

- 岩波『科学』2022年8月号特集「トポロジー×科学」
- タイトル「我々はトポロジカルな世界から生まれたのか？」
- 山崎雅人（やまざきまさひと）
 東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構
 専門：素粒子理論，超弦理論，数理物理，その他理論物理学
<https://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki/index-j.shtml>
- 著書：『場の理論の構造と幾何』2015年，サイエンス社

リード文：我々の日頃暮らしている世界はトポロジカルではないように見える。それでは、トポロジカルな世界に行ってみたら何が起るのだろうか？そこには、我々の日々の直観とは異なるが、アインシュタインが夢見たかもしれない世界が広がっている。実は我々の世界は、トポロジカルな世界の「対称性が破れた」なれの果てかもしれない。これは本当だろうか？この問いを探究する過程で、我々はトポロジーについての豊かな数学に巡り合うことになる。

トポロジカルな世界はどんな世界か？

トポロジーは不自然？

トポロジーは日本語では位相幾何学と呼ばれ、「形」を調べる学問である幾何学の一分野である。「滑らかな連続変形で移り変わるものを同一視する」というトポロジーの考え方は一見直観に反しており、最初は突拍子もなく思えるかもしれないが、その基本的考えは素朴なところもあり、一旦慣れてしまえばだんだん自然なものに思えてくるものだ。

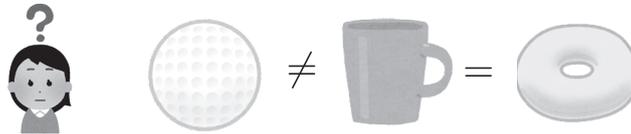


図1 「トポロジーの考え方」トポロジーでは「コーヒーカップとドーナツを同一視する」というのがよくある説明である。実際、どちらも穴が一つ空いている。トポロジーの基本は誰でも理解できる素朴なものであるが、読者の中には「理屈では理解できてもどうもじっくりこない」という感覚をもたれる方もいるだろう。

もっとも、読者の中には「どうしてもトポロジーの考え方がじっくりこない」という方もいるだろう（図1）。実際、数学の歴史を考えると、その意見にはかなり説得力がある。幾何学は有史以来少なくとも数千年に及ぶ歴史を持つ学問であり、既に紀元前には古代ギリシアの数学者であったユークリッドによりその学問的雛形が完成している。それに比べて、トポロジーは全く新しい学問である：トポロジーの概念はしばしばオイラーやガウスに遡るとされているが、それはせいぜい300年にも満たない「最近」のことであり、トポロジーが本格的に分野として研究されるようになったのはもっと最近のことである。

筆者は数学史の専門家ではないので、なぜトポロジーの発見にここまで時間がかかったのかを系統的に論じることができないが、物理学者の一人としては、「我々の暮らしている世界がトポロジカルではないように見えるからだ」という理由を一つ挙げておきたい。いかに抽象的な数学であっても、人間がやる学問である以上、どうしても日常的な感覚に引きずられるところもあるからだ。例えば、トポロジーの世界では長さ・大き

さの情報は無視されてしまう。とても大きなドーナツでも小さなドーナツでもトポロジーは同じだが、スーパーでついている値段は多分違うだろう。自分の体重や身長に悩む人がいるのも、我々の世界がトポロジカルではないからだ。もちろん、そういう世界でも「大きさの違いのような連続的変形による違いは大雑把に無視して考える」ことは可能であり、実際そういう同一視を経ることによってトポロジーが活躍するわけだが、なんだか後味が悪いと感じる人がいてもおかしくない。

トポロジカルな宇宙を考えてみる

そこで、いっそのこと我々の住んでいるこの世界のことは一旦忘れて、全てが文字通りトポロジカルな世界を想像してみよう。そこでは何が起こるのだろうか？

トポロジーの世界の特徴の一つは長さ（スケール）が意味を持たないことである。通常の世界では、例えば公園で近くの人の話し声がうるさいなと思っても、ちょっと離れたところに移動すれば音は小さくなって気にならなくなる。これは音の大きさが減衰する典型的なスケールが存在するからだ。しかしトポロジーの世界では単に離れても、それは連続変形なので何も変わらない。だから長さを変えることには意味がなく、一切の長さの概念がなくなってしまう。これは我々の世界とはあまりに異なっており（図2）、実際このことが理由でトポロジカルな世界を考えることには意味がないと考えた物理学者も歴史的には少なくなかったようである。



図2 「トポロジカルな世界と我々の世界の違い」通常の世界では、距離が重要な意味を持つので、例えば家に帰るために10分歩けばいいのか10時間歩けばいいかの違いは重要である。しかし、トポロジカルな世界ではその違いは無くなってしまふ。それどころか、家も人間もその大きさに意味が無くなってしまふ。トポロジカルな世界は我々の世界とはずいぶん違うようだ。

しかし実は、物理学理論の王道である一般相対性理論においてアインシュタインにより展開された思想を、徹底して実現した世界こそがトポロジカルな世界であるとみなすこともできるのだ。アインシュタインは一般相対性理論において重力の理論を構築したが、その際重要な理論的指針となったのが「一般座標変換での不変性」である。我々は時間を計る時に時計を用い、長さを測るときに定規を当てるわけだが、時間・空間において時計・定規の役割を果たすのが座標系であり、一般相対性理論はその座標系のもとでの計量を基本的な場として構成される。このとき、理論が座標系の取り方によらないというのが一般座標変換での不変性である。時計とか定規というのは観測者が勝手に持ち込んだものなのだから、物理の本質が座標系の取り方によらないというのは自然な要請のように思える（図3）。

一般相対論は理論としては一般座標変換での不変性を持つが、実際の宇宙を考えるときには特定の計量を選ぶ必要があるが事情は異なる。例えば平らな時空を考えたいときは平坦な計量（ミンコフスキー計量）を選びその周りで計量を展開してやる必要があり、その時、一般座標変換での不変性はポアンカレ対称性と呼ばれるずっと小さな対称性に落ちてしまふ。このポアンカレ対称性は特殊相対論の基礎となる対称性であり、こうして特殊相対論が一般相対論から導かれる。このように、一般相対論では一般座標変換不変性という強力な対称性を用意しつつ、同時にそれをほとんど破るという二本立ての構成になっているのだ。

一般に理論に対称性が存在したとしても、その理論の中で特定の状態（真空）を考えるときにはその状態は

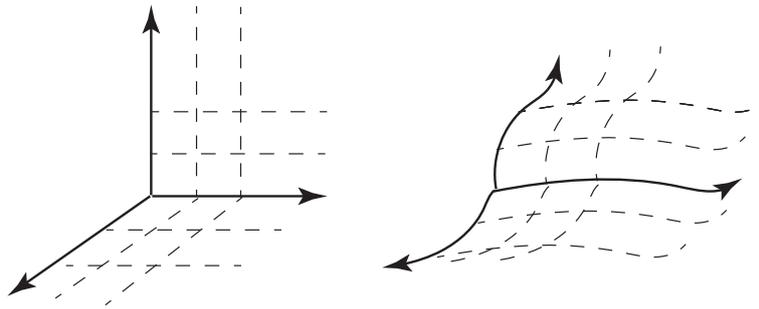


図3 「一般座標変換不変性」一般相対性理論では座標系の取り替えについての不変性を要求するので、右左どちらの座標系を使っても最終的な物理は不変である。

対称性を破るかもしれない。このような「対称性とその自発的破れ」という考え方は物理学においてしばしば現れる普遍的な考え方の一つであり、ノーベル賞を受賞された南部陽一郎博士の研究分野で最も有名なものの一つでもある。一般に対称性が真空のチョイスにより自発的に破れるとき、対称性が存在していたことの名残として「南部・ゴールドストーン粒子」が現れる。特に一般相対論の場合には重力を記述する粒子（重力子）を一般座標変換不変性の破れにともなう南部・ゴールドストーン粒子とみなそうとする考えがある。この立場に立つと、トポロジカルな理論は対称性が破れていない「より対称的な」理論であり、具体的な時空が選ばれるときにその対称性が自発的に破れることによって通常の一般相対論が現れることになる。

一般座標変換不変性を回復するには？

それでは、対称性が破れた一般相対論から出発して、より対称的な理論を見つけるにはどうしたら良いのだろうか？ 対称性が破れたのは特定の計量、つまり特定の時空を選んだからであり、これは古典物理学の範疇にある一般相対論そのものでは自然である。しかし、20世紀物理学のもう一つの基盤である量子力学の考え方によると、量子揺らぎの概念により時空そのものが揺らぐことになり、量子効果が強くなってくるとやがては異なる複数の時空の足しあげを考えることが重要になると期待される。この場合、例えばそもそも計量の概念があやふやになるという問題点はあるものの、なんらかの意味で一般座標変換不変性が回復すると仮定するのは自然かもしれない。つまり、より対称性が高いトポロジカルな理論は、量子効果が重要になり計量の足しあげを考える理論、つまり量子重力理論を考えれば良いのではないだろうか。実は、ウィッテンが最初に位相的場の理論を考えたときの物理的な動機には以上のような量子重力からの動機があったのだ [1, 2].^{*1}

我々の住んでいる宇宙は巨大なサイズを持っており計量の揺らぎの効果は小さいが、宇宙の歴史を遡ると話は別である。特に、宇宙はこれまで膨張してきているので、逆に過去に遡ると宇宙はどんどん小さくなっていき、温度も高くなっていく。時間を遡るといわゆるビッグバン（火の玉宇宙）に行き当たるが、それよりもさらに前の時間、宇宙が量子重力によって記述される時期が存在したと信じられている。つまり、一般座標変換不変性を追究してきた我々は、トポロジカルな理論を求めて、量子重力により記述される原始宇宙にまで遡ったのである（図4）。

^{*1} 原論文ではもっぱら「一般座標変換の破れていない相」が強調されているが、ここではそれをより明示的に量子重力として解釈した。

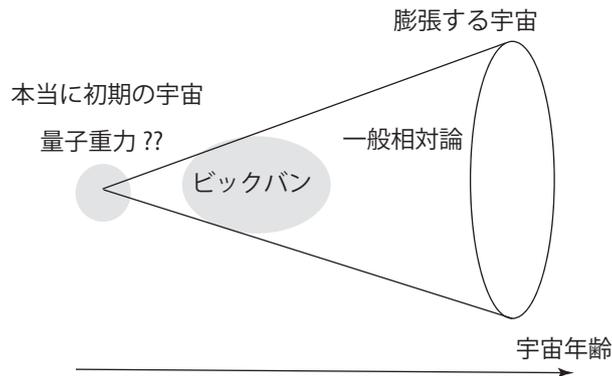


図4 「原始宇宙には量子重力があった」我々の宇宙は138億年の年齢をもつが、ビッグバンよりもさらに前、宇宙が生まれてからプランク時間 (10^{-44} 秒ほど) の本当に初期の宇宙においては時空そのものの量子揺らぎの効果が重要となり、量子重力により記述されると考えられている。古典的な一般相対論では時空の計量を選ぶことにより一般座標変換での不変性は破れているが、量子重力では時空が揺らぎ異なる時空を足し上げる必要があり、一般座標変換不変性が回復している可能性がある。なお、この図はあくまで模式図であり、誇張して表現されているためスケールは実際とは全く異なる。

トポロジカルな重力の数理

(2+1)次元のトポロジカル重力

トポロジカルな場の理論を量子的な重力理論とみなす考え方は興味深いものであるが、まだ漠然としている。この考えをより具体的にしたのが(2+1)次元重力についてのウィッテンの論文である[3]。ここで、(2+1)次元というのは空間2次元、時間1次元のことであり、我々の普段考える(3+1)次元(空間3次元、時間1次元)よりも一つ空間次元が下がっている。いわば、「まな板の上に閉じ込められた」世界で重力を考えようというわけである。

我々の住む(3+1)次元の時空では、近年重力波(重力のさざ波)が実験的に観測されるようになり、2017年のノーベル賞もこの分野の研究者に授与された。重力波は光速とはいえ有限の速度で伝播するものなので、重力波があるときには理論はトポロジカルではない。しかし、(2+1)次元の世界では重力波は存在しないことが知られており、重力理論はその中にある物質を考えないときトポロジカルになってしまう。つまり、そもそも出発点の一般相対論がトポロジカルなのだから、対称性が破れていないトポロジカルな理論に既にかなり近くなっている。

ウィッテンが考えたトポロジカルな(2+1)次元重力理論は、複素化されたチャーン=サイモンズ理論[4]というものになっている。「複素化されている」というのは、複素数と同じように実部と虚部があることを意味する。この場合、虚部は一般相対性理論を記述しているので重力理論を含んでいるが、実部の方もチャーン=サイモンズ理論というトポロジカルな理論になっている。

一般相対論では特定の計量を古典解として選ぶと一般座標変換不変性は破れてしまう。しかし、チャーン=サイモンズ理論では、一般相対論とは異なり「計量をゼロにする」という解が許されており、この解は一般座標変換不変性を保っている(ゼロはいくら変換してもゼロだということだ)。つまり、複素化されたチャーン=サイモンズ理論はトポロジカルな理論である一方、一般座標変換を回復するような解も含んでおり、これまで述べてきた動機からすると量子重力の候補としてふさわしいものに見える。このことが理由で、一時期

チャーソン＝サイモンズ理論の立場から (2+1) 次元重力が盛んに研究された。もっとも、その後の研究により複雑化されたチャーソン＝サイモンズ理論そのものを文字通り (2+1) 次元量子重力とみなす考えには問題もあることがわかってきた [5]。現在でもこれらの問題が解決されたとはいえず、最終的にはチャーソン＝サイモンズ理論は量子重力理論ではないという結論に達する可能性もある。

チャーソン＝サイモンズ理論のトポロジーへの応用

仮にチャーソン＝サイモンズ理論が量子重力理論そのものではないにせよ、トポロジカルな理論であることは確かであり、数学的にはとても興味深いものである。実際、3次元の時空が選ばれると（以下では時間と空間の区別はしないことにしよう）、その時空ごとに対応した数が定まり、時空のトポロジーにしかよらない量を定めることになる。この量は連続変形で不変でありトポロジーにしか依存しないので、トポロジカル不変量と呼ばれる。量子重力理論では異なる時空を足し上げることになるが、その足し上げをするときの相対的な重みを決めるのがこの不変量である。

時空だけを考えていても人間にとっては退屈なので、今度は僕ら自身がその時空に飛び込んでみよう。トポロジカルな世界なので皆さんの身長も体重も関係ない。ここでは理想的な点粒子を考え、それが時間に沿って動くことを考えよう。この場合、3次元の時空では粒子の軌道は1次元的な線で表されることになる。物質を加えればその周りの時空が歪むというのが一般相対論の考えである。従って、粒子の効果によって周りの時空のトポロジーも変化するはずである [6]。ここまでは一つの粒子を考えたが、さらに多数の粒子を考え、その軌跡が複雑に絡み合う状況を考えれば時空のトポロジーももっと複雑に変化するだろう。面白いことに、こうしてトポロジーでしばしば現れる結び目を得ることができる。つまり、時空に加えられた粒子の軌跡が結び目を表しているのだ。我々の考えていた理論はトポロジカルな理論であったから、考えるべき物理は結び目のトポロジーにしか依存しないはずである。

こうして、トポロジカルな量子重力を考えることで我々は時空及びその中に存在する結び目を記述するトポロジカル不変量にたどり着いた。これらの不変量は数学としても研究することができ、結び目の不変量やその一般化と関係しているが、我々はより物理的な動機からトポロジカル不変量を研究することになったのだ [7]。

量子力学を学ばれた方ならば、量子力学では波動関数なるものをご存知かもしれない。今は宇宙そのものを議論しているので大雑把に言って結び目の不変量が「宇宙の波動関数」にあたることになる。また量子力学では波動関数はシュレーディンガー方程式を満たすことを教わるが、その類似として宇宙の波動関数は「宇宙の波動方程式」を満たしており、この方程式は結び目不変量の満たす漸化式に翻訳される。さらに、この量子的な波動関数の「半古典極限」を考えることで結び目不変量の展開が得られ、それは数学において結び目不変量の極限から「結び目の体積」が現れる体積予想 [8, 9] と関係している [10]。このように、チャーソン＝サイモンズ理論は数理物理としても非常に興味深いものであり、現在でも3次元多様体論や結び目理論を研究する上では不可欠な視点を提供し続けている。

量子重力はトポロジカルか？

本稿はトポロジカルな理論の一つの動機づけとして一般相対論の一般座標変換不変性を議論し、量子重力へと導かれた*2。宇宙の進化を遡った時、我々の宇宙はトポロジカルな量子重力から生まれてきたことが見出さ

*2 本稿では宇宙初期という非常に高いエネルギーにおいてトポロジカルな理論が現れる可能性を議論してきた。逆に非常に低いエネルギーを考えることによってトポロジカルな場の理論が現れることが期待される。近年発展の目覚ましい物性におけるトポロジ

れるのだろうか？そこにアインシュタインが夢見たかもしれない美しい世界が広がっているのだろうか？その答えは未だ誰も知らない*3。しかし、物理学者と数学者が手を取り合って明らかにしてきたトポロジカルな場の理論の世界は既にそれ自体豊かなものであり、その発展は超対称場の理論や超弦理論の発展の中に取り込まれ、壮大なストーリーを編み上げるにまで至っている*4。超弦理論が量子重力の理論である以上、超弦理論の更なる発展により、量子重力におけるトポロジーの意味がより明確に理解される日は遠くないのかもしれない。そしてそのとき、我々は初めて一般相対性理論を本当に理解したといえるのかもしれない。

参考文献

- [1] E. Witten, “*Topological Quantum Field Theory*”, *Commun. Math. Phys.* 117, 353 (1988).
- [2] E. Witten, “*Topological Gravity*”, *Phys. Lett. B* 206, 601 (1988).
- [3] E. Witten, “*(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System*”, *Nucl. Phys. B* 311, 46 (1988).
- [4] E. Witten, “*Quantization of Chern-Simons Gauge Theory With Complex Gauge Group*”, *Commun. Math. Phys.* 137, 29 (1991).
- [5] A. Maloney and E. Witten, “*Quantum Gravity Partition Functions in Three Dimensions*”, *JHEP* 1002, 029 (2010), [arxiv:0712.0155](https://arxiv.org/abs/0712.0155).
- [6] S. Deser, R. Jackiw and G. 't Hooft, “*Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space*”, *Annals Phys.* 152, 220 (1984).
- [7] E. Witten, “*Quantum Field Theory and the Jones Polynomial*”, *Commun. Math. Phys.* 121, 351 (1989).
- [8] R. M. Kashaev, “*The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*”, *Lett. Math. Phys.* 39, 269 (1997), <https://doi.org/10.1023/A:1007364912784>.
- [9] H. Murakami and J. Murakami, “*The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*”, *Acta Math.* 186, 85 (2001), <https://doi.org/10.1007/BF02392716>.
- [10] S. Gukov, “*Three-dimensional quantum gravity, Chern-Simons theory, and the A polynomial*”, *Commun. Math. Phys.* 255, 577 (2005), [hep-th/0306165](https://arxiv.org/abs/hep-th/0306165).
- [11] P. Agrawal, S. Gukov, G. Obied and C. Vafa, “*Topological Gravity as the Early Phase of Our Universe*”, [arxiv:2009.10077](https://arxiv.org/abs/2009.10077).
- [12] 山崎雅人, “場の理論の構造と幾何”, サイエンス社 (2015).

カル相を記述するトポロジカルな場の理論はそのような低エネルギーの場の理論である。それについては本特集押川氏の記事が参考になるかもしれない。

*3 初期宇宙にトポロジカルな重力が存在するという立場は現在の学界では少数派といってもよく、文献も少ないものの現在でも研究は続いている。最近の研究の例としては例えば [11] が挙げられる。

*4 その一端は [12] で説明されている。