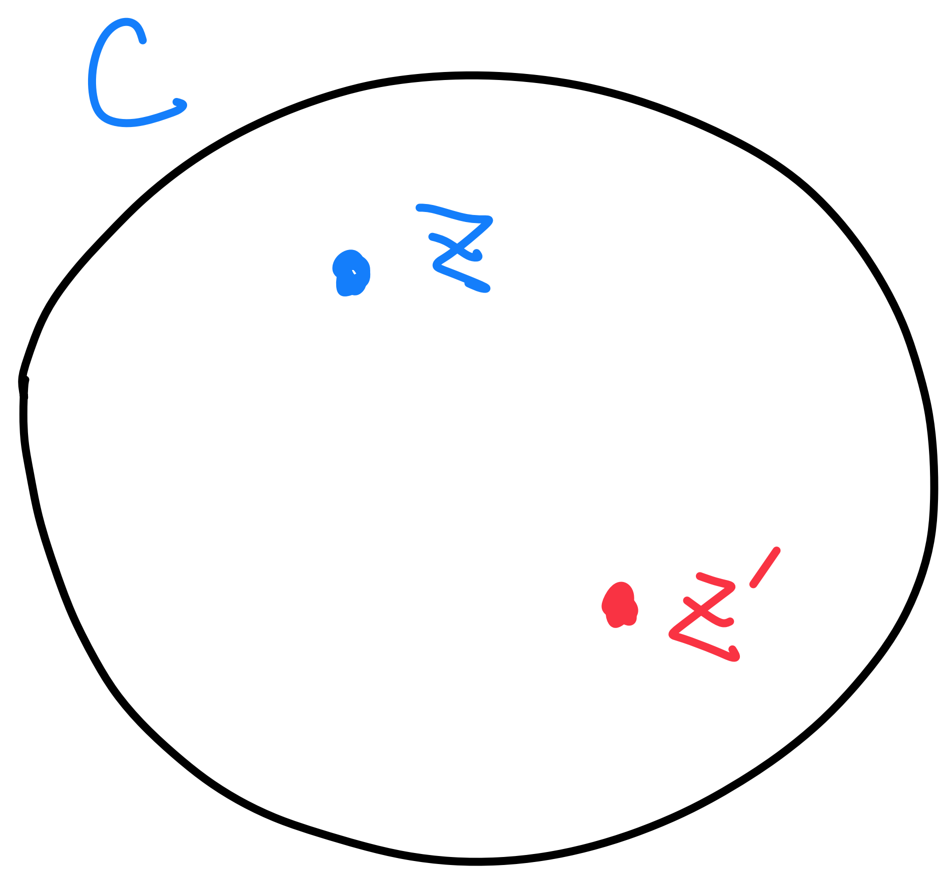
設定は変わっても考えるのは
ゲージ場のウィルソン・ライン

$$\langle W_C \rangle = \left\langle \mathrm{Tr}\left(\exp \oint_C A\right) \right\rangle$$

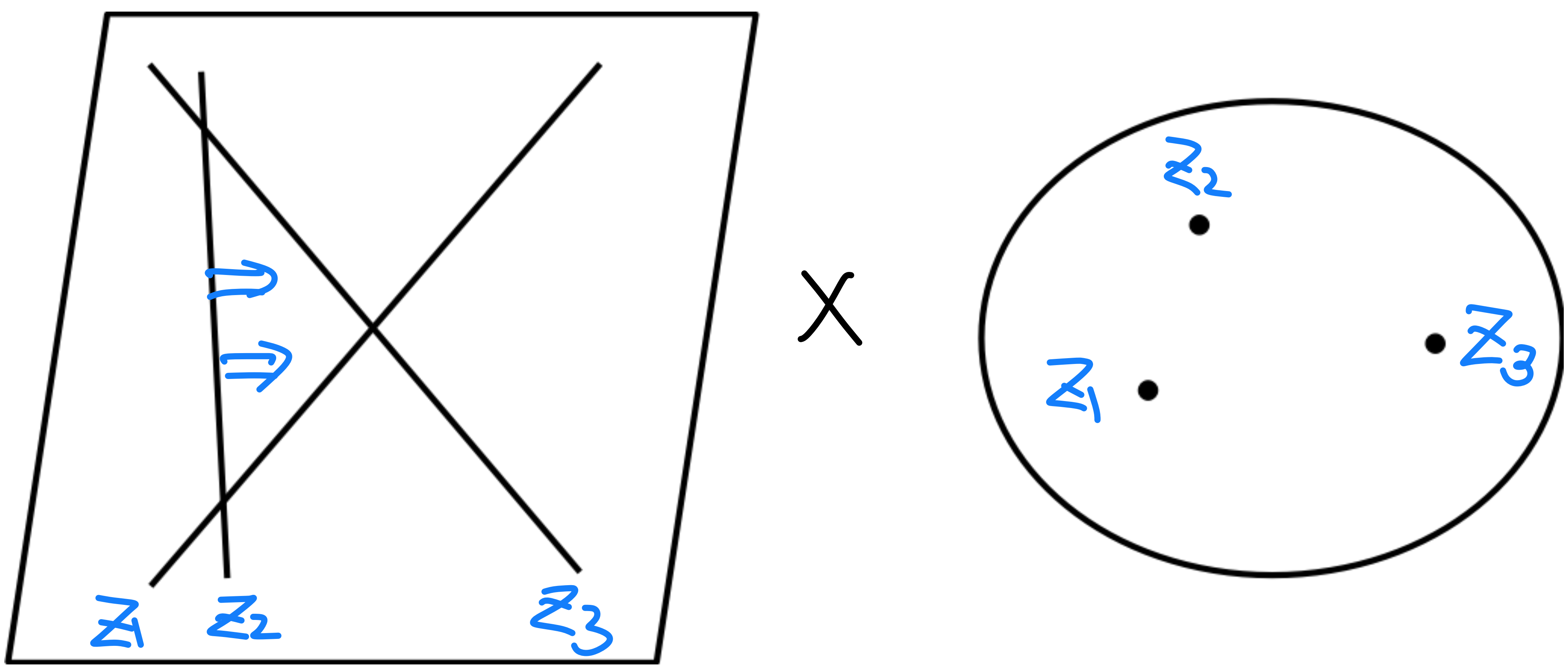
たくさんのウィルソン・ラインを
考えると，**可積分模型の格子**ができる



×

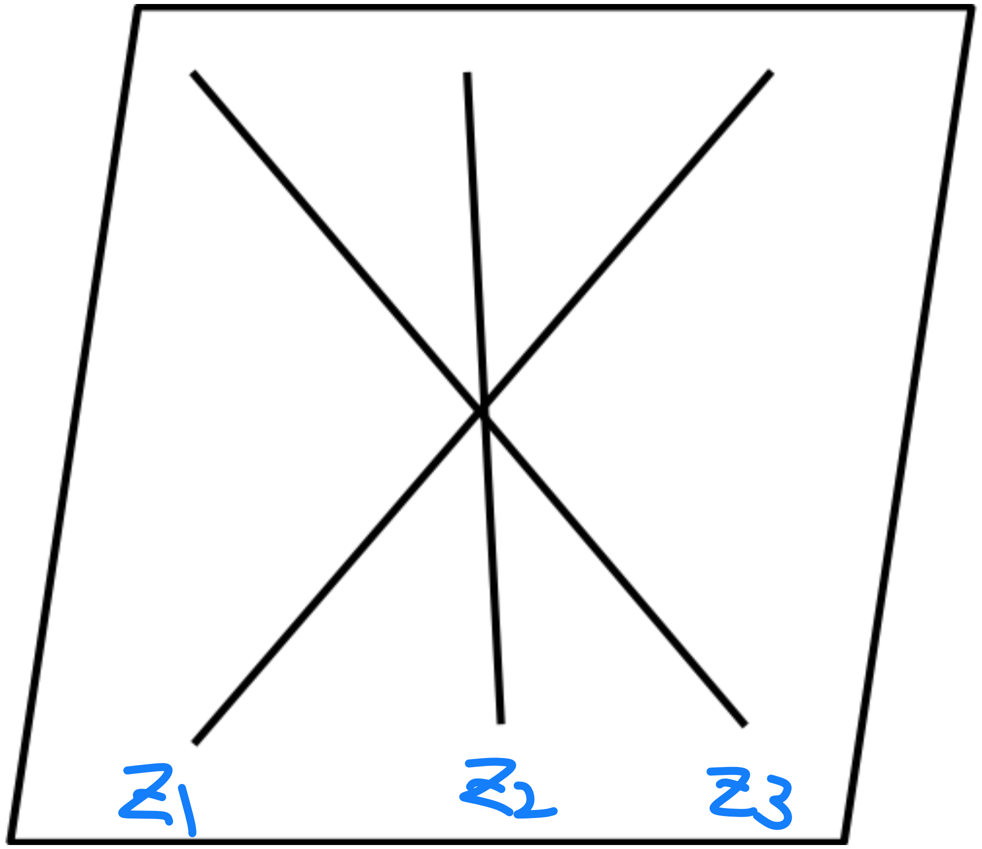


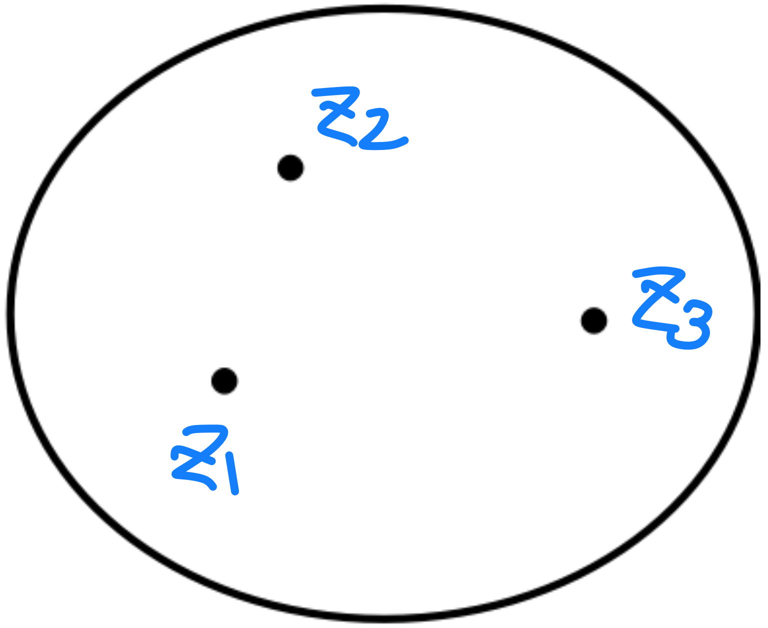
トポロジカルな方向にウィルソンラインを動かしても
「余剰次元」のためにウィルソンラインは交わらない



トポロジカルな方向にウィルソンラインを動かしても
「余剰次元」のためにウィルソンラインは交わらない

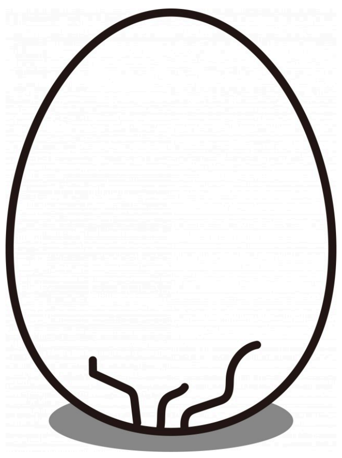
よって，ヤン・バクスター方程式は自動的





今考えてみると、論理的に考えればもっと早く
答えに到達できた？

シンプルな考えでもたどり着くのは大変



そもそも，問題意識を持つ人が少なかった？

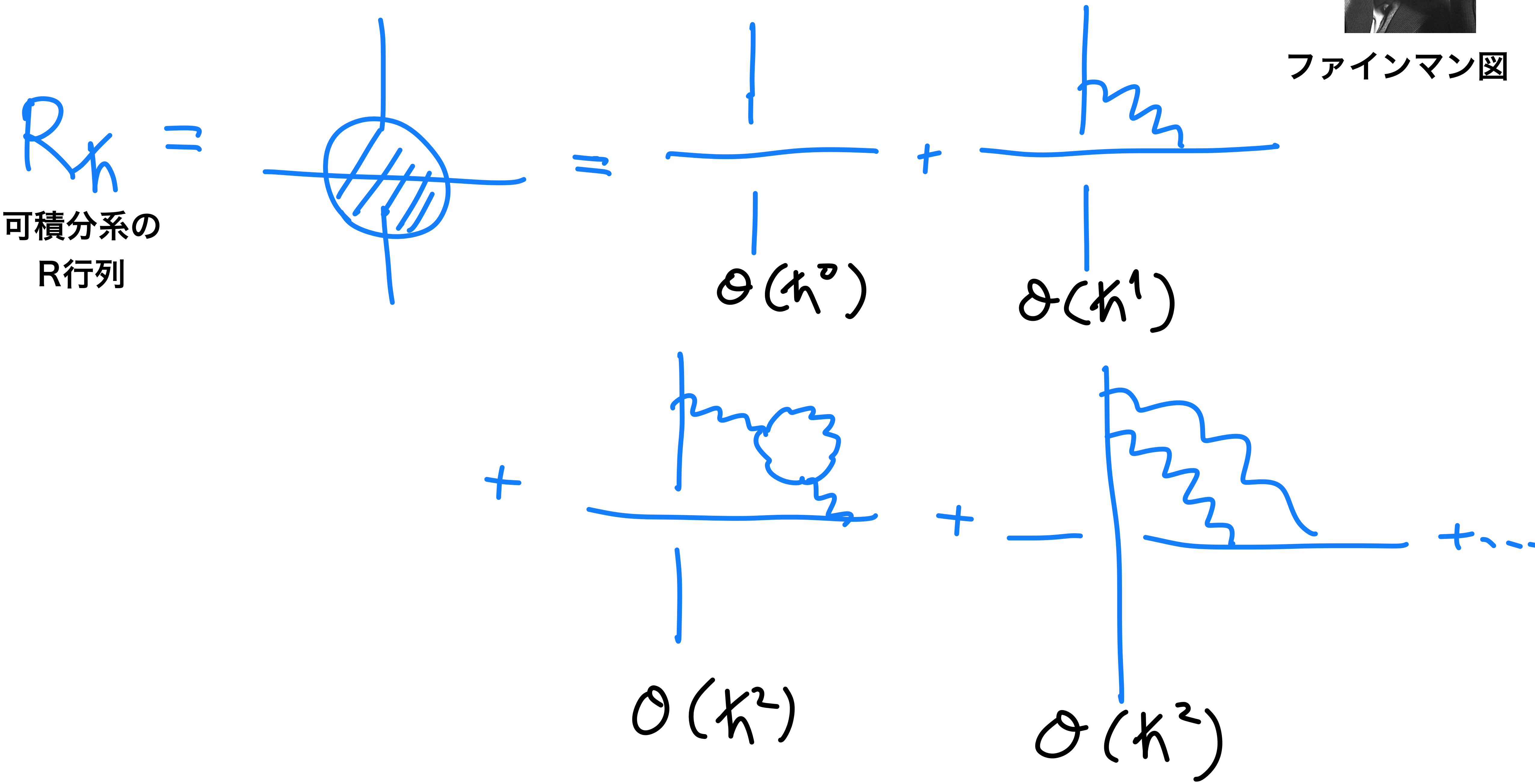
論文を書くには技術的な側面も重要

場の理論の**量子効果を摂動的に計算**することで,
可積分系の結果を系統的に再現できる

Costello - Witten -MY

ファインマン図

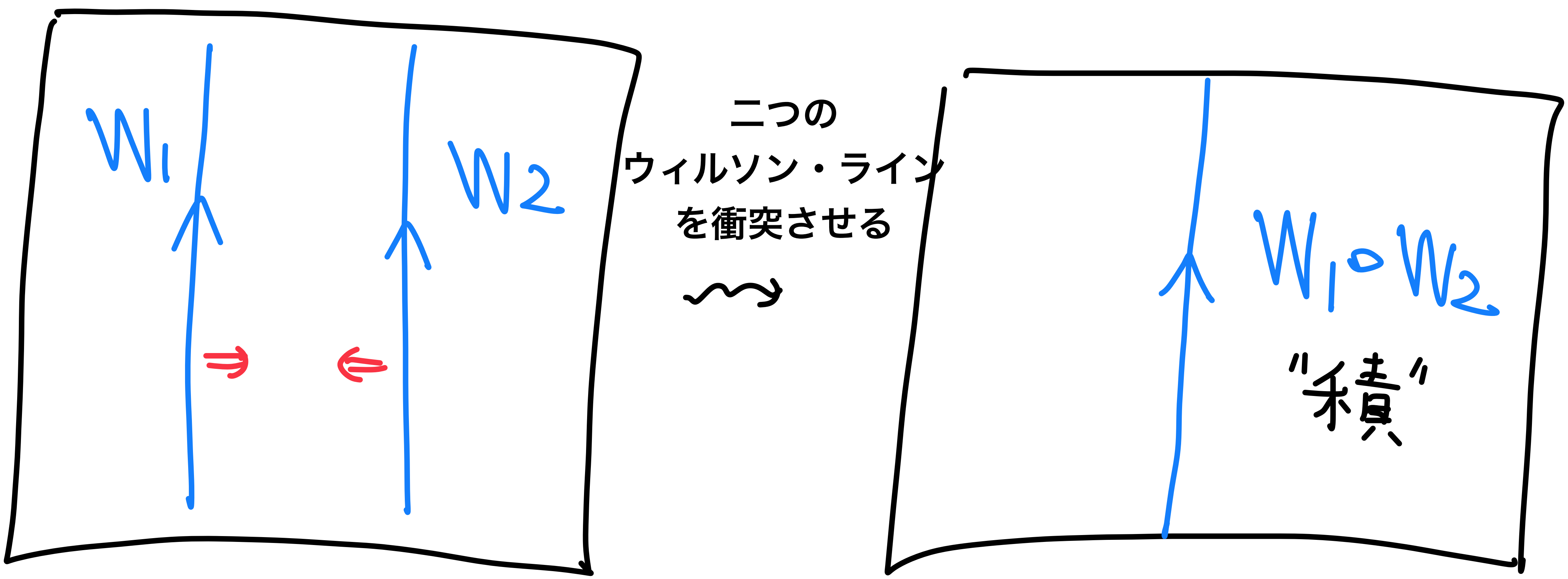
可積分系の
R行列



逆に言えば, これは摂動論の任意の次数で物理量が計算できる

「ウィルソン・ラインのなす代数」
を考えることで，可積分系の背後にある無限次元代数
（ヤンギアンとその仲間たち）を導出できる

Costello - Witten -MY



Drinfeld

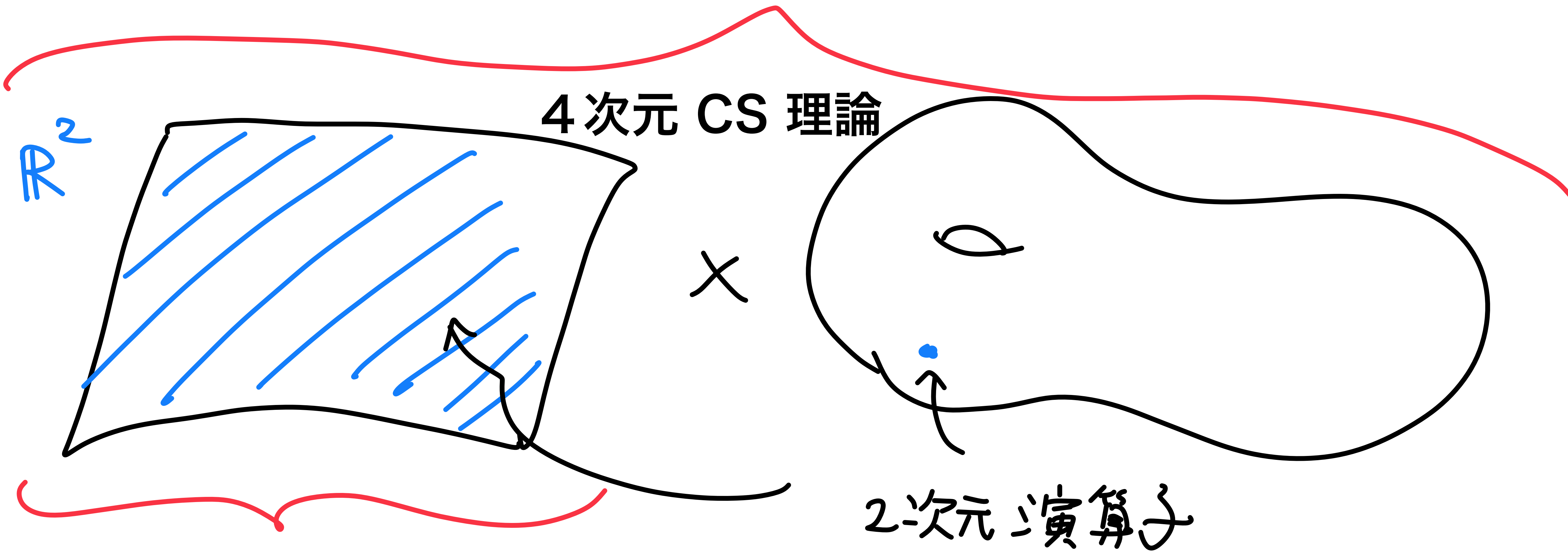
$Y_\hbar(\mathfrak{g})$, $U_{q,\hbar}(\mathfrak{g})$, $U_{\tau,\hbar}(\mathfrak{g})$

Rational　Trigonometric　Elliptic

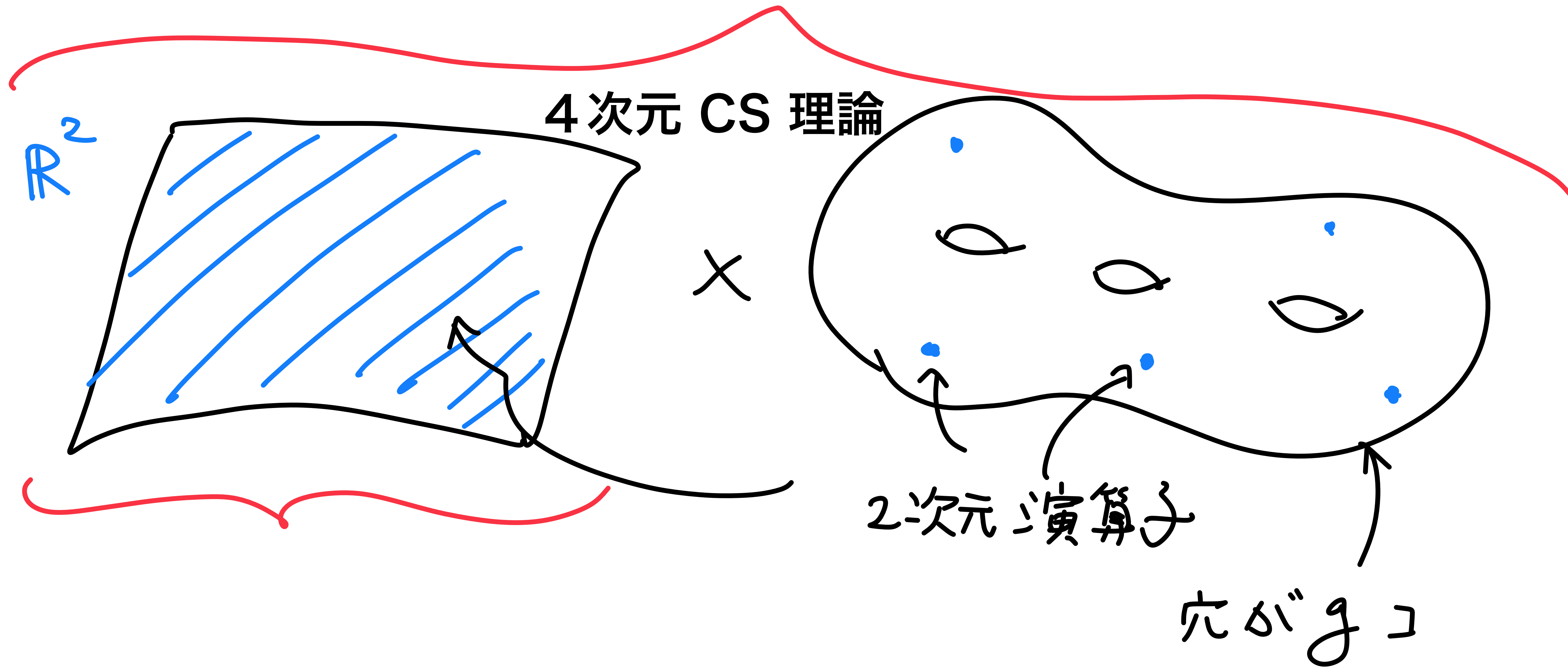
一般の場の理論の理解への雛形？

ここまで1次元的な演算子を考えた。

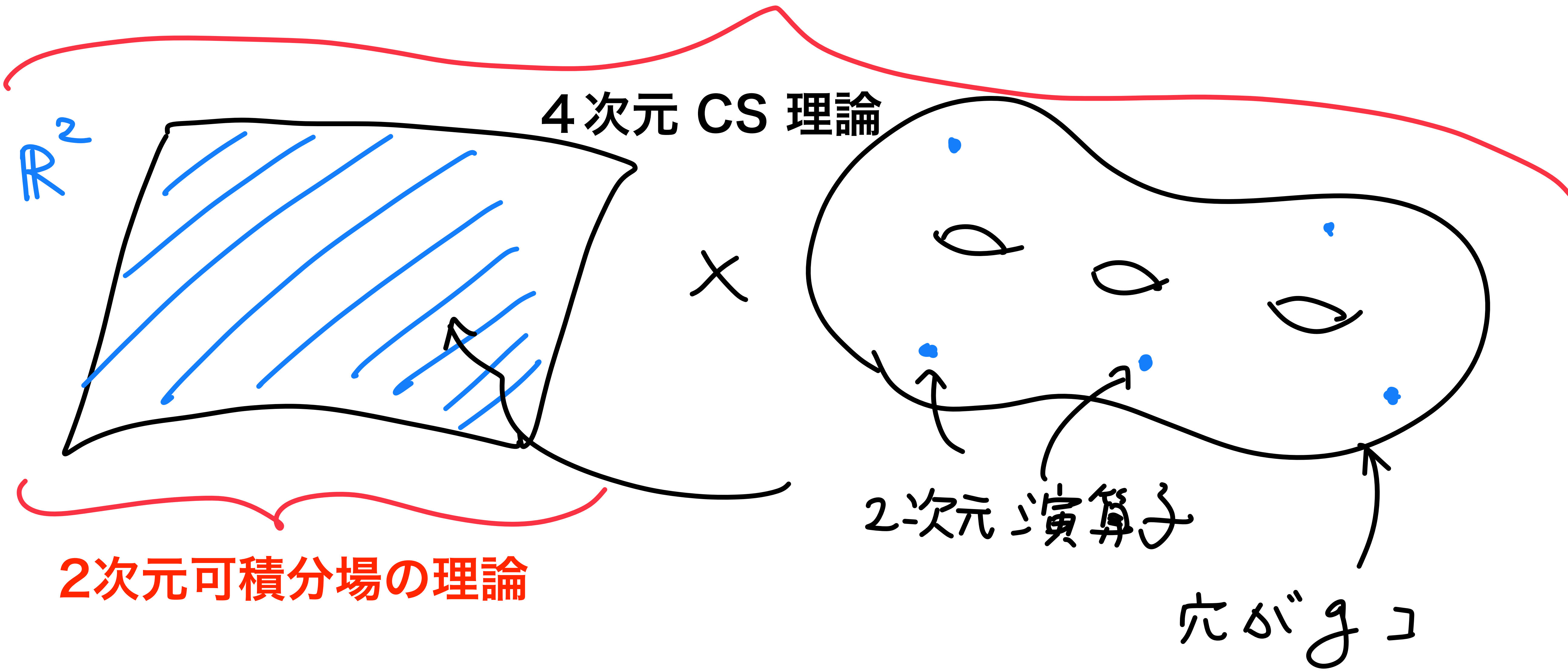
しかし例えば2次元的な演算子も考えられる。



ここまで1次元的な演算子を考えた。
しかし例えば**2次元的な演算子**も考えられる。



ここまで1次元的な演算子を考えた。
しかし例えば**2次元的な演算子**も考えられる。



無限個の**新しい可積分場の理論を系統的に構成**

Costello + MY

既存の可積分模型は，文字通り氷山の一角だった！

さらなる代数構造

“T-duality”
MY

“T-duality”
MY

“T-duality”
MY

3次元
CS

$\int CS$

4次元
CS

$\int dz \wedge CS$

5次元
CS

$\int dz_1 \wedge dz_2 \wedge CS$

6次元
CS

$\int dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge CS$

$Y_\hbar(\mathfrak{g})$

Yangian

$Y_\hbar(\hat{\mathfrak{g}})$

Affine
Yangian

$Y_{\vec{\hbar}}(Q)$

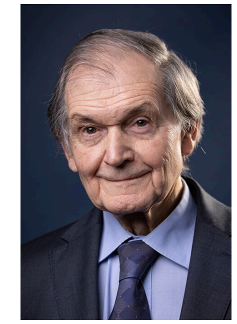
Quiver
Yagian

Wei Li + MY

「可積分系」の統一？

$\mathbb{CP}^3$

ツイスター空間での
6次元 CS 理論



Penrose

$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{CP}^1$

カラビ＝ヤウ
多様体

Costello
Bittelston + Skinner

4次元
CS 理論

４次元自己双対
ヤン＝ミルズ方程式

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{CP}^1$

Costello ＋ MY

$\mathbb{R}^4$

Ward,…

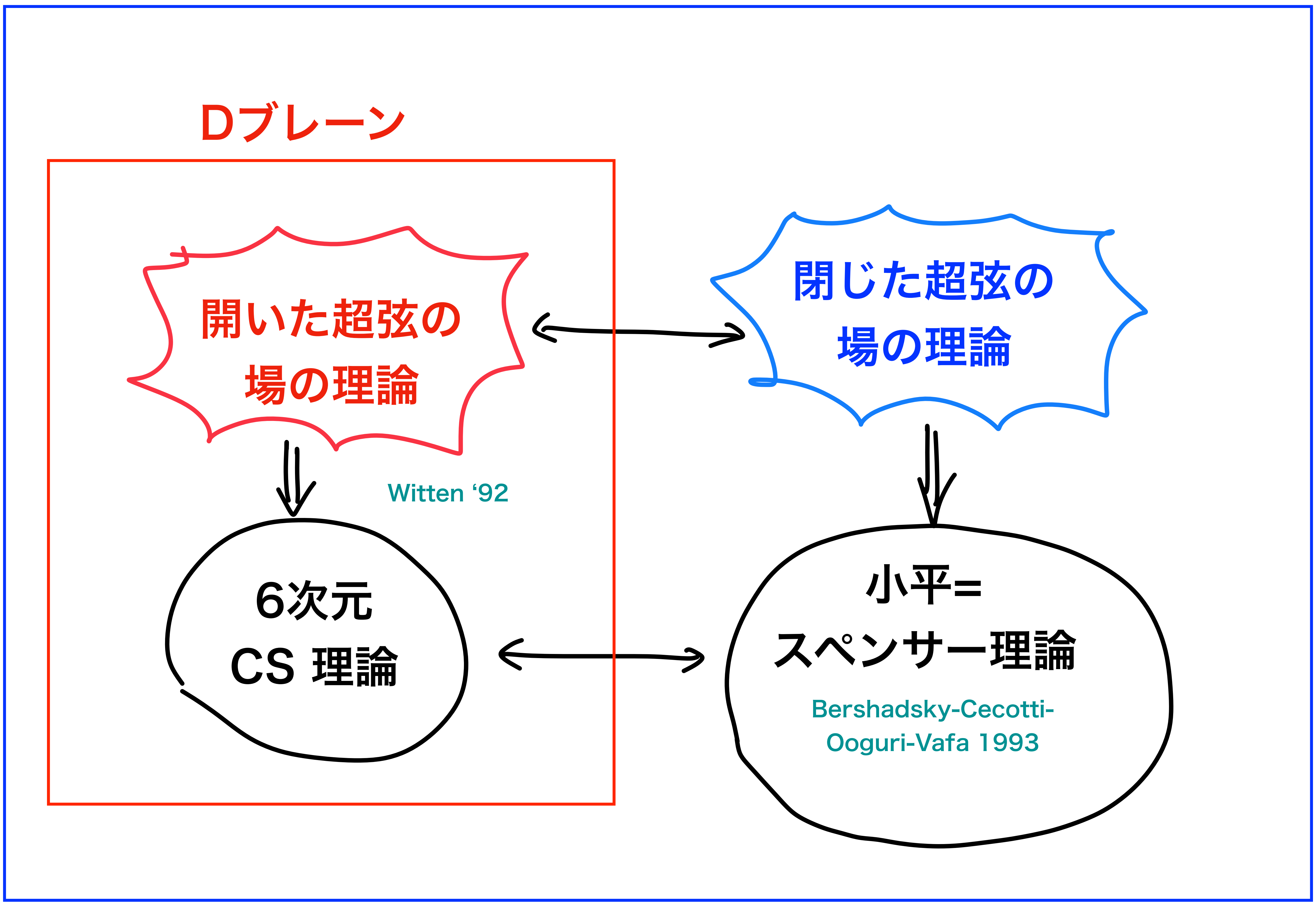
2次元
格子模型

2次元
可積分場の理論

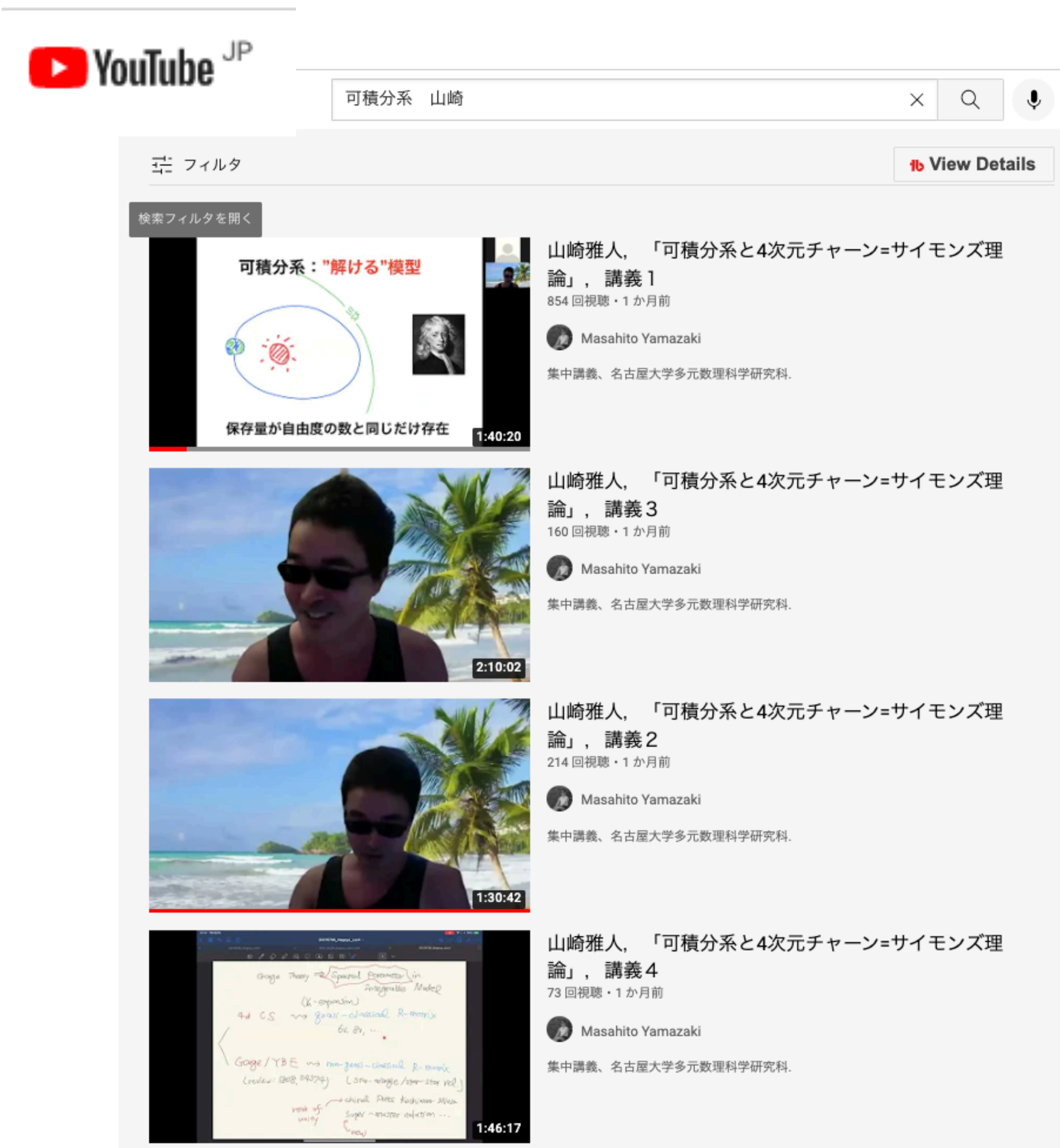
$\mathbb{R}^2$

超弦理論・M理論

(のトポロジカルなセクター)

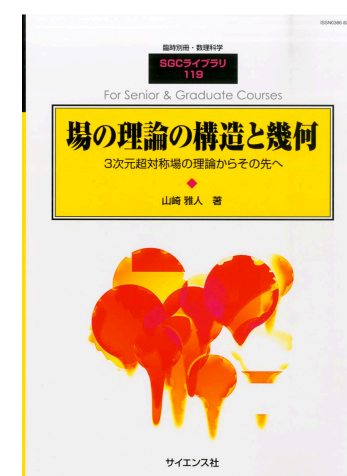


更に知りたい方はYouTube & HP & 本 … へ



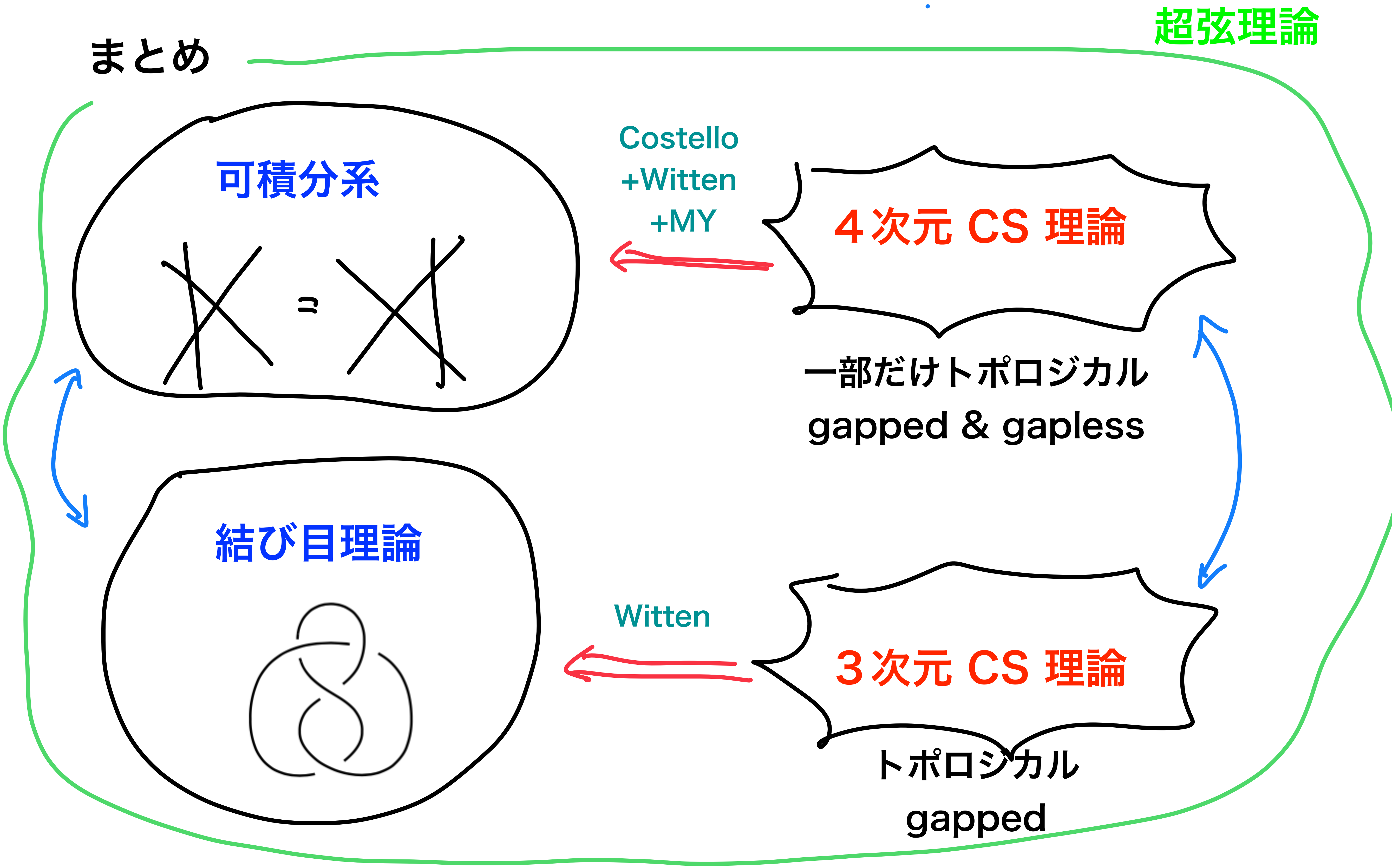
https://www.youtube.com/channel/UCz7Jg2ZzDxYwcBU4tDakAlg

http://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki



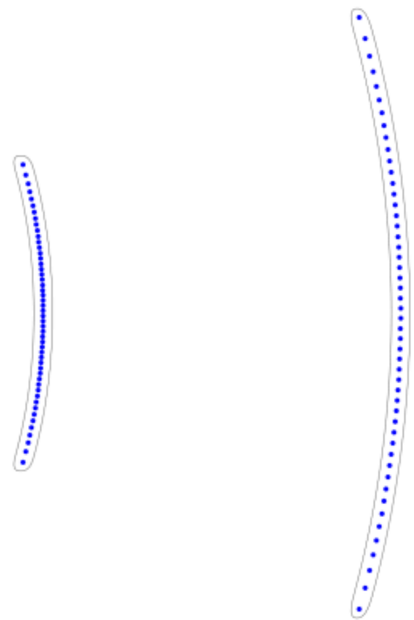
大学院進学相談（物理，数学）も随時受け付けています

まとめ

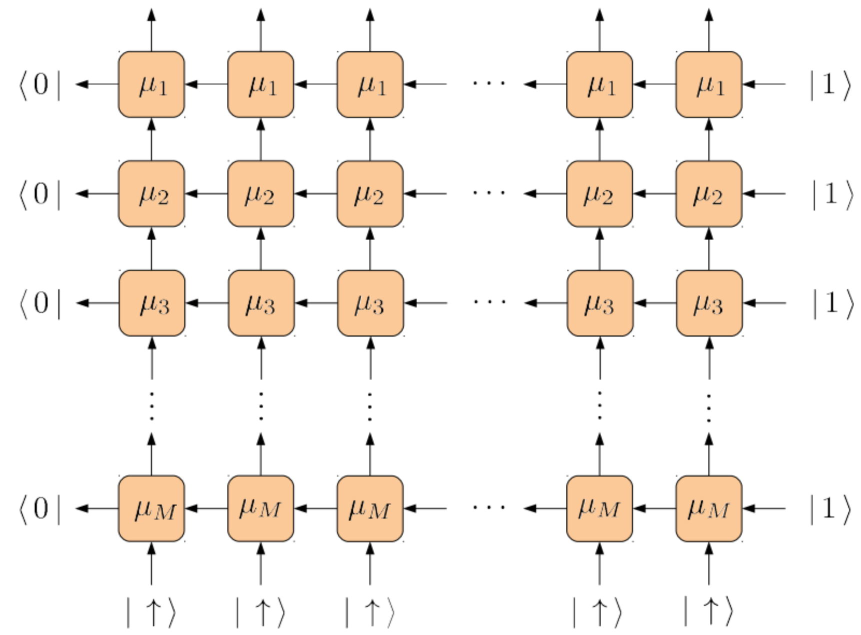


"Unreasonable effectiveness of Physics in Mathematics"

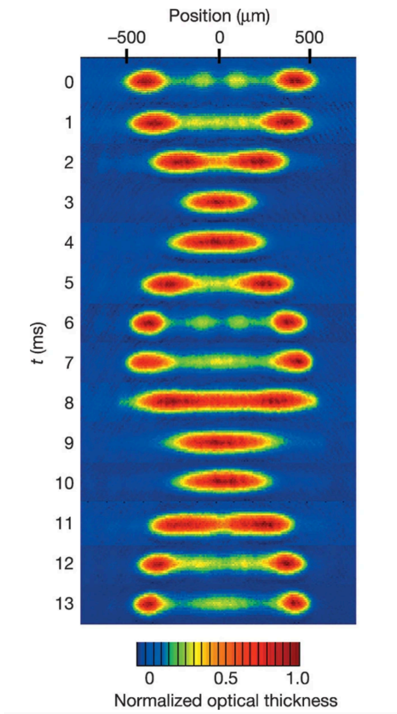
… and Mathematics in Physics

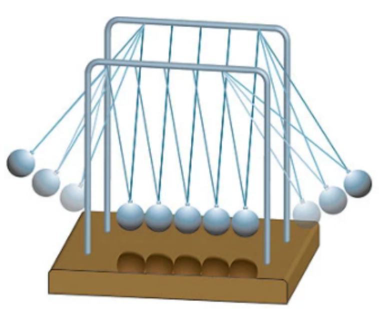


Betheルート

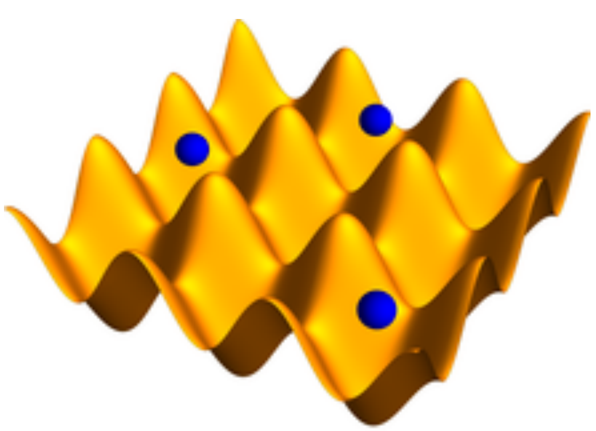


テンソルネットワーク

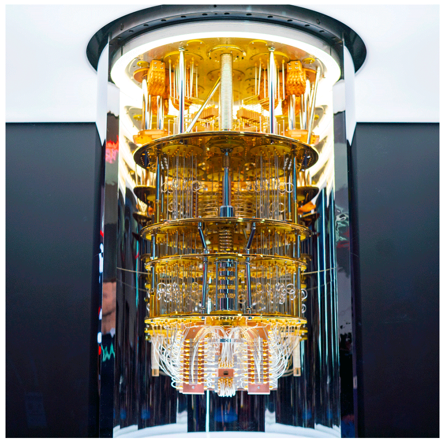




From: Kinoshita, Wenger, Weiss 2006



光格子

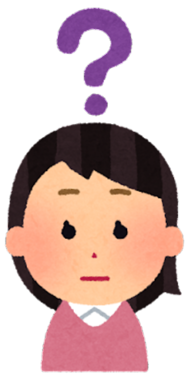


量子コンピューター

教訓？

1. 学問の世界は地続きである.
恐れずに他分野に飛び込むべし

2. 分からないという気持ちを大切に：
「理解するとは問い続けること」



3. 成功体験は重要，しかし
それを捨てることで得るものもある