ペンローズ不等式
—局所と大域をつなぐ—

山﨑雅人
東京大学理学系研究科・カブリ数物連携宇宙研究機構

（注：本稿は『数学セミナー』2025 年 10 月号特集『これが私の「推し不等式」』の記事の著者稿である.）

太古の昔から, 人類は夜空に輝く星を見上げ, 広大な宇宙に想いを馳せてきた．宇宙はあまりに広大であり，ちっぽけな星である地球に住まう我々にとって，宇宙の彼方について知ることは到底不可能に思える．決してたどり着くことのできない宇宙の彼方では何が起こっているのか？

アインシュタインの一般相対性理論によると，この宇宙を記述するのはリーマン幾何学であるのだから，上の素朴な問いをリーマン幾何学の問題としてとらえることができる．つまり，**局所**的な時空が指定されたときに, そこから時空の彼方の**大域**的情報について何がいえるのか？　このように述べてみると，局所と大域の関係を理解するという，数学において幾度となく現れる王道的なテーマが立ち現れてきたことがわかるだろう.

アインシュタインの書き下した方程式において, 地球の上に住む人間は「物質」として扱われ，一般相対論においては「幾何」の枠外からやってくるものである．しかし，物質の質量がどんどん重くなっていくと周囲の時空を大きく歪め，やがては物質は重力崩壊してブラックホールという幾何に置き換わる．このような設定では，局所と大域の関係を議論する問題を純粋に幾何学の問題として定式化することが可能になる.

ブラックホールには光でさえも逃れることのできない**ホライズン**が存在し，特にその面積 A を考えることができる．この面積は幾何学的な量であるが，特にブラックホールの近傍の幾何だけで定まるので（準）局所的な量である. [1)]

一方, 時空があるとその遠方では**質量**が定まる. 一般に一般相対論においては時空の一般座標変換のもとでの不変性が要請され，局所的な質量の概念は定義できない．しかしここでは時空が漸近的に平坦である，つまり遠くの方では平坦なミンコフスキー空間に近づくとしよう．このとき，質量（より専門的には ADM 質量）m は遠方で一種のガウスの法則を用いて定義される量である：

$$m := \lim_{\text{遠方}} \frac{1}{16\pi} \sum_{i,j=1}^{3} \int (g_{ij,j} - g_{jj,i}) n^i. \tag{1}$$

ただし $g = (g_{ij})$ は空間的な計量であり, 遠方を取り囲む曲面の外向き法線単位ベクトルを n^i と書いた．また空間は 3 次元だとした．これは「時空の彼方」で定義された量であるので，大域的に定まった量であると言ってもよいだろう.

さて，ペンローズ不等式は局所的に定義された

1)　より正確には以下では局所的な情報だけで決まる「みかけのホライズン」を考える.

量 A と大域的に定義された量 m との間に不等式を主張する．これは局所的な情報が大域的な情報を制限するという主張である：[2)]

定理 1 (リーマン–ペンローズ不等式 [8, 3])　(M, g) を滑らか，完備で連結，かつ漸近平坦で非負のスカラー曲率を持つ 3 次元多様体 M と計量 g の組とする．M の極小曲面，つまり平均曲率が消える曲面のうち最も外側にあるものをみかけのホライズンと呼び，そのすべての連結成分を集めた全面積を A とする．また漸近平坦であることから質量 m が (1) により定義される．このとき，不等式

$$m \geqq \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \tag{2}$$

が成立する．さらに等号が成立するのは，(M, g) がみかけのホライズンの外でシュワルツシルト計量（電荷も角運動量も持たないブラックホール解の空間部分の計量）に一致する場合に限る．

この不等式を予想したのは数理物理学の奇才で 2020 年にノーベル賞も受賞したロジャー・ペンローズである．彼は裸の特異点は存在しないという**宇宙検閲仮説**を用いた物理的な議論によりこの不等式を予想した [10]．系の時間発展を考えると，ブラックホール面積定理によりホライズンの面積は単調増大する．無限時間ではブラックホールは無毛定理によりシュワルツシルト解に落ち着くと期待されるが，そこでは不等式の等号が成り立つことが確認できるので，示したい不等式が成り立つことが確認できた．ここで，ペンローズ不等式自体はその動機である宇宙検閲仮説の正しさを必ずしも保証しないことには注意しよう．

ペンローズ不等式を証明するための一つの直観的なアイデアはゲロック [6] および後にジャング–ワルド [9] により提唱された．彼らは平均曲率の逆数により指定されたフロー（逆平均曲率流）を導入し, そのフローのもとで質量に当たる量（ホーキング質量）が単調に非減少であり, 時間が変化するとともに (2) の左辺と右辺を内挿することを示したのである．この議論は本質をついているが，一般にフローは有限時間で（例えば平均曲率がゼロに近づくことにより）特異点を持ってしまう．ヒュースケンとイルマネンはフローの流面を関数のレベル集合として記述し，ジャンプ現象を弱解として取り込むことによりこの議論を数学的に完成させた [8]．彼らの議論はみかけのホライズンの連結成分が一つの場合であったが，その後ブレイはその仮定を外した一般の場合に（全く別の手法を用いることで）証明を与えた [3]．

ペンローズ不等式はそれ自体興味深い不等式であるが，幾何学において解析的な手法を用いる**幾何解析**という分野（例えば日本語の本では [12] にペンローズ不等式を含めて解説がある）の一つの到達点ともみなせる．例えばペンローズ不等式においては等号成立条件は厳しく制限されており，不等式の剛性とも呼ばれる重要な結果である．またあるフローを考えることにより不等式を示すという方法は幾何解析では頻出する手法であり，逆平均曲率流は幾何解析の伝統的な問題である山辺の問題（山辺不変量）にも応用されている [4]．ペンローズ不等式からは自明に $m \geqq 0$ という結果が従うことに注意しよう．これは**正質量定理** [11] と呼ばれるそれ自体重要な主張であり，ブレイによるペンローズ不等式の証明ではこの定理が援用された．このように，ペンローズ不等式は幾何解析のほかの問題とも密接に関わっている．

---

2)　(M, g) は 4 次元時空において時間を固定した 3 次元スライスでの初期値問題を指定する．一般の初期値問題では 3 次元の計量に加え外部曲率 K_{ij} も指定する必要があるが，時間反転対称な境界条件 $K_{ij} = 0$ を選ぶと光が外にぎりぎり逃げることのできない境界捕捉面は極小曲面を与えるので，上記のように極小曲面を考えた．このような条件を外したより一般の設定でのペンローズ不等式もみかけのホライズン（の面積そのものではなく [1]）を囲む曲面の面積の最小値を用いることで方程式の右辺が局所的な予想として定式化できる [7] が，現在でも証明されていない．

ペンローズは，局所座標系でのテンソル解析に限定されがちであった一般相対論の分野において大域的な幾何学の手法を持ち込んだ先駆者の一人であり，彼の不等式は，物理的な洞察に基づくと同時に新たな数学を生み出す動機となってきた．

それではペンローズを超えて，21 世紀の我々が新しい大域的な幾何学を見出すにはどうしたらよいのだろうか？ ペンローズが古典重力の理論たる一般相対論の研究に導かれたのならば，我々が指針とするべきなのは**量子重力**の理論であると考えるのは自然であろう．実際，現在の量子重力において中心的な役割を果たす**ホログラフィー**は，重力理論の情報が，その境界にある量子場の理論の情報として理解できることをあらわしており，それ自体大域・局所原理の一つの表れであるとみなすこともできる．本稿に述べたペンローズ不等式についても，ホログラフィーによる正当化の試み [5] が存在することは注目に値する．実際，ペンローズの歴史的動機は宇宙検閲仮説であったが，ペンローズ不等式はより一般の次元で成立する一方，高次元では（少なくとも素朴な意味での）宇宙検閲仮説は破れることが知られているので，宇宙検閲仮説よりもホログラフィーの方が本質的である可能性はあると考えられる．

もちろん，量子重力を考えるためには重力そのものが量子化され，そこではペンローズ不等式自体も修正されなければならないであろう．そもそも定理 1 においてスカラー曲率が非負だと仮定したが，これは弱い観測者にとってエネルギーが非負に見えるという条件（弱いエネルギー条件）から動機付けられていた．量子論では例えば真空のエネルギーから局所的には負のエネルギーが現れ，弱いエネルギー条件は一般には破れることが知られている．実際，量子論では古典的なペンローズ不等式そのものは $O(1)$ で破れることも知られている．しかし，ホライズンの面積を一般化されたエントロピーに置き換えるなどの工夫をすることにより，量子効果を取り入れたペンローズ不等式が定式化されていることは注目に値する [2].

量子重力における大域幾何学については特にその数学的研究はまだ端緒についたばかりであるが，新たな局所・大域原理を示す量子的な幾何学の萌芽を垣間見させてくれる．そのような幾何学が将来建設されたとき，宇宙の片隅に住む我々はこの広大な宇宙をより深く理解したことになるだろう．

●参考文献

[1] Ishai Ben-Dov. The Penrose inequality and apparent horizons. *Phys. Rev. D*, 70:124031, 2004.

[2] Raphael Bousso, Arvin Shahbazi-Moghaddam, and Marija Tomasevic. Quantum Penrose inequality. *Phys. Rev. Lett.*, 123(24):241301, 2019.

[3] Hubert L. Bray. Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. *J. Differential Geom.*, 59(2):177–267, 2001.

[4] Hubert L. Bray and André Neves. Classification of prime 3-manifolds with σ-invariant greater than $\mathbb{RP}^3$. *Ann. of Math. (2)*, 159(1):407–424, 2004.

[5] Netta Engelhardt and Gary T. Horowitz. Holographic argument for the Penrose inequality in AdS spacetimes. *Phys. Rev. D*, 99(12):126009, 2019.

[6] Robert Geroch. Energy extraction. *Ann. New York Acad. Sci.*, 224:108–117, 1973.

[7] Gary T. Horowitz. The positive energy theorem and its extensions. In *Asymptotic behavior of mass and spacetime geometry (Corvallis, Ore., 1983)*, volume 202 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 1–21. Springer, Berlin, 1984.

[8] Gerhard Huisken and Tom Ilmanen. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. *J. Differential Geom.*, 59(3):353–437, 2001.

[9] Pong Soo Jang and Robert M. Wald. The positive energy conjecture and the cosmic censor hypothesis. *J. Mathematical Phys.*, 18(1):41–44, 1977.

[10] Roger Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv. Nuovo Cim.*, 1:252–276, 1969.

[11] Richard Schoen and Shing-Tung Yau. On the proof of the positive mass conjecture in gen-

eral relativity. *Commun. Math. Phys.*, 65:45–76, 1979.
［12］ 酒井隆・小林治・芥川和雄・西川青季・小林亮一. **『幾何解析』（幾何学百科** *II*）. 朝倉書店, 2018.

[やまざき まさひと]