量子力学の数学とは何か

山崎雅人

1. 量子力学の数学とは？*1)

まずは問いからはじめよう：「量子力学の数学」とは何だろうか？ 現在我々が教わる量子力学の基本的な体系は，量子力学の草創期に活躍した巨人たち（ハイゼンベルグ，ボルン，パウリ，シュレーディンガー，ディラックなど）により 100 年ほど前に一旦完成されており，その成果は例えば 1932 年のフォン＝ノイマンの教科書[1] に整理されている*2)．この教科書で議論されている量子力学の数学とは主として**ヒルベルト空間論**であり*3)，現在でも量子力学の数学を学びたい学生はヒルベルト空間論の数学書を手に取ることになるのかもしれない．そうした数学書の抽象的な議論に圧倒されて挫折してしまったという経験を持つ方も少なからずいらっしゃるだろう．

しかし，上で述べた定説には何かすっきりしないところが残る．ヒルベルト空間の基礎的な部分は数学としては関数解析という分野の基礎として完成しているが，私の勝手な印象では，関数解析的な微妙さを日常的に気にしながら量子力学を研究している研究者は実は少数であるように感じられるし*4)，そもそも物理学者の間では関数解析的な問題意識が共有されていないことも多いと思う．例えば，関数解析では作用素は定義域をきちんと定めて議論しないといけないし*5)，非有界作用素の取り扱いはかなり慎重でなければならないはずであるが，物理の本ではこの辺りがいい加減なことが多い．これは物理学者の数学が厳密でないというよくある話になっているかもしれないが，逆にいえば物理学としての量子論の理解の基礎のためにヒルベルト空間論の数学的な詳細がどこまで本質的かどうか考え直す余地があるのかもしれない*6)*7)．

量子力学の数学が何であるのかは深遠な問いであり，量子力学の建設の過程で既に様々な思考がなされてきた．フォン＝ノイマン自身も教科書の出版からわずか 3 年後に，バーコフに宛てた手紙の中で*8)彼自身が完成させたヒルベルト空間論による量子力学の枠組みを疑い出すに至っている．実際フォン＝ノイマンはその後彼の名を冠したフォン＝ノイマン環の理論（後述）や量子論理などの研究へと進んでいく．ヒルベルト空間論が量子力学にとって重要な数学であるにせよ，異なる数学的アプローチも存在するであろうし*9)，その

*1） 本稿は「数理科学」の記事（Vol.62-1，pp.39-44，サイエンス社，2024 年）の著者稿である．

*2） フォン＝ノイマンの業績については文献 2) が歴史的内容と数学的内容の両方をカバーしており興味深い．

*3） 文献 1) の邦訳への湯川秀樹による序文では，量子力学におけるヒルベルト空間が相対性理論における 3 次元ユークリッド空間や 4 次元ミンコフスキー空間に対比させられている．

*4） もちろん，数学的に厳密に量子力学を研究されている方をはじめ，例外は少なくないし，この文章の読者のあなたもその一人かもしれないので気を悪くなされないよう．ただ，大学の物理学科で量子力学を教えている教員のすべてが数学としての関数解析に精通しているわけではないというのは正しいのではないかと思う．

*5） 例えば，演算子が自己共役かどうかは定義域に依存する主張である．これらの事項について物理学者向けに日本語で平易に説明したものとして文献 3) を挙げておく．

*6） 趣旨は異なるが，Asher Peres の名言[4] は示唆的である：“Quantum phenomena do not occur in a Hilbert space. They occur in a laboratory.”

*7） この原稿を書いている最中にも，「ヒルベルト空間の数学的な定義は物理的ではないので代わりに急減少関数の空間を考えるべき」という趣旨の（やや哲学的な）論文が出ていたくらいである[5]．少なくともそういう問題意識を持って論文を書く人は世の中に存在するということだ．

*8） “I would like to make a confession which may seem immoral: I do not believe absolutely in Hilbert space any more.”[6]

*9） 例えば圏論[7]．

ような努力の中から量子力学の新たな理解が生まれてくる可能性もある．量子力学の基礎についての議論はしばしば哲学的になりがちであるが，問題が数学的に定式化できれば少なくともその論理展開の正しさについては誰でも合意できるという利点もある．

そこで本稿では，通常のように既に完成されたものとしての量子力学の数学について述べる代わりに，「量子力学の数学」とは何であるのか，断片的な手がかりを取り上げ探究してみることにしよう．数学的定義や結果についてはきちんと述べずに済ませたところがほとんどであるが，何はともあれ気軽に読んでいただけたらと思う．

2. 線型代数としての量子力学

まずは量子力学の基礎事項を思い出しておこう．量子力学についての詳しい説明は教科書に譲るとして，ここでは次のことを思い出しておこう：量子力学の観測量は，複素ヒルベルト空間に線型に作用する**エルミート演算子**により与えられる．

以下ではしばらく有限次元のヒルベルト空間を考えよう．この場合，ヒルベルト空間は有限次元の複素ベクトル空間と思ってよく，その状態を指定する波動関数 $|\psi\rangle$ は，ベクトル空間の基底を選ぶことで複素成分のベクトル $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_n)$ として表現できる（ここで n は成分の数，つまりベクトル空間の次元）．このベクトルに線型に作用するエルミート演算子 A というのは要するに複素なエルミート行列 $A=(A_i^j)$ のことである．行列がエルミートであるとは複素共役と転置を合わせて行う共役操作 $\dagger$ について不変であること（$A^\dagger=A$）を意味した．この行列はヒルベルト空間の元 ψ に対し $\psi_i\to\psi_i'=\sum_{j=1}^n {A_i}^j\psi_i$ と行列とベクトルの積により線型に作用する．行列 A の各成分は一般に複素数であるが，特に A はエルミートなのでその固有値 $a_1,\ldots,a_n$ は実数であり，それらのうち一つが物理的に観測されるというわけだ．行列を固有値分解すると，固有空間に対する射影演算子 $P_1,\ldots,P_n$ により $P=\sum_{i=1}^n a_iP_i$ と表され，観測[*10)]の際にはあるラベル i が選び出され，射影演算子 P_i のうちの一つが作用して固有値 a_i が観測されることになる．

量子力学においては状態ベクトル ψ は複素ベクトルであるがその絶対値の二乗が確率を与え，特に確率の保存から ψ の 2-ノルム $||\psi||_2:=\sqrt{\sum_i|\psi_i|^2}$ が保存される．これは古典的な確率論の場合と対照的である：古典論では非負の実数を成分に持つ確率ベクトル $\vec{p}=(p_1,\ldots,p_n)$ を考え，その 1-ノルム $||p||_1:=\sum_i|p_i|$ を保存する線型変換を考える．つまり，古典論が非負の数に対する 1-ノルムを使っているのに対して，量子論は複素数に対する 2-ノルムを用いているという違いがあり，この意味で量子論は一種の確率論と言える[*11)]．

「複素数は難しい，抽象的だ」との印象を持つ読者もいらっしゃるかもしれないが，数学的には複素数のほうが話が簡単なことは多く[*12)]，実際大学初年度で教わる線型代数はどちらかというと量子力学的な線型代数だと言えなくもない．日本の物理学科のカリキュラムでは量子力学は解析力学，熱力学，統計力学などを修了した後に学部 3 年生から教え始めることが多いようであるが，線型代数としての側面に着目すれば，線型代数を履修したばかりの大学初年度の学生でも量子力学の基礎的な部分はかなり理解できるのではないかと思う．実際，ヒルベルト空間として成分の数が $n=2$ である系（qubit）を考えることにすると，そこに作用するエルミート行列はパウリ行列や恒等行列の和で書けてしまうのでかなり具体的だ．さらに複数の qubit を集めてきて状態のテンソル積を考えることをマスターすれば，量子情報の基礎については既にかなりの部分が理解できたことになっているだろう．

量子力学には観測量，状態，測定などの複数の側面が絡み合って登場するが，少なくとも数学的には，もし仮にヒルベルト空間上の観測量とその固有値を与える測定という枠組みが与えられてしまえば，今度はその状態に対するボルン則を導けることが知られていること（グリーソンの定理[9)]）は注目に値する．この定理は次元が 3 次元以上[*13)]の有限次元ヒルベルト空間上で射影演算子 P_i に対して加法的に与えられる測度 $\mu(P_i)$ は，密度行列 ρ を用いて $\mu(P_i)=\mathrm{Tr}(\rho P_i)$ と与えられることを主張する（つまり，ボルン則が導出で

*10） ここでは射影演算子で表される測定を考えた．

*11） より一般の p-ノルムを考えたくなるが，$p>2$ のとき p-ノルムを保つ線型変換は成分の置換しか存在しないことが示されてしまうので，この拡張はうまくいかない[8)]．

*12） 例えば，一変数多項式は次数さえ保っておけば係数を変化させても重複度を込めた複素根の数は変わらない（代数学の基本定理）．一方，実数の根の数は多項式の係数についてのよりデリケートな情報が必要となる．

*13） 次元が 2 のときにはグリーソンの定理には反例が知られている．

きる）．この立場からすると，量子力学にとって一義的な謎となるのは，なぜ複素ベクトル空間に線型に作用するエルミート行列を観測量として考えるかである．

3. 量子力学を拡張できるか？

さてここまで既存の量子力学を考えてきたが，今度は視点を変えて量子力学を修正することができるかどうか考えてみよう[*14)][*15)]．仮に最終的に量子力学を変更しないにしても，どのような仮定から出発して量子力学を導出できるのかが明らかになれば，量子力学の本質に迫れる可能性がある．

量子力学を拡張する試みはこれまで数多くなされてきたが，興味深いのは量子力学の創始者らによる議論である．彼らが気にしたのは次のことである：先に述べたように，量子力学においては物理的な観測量はエルミート行列で表されるが，二つのエルミート行列 A, B の積 AB は A と B が交換しないとき一般にはエルミートではないのである：$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA \neq AB$．つまり，何か二つの量があったときに，それぞれが観測できてもその積が観測できないことになり不自然に思える．（古典力学ではこのような問題は生じないことにも注意しておこう．）

そこでエルミート性を保つように積を定義することを考えよう．素朴に積を定義するとエルミート共役が BA になってしまったので，先回りして BA も含めて

$$A \circ B := (AB + BA)/2 \tag{1}$$

と定義してやればよい．この積は通常の積とは違って結合則を満たさない（つまり一般には $(A \circ B) \circ C \neq A \circ (B \circ C)$ である）ので注意が必要であるが，一方で条件

$$A \circ B = B \circ A\,,$$

$$(A \circ B) \circ (A \circ A) = A \circ (B \circ (A \circ A))\,,$$

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \circ A_i = 0 \Rightarrow A_i = 0 \quad (\forall i)$$

を満たす．上記の三条件を満たす代数のことを形式的実なジョルダン代数と呼ぶ[*16)]．

量子力学においては $A, B, \ldots$ はエルミート行列である上の関係式は自動的に成り立つが，それでは今度はより一般の形式的実なジョルダン代数から出発すれば新しい量子力学が定式化できるのではないかという期待がもてる[*17)]．

1934 年にジョルダン，フォン＝ノイマンおよびウィグナーは有限次元の単純な（つまりそれ以上分解できない）形式的実なジョルダン代数を分類した[10)]．彼らの分類結果は 5 種類の可能性を与えるが，そのうち 4 種類は行列で表現できる：実数・複素数・四元数上での行列環から (1) 式のように積を定めて得られる 3 種類の代数およびクリフォード代数である．最後の 5 つ目は八元数上の 3×3「行列」に当たる例外型の代数である：「行列」と書いたのは，八元数は結合的ではないので通常の行列とは異なるからである．これらのジョルダン代数に対してシュレーディンガー方程式の形式的類似を考えることもできる．行列表示があるジョルダン代数の場合には量子力学と大差ない理論が出てくるようだが，例外型のジョルダン代数からは本質的に新しい理論が構成できる[12)][*18)]．

ここまで考えてきたことからもわかるように，量子力学の類似を考えるときには「なぜ積が結合的であるのか」ということ自体も問題になる．この点に関連して，グルギンとペーターセンは論文 13) においてジョルダン代数に現れた積 $A \circ B$ のみならず，系の対称性を記述する括弧 $[A, B]$ が定まっていると仮定した．連続的な対称性は**リー代数**で記述されるので，この括弧はリー代数の満たすべき性質，例えばつまり反対称性やヤコビ恒等式を満たしている：

$$[A, B] = -[B, A]\,,$$

*14) 「量子力学を修正する」などと聞くと怪しそうな話に聞こえるかもしれないが，量子力学と双璧をなしている一般相対性理論ではそれを拡張した修正重力理論が議論されており，例えばダークエネルギーについての観測によって一般相対性理論からのずれの大きさに対する制限がついている．同様の議論は量子力学についてもあってもいいかもしれない

*15) 現在の量子力学を説明する際に，「実験と合うからそれでよい」という説明がなされることもありそれにはもちろん一理あるが，実際には量子力学からの微妙なずれを観測するためには量子力学を変形した理論自体の理解が必要になる可能性が高い．その気になって注意深く探さないと違いに気づかないかもしれないからだ．

*16) Pascual Jordan（伝記は文献 11)）に由来した名前．

*17) 形式的実なジョルダン代数では冪 $A^{n \geq 0}$ やより一般に A の関数 $f(A)$ の値も括弧のつけ方によらずに定まることが示されるので物理的にそれほど不自然ではない．

*18) 今のところこの「八元数量子力学」自体が自然界の理解のために直接に役立っているという話はないようであるが，この例外型ジョルダン代数自体は 5 次元超重力理論に応用されており，素粒子の標準模型への応用も考えられている．

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0\ .$$

このようなリー代数の作用があると，対称性の作用や付随したネーター不変量，例えばエネルギー保存を議論することができるので物理的には自然に思える．さらに，リー括弧が積 $\circ$ に対してライプニッツ則を満たすと仮定した：

$$[A,B\circ C]=[A,B]\circ C+B\circ[A,C]\ .$$

彼らの論文では，系を分割したときに観測量の代数も部分系の観測量の代数に自然に分割するという条件をさらに要請することにより結合的な積のみが許されることを論じた．さらに，このとき定数 λ が存在して，

$$(A\circ B)\circ C-A\circ(B\circ C)=\lambda\,[[A,C],B]$$

が成立することを示した[*19)]．ここでパラメーター λ はプランク定数 $\hbar$ の役割を果たしており，古典力学のとき $\lambda=0$，量子力学のとき $[A,B]:=(AB-BA)/(2i\hbar)$ とすると $\lambda=\hbar^2\neq 0$ である．この枠組みでは量子力学と古典力学とが一つの代数的枠組みで記述されたことは注目に値する[*20)]．なお，λ は系全体について共通な普遍的な値になることにも注意しておこう．

ここまで量子力学の基礎づけについての文献の一端を紹介してきたが，有限次元の量子力学については物理的にもある程度妥当な過程のもとで一意性が示されており，議論の余地はあるものの量子力学を修正するのは容易ではない．

4. 非線型量子力学

量子力学を修正しようとするさらなる方向性として，ここまで仮定してきた線型性の仮定を外した非線型量子力学があるので言及しておこう．このような試みの中で有名なものの一つがワインバーグによる**非線型量子力学**[15)] である．これは大雑把にいうと行列 A^i_j だけではなくより高階のテンソル $A^{i_1,i_2}_{j_1,j_2}, A^{i_1,i_2,i_3}_{j_1,j_2,j_3},\dots$ を観測量として考え，それらを組み合わせたハミルトニアンにより時間発展を考えることにあたる．これは対称性と保存則のアイデアを取り込んでおり，特にエネルギーは保存するようになっている．この理論は特にもともとの線型な量子力学を特別な場合として含んでいるので，観測によりその非線型性に制限をつけていくことができると期待された．

しかし，この非線型量子力学には理論的に不自然な点があることが指摘された[16)]．この理論では非線型な観測量として何を許すかに選択肢があるが，まず，一般の非線型な量を観測できるとすると十分離れた二人の間で光速を超えた情報を伝達することができてしまう（no-signal 条件を破る）．非線型な観測量に制限をつけることによりこのようなことが起こらないようにはできるが，今度は別の問題が生じる．量子力学では観測を行ったときに複数の観測結果が可能である．線型な量子力学では一旦観測が行われてしまえばそれらの異なる分岐の間に干渉効果はないが，今の状況では異なる分岐の間で干渉が生じ，通信ができてしまうことが示せる．これは，量子力学の多世界解釈の言葉でいえば，我々の世界とは別の世界と通信できてしまうことになる．これは必ずしも論理的に矛盾というわけではないが，この状況では今行う観測結果は原理的には今までの宇宙で行われたすべての観測の履歴に依存してしまうので，原理的には宇宙のすべてを知らずには予言ができなくなってしまう危険性がある．この他にも非線型量子力学を使うと NP 完全な問題が解けてしまうなどの計算量の立場からの特異性も指摘されており[21)]，現在でも非線型量子力学の研究は続いているものの（例えば文献 17)），満足のいく非線型量子力学の理論を考えるのはどうも難しいようである．

5. 無限自由度の量子論とフォン＝ノイマン環

さてここまではもっぱら有限自由度の量子力学を議論してきた．それでは無限自由度に行ったときに何が起こるのだろうか？

物理学者が無限自由度を考えるときには，n 次元のヒルベルト空間を考え，その n を素朴に大きくしたものを念頭に置いていることが多いというのが個人的な印象である[*21)]．しかし，数学的には無限次元特有

---

*19） より物理的な要請に遡りここでの議論を正当化しようとする試みもある[14)]．そこでは二乗積 $A\circ A$ が重要な役割を果たす．二乗積は対称錐という幾何を定義しており数学的にも興味深い．

*20） 量子力学には一般に超選択則（superselection rule）が存在する．例えばゲージ対称性が破れずに存在するときには電荷の異なる状態の重ね合わせを考えることはできず，密度行列の非対角成分はゼロになってしまう．これはある意味理論の一部が古典的になっていることを意味しており，量子力学の導出においてはこのような部分的な古典性を許すように理論を定式化しておく必要がある．

*21） この立場をさらに徹底して推し進めると，「無限自由度の量子論に現れる微妙さは物理的には重要ではなく，物理としては qubit こそが本質である」（qubit 帝国主義？）という考え方に行き着

の現象が数多く存在しており*22)，関数解析の数学的微妙さのほとんどはこの無限に由来している*23)．こうした無限を議論するために，数学ではいくつかのトリックが必要になる．例えば，ヒルベルト空間ではある定まったノルムについての完備化を考えるが，これは無限の行き先も議論できるように入れ物をあらかじめ広げておく操作だと説明できるかもしれない．

もっとも，現在の数学においてはヒルベルト空間そのものよりはそこに作用する演算子のなす代数が本質であると考えることが多い*24)．

ここからは演算子としては，ヒルベルト空間の有界作用素の部分集合を考え，その中で特にある位相（弱収束位相）について閉じている**フォン＝ノイマン環***25) を考えよう．フォン＝ノイマン環はその名の通りフォン＝ノイマンらにより先駆的に研究されたものであり，特にマレーとの共著論文[18] では，射影演算子のなす束を考えることによりフォン＝ノイマン環（のファクター）の分類が議論された．この分類では，先ほど述べた素朴な無限次元の理解は，有限次元のヒルベルト空間に対応する I_n 型で n を無限にする極限である I_∞ 型を考えることに相当する．標語的には，「無限は有限の素朴な極限で理解できる」という状況である．

I 型の特徴の一つは「最小」の射影演算子が存在することである．ある規格化された状態 $|\psi\rangle$ を考え，その状態への生成する一次元の空間 $\mathbb{C}|\psi\rangle$ への射影演算子 $P_\psi := |\psi\rangle\langle\psi|$ を考えれば，それよりも小さな部分空間への射影は存在しないのだから，最小の射影演算子となっていることが想像できるだろう．射影作用素はその像である閉部分空間と同一視することができることが知られているので，これは対応する閉部分空間の次元が最小（つまり 1）であるといってもいい．一般に，射影演算子 P は $P' < P$ となる射影演算子 P' で P と同値である（部分的等長変換で移り変わる）ものが存在しないときに有限な射影であると呼ばれる．このとき，I 型ではすべての有限次元射影が有限な射影になっていることが想像できるだろう．

しかし，II 型および **III 型**と呼ばれるフォン＝ノイマン環ではこのような最小演算子は成立せず，特に，III 型の場合には有限な射影が全く存在しない．量子場の理論を考える際には III 型（より精密には III_1 型）を考える必要があると考えられているので，III 型は物理的に重要である．

もっとも，「I 型か III 型か」という問題は数学的な主張であるので，「物理には関係のない数学的な些事だ」という意見もあるかもしれない．そこで以下では，III 型であることがより物理的なパラドックスの解決に役立つかもしれないという話題を紹介しよう．

空間的に距離 L 離れた二つの領域 A と B を考え，両者が基底状態にあるとしよう．時刻 $t = 0$ に領域 A で B に向けて光子を発するとしよう．さて，時刻 $t > 0$ で領域 B において光子が検出される確率 $p(t)$ を考えよう．量子力学的には光子が存在するには基底状態以外の状態への射影演算子 P を考え，$t = 0$ で用意した状態 $|\psi_0\rangle$ の時間発展の期待値を評価すればよい：

$$p(t) = \langle\psi_0|e^{-iHt}Pe^{iHt}|\psi_0\rangle. \tag{2}$$

情報は光速を超えては伝わらないから，(a) $t < L/c$ では $p(t) = 0$，(b) $t > L/c$ では $p(t) > 0$ が期待される．しかし (a) と (b) は両立しないことが数学的に示されてしまうのである．これが「nothing can happen for the first time」と説明されることもあるフェルミのパラドックスである[22,23]．

関数 $p(t)$ は実数 t について定義された関数であるが，時間発展を考える演算子であるハミルトニアン（エネルギー）は下から有界であるので，$p(t)$ を t の関数として実軸上から複素上半平面上で定義された正則関数に拡張することができる．複素上半平面上の正則関数が実軸上のある閉区間上でゼロであれば，実軸上のすべてでゼロでなければならないことが複素解析から示される．つまり，(a) を仮定するとすべての $t > 0$ について $p(t) = 0$ が示され，(b) と矛盾する．

このパラドックスの解決の一つの可能性が論文 24)

く．

*22) 例えば，ワイル代数の表現の一意性を主張するストーン―フォン＝ノイマンの定理も，無限次元では成立しない．

*23) 「無限」にどう取り組むかは現代数学にとって大きな課題であった．しかし，もし仮に我々の時空が物理的には量子重力理論により量子化されており，無限を用いる記述はあくまで低エネルギーでの「創発する」記述であるとすると，現代数学もより根源的な未来の離散的な数学から創発するのではないかと夢想したくなる．そこでは，無限をめぐる現代数学の苦闘は全く新たな形に昇華されるのかもしれない．

*24) ヒルベルト空間では演算子が具体的に作用しているが，それらのなす代数をまず抽象的に考えてから次にその実現を議論する．実際，演算子のなす代数と状態（線形汎関数）が与えられれば，ヒルベルト空間を再構成することもできる（GNS 構成）．同様の考えは現代数学では頻出する．

*25) 英語では von-Neumann algebra なのでフォン＝ノイマン代数であるが，フォン＝ノイマン環という日本語名のほうが定着しているようである．

で議論されている．詳細はこの論文に譲るとしても，そこでの議論で重要になるのは，III 型の代数では (2) 式により光子が領域 B に届いたかどうかを決定するような射影演算子 P がそもそも存在しないということである*26)．このような議論でパラドックスが完全に解決されたのかはさておき，少なくとも場の量子論では I 型的な直観に頼りすぎないよう注意する必要があるのは確かだろう．

量子場の理論の数学においては，一般相対論により記述される**重力**の効果を取り込むことも重要な問題である．一般相対論ではブラックホールの存在が予言され，ブラックホールでの事象の地平線の内部に飛び込んでしまうと，古典的には二度と外に戻ってくることができない．一方，さらに考察を進めると，ブラックホール周辺では量子効果により黒体輻射が生成されるというのがホーキング輻射の理論である．このような状況で事象の地平線の内部の物理を記述しようとすると，通常の量子力学では考えない状態依存な演算子を考える必要が現れるという議論がなされており[19]，このときボルン則が破れる可能性が真面目に議論されている[20]．また，ブラックホールの情報喪失問題についても，III 型のフォン＝ノイマン環が I_∞ 型になるという問題として定式化できるという可能性も議論されている[25]．このように，ブラックホールをめぐる議論では量子場の理論の数学が活躍する一方，量子論そのものが変更を受ける可能性がある．

6. 結局，量子力学の数学は何であるのか？

ここまで量子力学に関わる数学の話題をいくつか取り上げてきたが, 結局のところ「量子力学の数学が何であるか」という問いに対する最終的な答えは得られていない．しかし，その問いについて考える中で，我々はフォン＝ノイマンをはじめとする巨人たちが量子力学と格闘するなかで生み出した数学の世界に足を踏み入れることとなった．量子論は，現在でもなお色褪せぬ物理理論であると同時に，つきせぬ数学的アイデアの源である．量子力学の数学が何であるのか，その問いに対する新たな答えが与えられるとき，我々はきっと量子力学をより一段と深く理解することになるに違いない．

*26） これは直観的には不思議ではあるが，より物理的には，場の量子論の真空がエンタングルしていること（Reeh-Schlieder の定理）とも関係していることだけは付記しておく．

参考文献

1) J. von Neuman. *Die Mathematische Gründlagen der Quantenmechanik.* Springer, 1932（和訳：井上健，広重徹，恒藤敏彦『量子力学の数学的基礎』, みすず書房, 1957 年）
2) 廣島文生,『大数学者の数学 フォン・ノイマン (1)–(3)』, 現代数学社， 2021 年
3) 例えば：李宰河， 数理科学 2023 年 5 月号; 田崎晴明，`https://www.gakushuin.ac.jp/~881791/qmbj/files/QMB_AppendixA_20210129.pdf`
4) A. Peres, “Quantum Theory: Concepts and Methods,” Springer, 1995
5) G. Carcassi, F. Calderon and C.A. Aidala, arXiv:2308.06669 [quant-ph]
6) G. Birkhoff, in *Lattice Theory: Proceedings of the Second Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society, Vol. 2, American Mathematical Society, 1961*, pp. 155–184
7) C. Heunen and J. Vicary, *Categories for Quantum Theory: An Introduction*, Oxford, 2020（和訳：川辺治之『圏論的量子力学』，森北出版，2021 年）
8) S. Aaronson, `https://www.scottaaronson.com/papers/island.pdf`
9) A. M. Gleason, Indiana Univ. Math. J. **6**, 885–893 (1957); 証明を日本語で読みたければ例えば井田大輔,『現代量子力学入門』，朝倉書店，2021 年
10) P. Jordan, J. von Neumann and E. Wigner, Ann. of Math., **35** (1934), 29–64
11) B. Schroer, arXiv: hep-th/0303241
12) M. Gunaydin, C. Piron and H. Ruegg, Commun. Math. Phys. **61**, 69 (1978)
13) E. Grgin and A. Petersen, Commun. Math. Phys. **50**, 177-188 (1976)
14) A. Kapustin, arXiv:1303.6917 [quant-ph]
15) S. Weinberg, Annals Phys. **194**, 336 (1989); S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **62**, 485 (1989)
16) J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **66**, 397-400 (1991)
17) J. Broz, B. You, S. Khan, H. Haeffner, D. E. Kaplan and S. Rajendran, Phys. Rev. Lett. **130**, 200201 (2023) [arXiv:2206.12976 [quant-ph]]
18) F. J. Murray and J. von Neumann, Ann. of Math., **37**, 116–229 (1936)
19) K. Papadodimas and S. Raju, Phys. Rev. D **93**, no.8, 084049 (2016) [arXiv:1503.08825 [hep-th]]
20) D. Harlow, JHEP **11**, 055 (2014) [arXiv:1405.1995 [hep-th]]; D. Marolf and J. Polchinski, JHEP **01**, 008 (2016) [arXiv:1506.01337 [hep-th]]
21) D. S. Abrams and S. Lloyd, Phys. Rev. Lett. **81**, 3992-3995 (1998) [arXiv:quant-ph/9801041]; S. Aaronson, arXiv:quant-ph/0412187
22) E. Fermi, Rev. Mod. Phys. **4**, 87-132 (1932)
23) G. C. Hegerfeldt, Phys. Rev. Lett. **72**, 596-599 (1994)
24) D. Buchholz and J. Yngvason, Phys. Rev. Lett. **73**, 613-616 (1994) [arXiv:hep-th/9403027]; J. Yngvason, Rept. Math. Phys. **55**, 135-147 (2005) [arXiv:math-ph/0411058].

25) S. Leutheusser and H. Liu, arXiv:2110.05497 [hep-th].

（やまざき・まさひと，東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構）