位相的場の量子論への入門—物理学の立場から

山 崎　雅 人

1. そもそもなぜ位相的場の理論？*1)

今回の「数理科学」誌では**位相的場の理論**が取りあげられており，その記事の一つである本稿の読者は位相的場の理論に既に何らかの興味を持っている可能性が高いであろう．位相的場の理論（トポロジカルな場の理論）とは，細かいことを忘れて大雑把にいうと，その理論が定義される時空を M としたとき，物理量が M のトポロジーにしかよらない場の理論のことである．この説明からすれば，トポロジーに興味のある数学的な読者が位相的場の理論に興味を持つことはとても自然であるのがわかるだろう．

しかし，数学そのものにあまり興味のない「地に足のついた」物理寄りの読者にとっては，そもそも位相的場の理論に興味を持てるかどうかがそれなりのハードルになりうるのではないだろうか．

位相的場の理論では物理量がトポロジーにしかよらず，例えば距離に依存しない．しかし，我々の暮らしている世界でも，また高校の教科書で学ぶ物理でも，世の中は全くトポロジカルではないように見える（家から学校まで 1 km と 10 km では大違いだ！）．実際，我々の知っている力は電磁気力にせよ重力にせよ，十分遠く離れればその力が減衰してしまうので距離の依存性はとても重要である．また，粒子（例えば電子）が質量 m を持つと，m は次元を持つので，その途端に理論はトポロジカルでなくなってしまう．このようにトポロジカルな理論には強烈な制限がついているので，トポロジカルな理論を物理学者が学ぶと，「制限が強すぎて何だかつまらない理論だ」という感想が出てきてもおかしくない．自然界には面白い理論が溢れているのに，なぜわざわざそんな理論を学ぶ必要があるのだろうか？

2. 低エネルギーでの位相的場の理論

この問いに対する答えは色々考えられるし，そのヒントは本特集の記事にも数多く見つかるだろう．今回の特集の入門的記事である本稿では，その答えの一つとして「**位相的ではない物理理論に興味がある場合でも，位相的場の理論が低エネルギー極限で現れる**ことがある」という思想を紹介したい*2)．

低エネルギーというのはなんだか抽象的に思えるが，エネルギー E は温度 T と $E \sim k_B T$（k_B はボルツマン定数）と関係していると思うと，系を冷やして温度を下げていくことをイメージすればよい．ハミルトニアンが与えられるとそのエネルギー固有値（エネルギー準位）が定まり，一番小さい固有値に対応する固有ベクトルが**基底状態**で

*1） 本稿は雑誌「数理科学」の記事（Vol.63-12, pp.15-21, サイエンス社, 2025 年）の著者稿である．

*2） なお，これとは逆に，エネルギーをとても高くしていった初期宇宙において位相的場の理論が現れる可能性も議論されている．例えば 1) を参照されたい．

ある．一般の状態は基底状態やそのさまざまな励起状態の量子力学的重ね合わせによりできている．系の基底状態とその第一励起状態のエネルギー固有値をそれぞれ E_0, E_1 としたとき，定義により $E_1 > E_0$ だが, その差 $\Delta = E_1 - E_0$ のことを**エネルギーギャップ**と呼ぶ（図 1）．この量は有限自由度の量子系では常に有限だが, 系のサイズを大きくしていっても有限の値 $\Delta > 0$ にとどまることがある．この時，系はギャップを持つという．ギャップを持つ系を $k_B T \sim \Delta$ 程度の温度 T よりもさらに冷やしていくと，統計力学によれば励起状態からの寄与はボルツマン因子 $\exp(-\Delta/(k_B T))$ で抑制されるので，やがては基底状態からの寄与が支配的になっていくことになる．

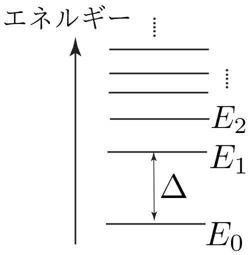

図 1　基底状態と第一励起状態のエネルギー E_0, E_1 の間にギャップ $\Delta > 0$ がある時，系はギャップを持つとよぶ．

「系を冷やす」などと書くと冷蔵庫にでも入れなければいけないと考えてしまうかもしれないが, 必ずしもその必要はない．例えば電子系（半導体や絶縁体）を考えるとその典型的なギャップのエネルギースケールはざっくりと電子ボルト $1\,\mathrm{eV} \sim 10^4\,\mathrm{K}$ のオーダーであり，それに比べれば我々の日常的な温度（$\sim 10^2\,\mathrm{K}$）はかなり低い．また素粒子論においても系にギャップがあるかどうかは例えばヤン–ミルズ理論の閉じ込めの問題として定式化されており，ミレニアム懸賞問題の一つにもあげられているが，ここで現れるギャップの典型的なスケールは $10^8\,\mathrm{eV} \sim 10^{12}\,\mathrm{K}$ と非常に高温である．

低エネルギー極限では，理論に存在する粒子の質量などのスケールは全て相対的には実質無限大のスケールのようにみえ，関連した物理を繰り込む（積分する）ことができる．素朴な考え方からするとそのような極限では何も残っていない自明な理論になってしまうように思われるし，その直観が正しいこともある．しかし基底状態が唯一ではなく，基底状態だけ考えても非自明な理論が残ることがある*3)．その理論はスケール依存性を全く持たず，位相的場の理論であることが示唆される．特に，基底状態の数も一般には時空のトポロジーに依存する．このように，通常の複雑なダイナミクスを持つ理論に比べると，いわば自明に近いが自明ではないという絶妙なところに位相的場の理論が現れるわけである．

3. 対称性の自発的破れ

ここまでの議論はやや抽象的だったので具体例で説明してみよう．位相的場の理論を議論する前に，トポロジカルではない場の理論から議論をはじめる．我々が住んでいるのは 4 次元時空である（ようにみえる）ので，以下では全て 4 次元時空を考えることにしよう．

場の理論においてはまず場を考える必要がある．場の例として複素スカラー場を考えると，これは時空 M の各点 x において複素数 $\Phi(x)$ を定める．このスカラー場がポテンシャル

$$V(\Phi) = \lambda(|\Phi|^2 - v^2/2)^2 \quad (\lambda, v > 0) \quad (1)$$

を持つとしよう．このポテンシャルは Φ の絶対値にしかよらないので理論は $U(1)$ 位相回転 $\Phi \to e^{i\alpha}\Phi$ の元で対称である．Φ の極座標分解を $\Phi = |\Phi|e^{i\theta}$ と書いたとき，これは

$$\theta \to \theta + \alpha \quad (\alpha \sim \alpha + 2\pi) \quad (2)$$

という角度方向のシフトであることに注意しよう．

ポテンシャルが与えられるとそのエネルギーを最小にする配位（真空）を求めるのが常道だが，今回の場合その条件は $|\Phi| = v/\sqrt{2}$ となる．この条

*3)　量子力学においては基底状態は縮重し得るので，ゼロ温度でエントロピーが 0 になるという熱力学の第三法則は一般には成り立たない．第三法則は一般にかなり強い意味で破れることが議論されている2)．

件はθの値を決定しないので，真空はθの値の取り方の分だけ無限個存在することになる．もちろん，特定のθの値を選べばそこでは対称性 (2) は破れる．これは真空の選び方により対称性が破れる**自発的対称性の破れ**の例である．この時，一般論として質量を持たない南部–ゴールドストンモードが現れることが知られているが，その役割を果たしているのがθである．動径方向$|\Phi|$は質量vを持つ一方，角度方向θは非自明なポテンシャルを持たないので，vよりもずっと小さいエネルギースケールでは動径方向のモードは凍結され，ギャップレスモードθのみが残ることになる．そのラグランジアンは運動項のみを持ち，元の複素スカラーの運動項$d\Phi \wedge \star d\Phi^\dagger$の角度方向$\theta$のみを残して

$$\frac{v^2}{2} d\theta \wedge \star d\theta \tag{3}$$

で与えられる[*4]．ただし，$\star$は4次元時空M上のホッジスター演算子である．

4. ゲージ場の登場

さてこの模型を発展させ，新しい登場人物である**ゲージ場**を加えることにしよう．ここで考えるゲージ場は教科書で学ぶ電磁気学と同様に$U(1)$に値をもつ1-形式でありゲージ変換

$$A \to A + d\alpha \quad (\alpha \sim \alpha + 2\pi) \tag{4}$$

のもとでの理論の不変性を要求する．一般に，ゲージ対称性は理論の冗長性を表しているので，ゲージ場自体は物理的には観測できず，観測できるのはゲージ対称性のもとで不変な物理量，例えば$F = dA$である．（外微分が$d^2 = 0$を満たすことに注意．）このFはその成分に時間方向を含むかそうでないかに応じて電場や磁場を表しており，任意の閉2次元曲面Σに対して

$$\int_\Sigma \frac{F}{2\pi} \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

を満たすことが知られている．これは物理的にはゲージ場がΣを貫く磁束の量子化を表しており，磁荷をもつモノポールが電荷の量子化を要請するというディラックの議論においても現れる重要な性質である．

5. ヒッグズ機構

さてこのゲージ場を先に考えた複素スカラー場Φに結合させよう．この場には$\Phi \to e^{i\alpha}\Phi$という$U(1)$対称性があったが，これは大域対称性と呼ばれる対称性で特に変換のパラメータαは時空の依存性を持たない定数である．ここで$\alpha(x)$のように時空の依存性を持たせると運動項 (3) は不変ではないが，変換 (2) のもとで同時に (4) と変換するゲージ場Aを考え，運動項 (3) を

$$\frac{v^2}{2}(d\theta - A) \wedge \star(d\theta - A) \tag{6}$$

と変更すれば，ラグランジアンは不変となる[*5]．ゲージ場自体も力学的な自由度とみなすことにして，ゲージ場の運動項$\propto dA \wedge \star dA$も加えておこう．このように，一般に大域対称性が持つ理論にゲージ場を導入して大域対称性をゲージ対称性に変更する操作のことをゲージ化と呼んでいる．

さて，ゲージ場の存在によって何か変化が生じただろうか．元のΦ理論に存在した$U(1)$対称性 (2) は，ゲージ化された理論ではゲージ場の変換 (4) により理論の冗長性に吸収できるので大域対称性としては存在せず，従って南部–ゴールドストンモードも存在しない．しかしその代わりにラグランジアンの運動項は (6) のように修正され，特にv^2A^2という項が存在し，Aが質量を持つ．つまり，南部–ゴールドストンモードθがもともとは質量を持たなかったAに「食べられて」Aが質量を持つようになるというアンダーソン–**ヒッグズ機構**を表している．実は，この場合のヒッグズ機構は有名な超伝導（の相対論版）と密接に関係して

*4)　添え字をつけてあらわに書くと，これは$(v^2/2)(\partial_\mu\theta)(\partial^\mu\theta)$となり，次元を合わせるための係数$v$を除けばこれは実スカラーの標準的な運動項である．

*5)　ゲージ場Aは$d\theta - A$のような組み合わせでゲージ不変性を実現しており，関連文献ではストッケルベルグ場と呼ばれることがある．

おり，ギンツブルク–ランダウによる現象論的な理論では秩序変数と呼ばれる複素スカラー場 Φ が電磁気学を表す A と結合し光子に質量を与えることにより，磁場が超伝導体内部に入り込めないというマイスナー効果を引き起こすのである．

さて我々の低エネルギー極限の議論に戻ると，ゲージ場の動径方向の自由度は既に凍結されていたが，今残った自由度であるゲージ場もヒッグズ機構により質量 v を持つので，そのスケールよりも低いエネルギーにいくとゲージ場の自由度も凍結され，従って，v よりも低いエネルギースケールでは自明な理論が得られると結論できる．色々議論した末に自明な理論になってしまったのだからがっかりしてしまう読者もいるかもしれないが，実はここまでの議論をほんの少し修正することで位相的場の理論を得ることができるのである．

6. 理論の微修正

さてここまでの理論ではゲージ場が (4) と変換したときに (2) のように変換する理論を考えた．これは場 Φ（あるいは θ）がチャージ $+1$ を持つと表現される．それでは，場のチャージが $n \in \mathbb{Z}$ である理論を考え，θ の変換則を

$$\theta \to \theta + n\alpha \tag{7}$$

と変更するとどうだろうか？

チャージを n に変更しても一見何も変わらないように見えるが，θ も α も $U(1)$ に値をもち 2π 周期を持つことに注意すると，$\alpha = 2\pi/n$ と選ぶと α は非自明だがその θ への作用は 2π シフトなので自明である．つまり，ゲージ場の立場からすると，$U(1)$ ゲージ対称性のうち $\mathbb{Z}_n \equiv \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ という離散部分群はヒッグズ効果により「食べられる」ことなくゲージ対称性として残っていることになる．このことは，理論が低エネルギー極限では完全には自明にならない可能性を示唆する．

7. 双対変換と BF 理論

そこでこの理論をもう少し詳しく調べてみよう．まず, 出発点となるのは θ の運動項 (6) を変更した

$$\frac{v^2}{2}(d\theta - nA) \wedge \star(d\theta - nA) \tag{8}$$

である．このラグランジアンは (4)，(7) のもとでの不変性を持つことに注意しよう．また，この項は補助場である 3-形式 H を導入することにより

$$-\frac{1}{2v^2}\frac{H}{2\pi} \wedge \star\frac{H}{2\pi} + (d\theta - nA) \wedge \frac{H}{2\pi} \tag{9}$$

と書き直すことができることにも注意しよう．（ただし，ここで $H/(2\pi)$ のように 2π をつけたのは後の都合のためである．）実際, このラグランジアンを H について変分すると $H/(2\pi) = v^2 \star (d\theta - nA)$ が得られ，それを代入すると作用 (8) に戻る．これは場 H についての平方完成である．

今度は H ではなく θ について先に変分することを考えよう．θ は $d\theta \wedge H/(2\pi)$ あるいは部分積分して $\mathcal{L}_{\theta,H} \equiv -\theta \cdot dH/(2\pi)$ という項にしか現れていないので，拘束 $dH = 0$ を表す未定乗数である．ただしここで注意するべきなのは，θ はそれ自体 2π の周期性を持つので，$d\theta$ の S^1 での積分 $\oint_{S^1} d\theta = \theta(2\pi) - \theta(0)$ は必ずしも 0 にはならず $2\pi\mathbb{Z}$ だけの不定性を持つことである．そこで例えば C を閉じた 3 次元部分多様体として $S^1 \times C$ という 4 次元時空を考えると，ラグランジアン $\mathcal{L}_{\theta,H}$ からは $d\theta$ を S^1 方向に積分, H を C 方向に積分することで $2\pi\mathbb{Z} \cdot \int_C (H/2\pi)$ という寄与が現れるが，これが経路積分する時の被積分関数 $\exp(i\mathcal{L}_{\theta,H})$ に曖昧さを持たないためには M の任意の閉じた 3 次元部分多様体 C に対して

$$\frac{1}{2\pi}\int_C H \in \mathbb{Z} \tag{10}$$

が要請される．これは 1-形式のゲージ場 A の量子化条件 (5) の類似である．実際，$dH = 0$ から少なくとも局所的には $H = dB$ とかけ，また H を定めても B には $B \to B + d\beta$ という冗長さがあるので，量子化条件 (10) と合わせて B は A と同様に $U(1)$ ゲージ場であると結論できる．ただし

A が 1-形式だったのに対し B は 2-形式であることに注意しておこう．

さて，$H = dB$ を作用 (9) のうち $\mathcal{L}_{\theta,H}$ 以外の残りの部分に代入すると

$$-\frac{1}{2v^2}\frac{dB}{2\pi}\wedge\star\frac{dB}{2\pi}+nA\wedge\frac{dB}{2\pi} \tag{11}$$

を得る．ここで v よりもずっと低いエネルギースケールを考えると事実上 $v\to\infty$ であり，この極限では

$$\mathcal{L}_{BF}=\frac{n}{2\pi}A\wedge dB \tag{12}$$

を得る．あるいは部分積分すると

$$\mathcal{L}_{BF}=\frac{n}{2\pi}B\wedge dA=\frac{n}{2\pi}B\wedge F \tag{13}$$

と書いてもいい．最後の式は「BF」と書けているので，この理論は（割と安直な名前の付け方ではあるが）しばしば **4 次元 BF 理論**と呼ばれる．

8. $\boldsymbol{BF}$ 理論の観測量

ラグランジアン (12) においてはホッジスター作用素が姿を消し，4 次元時空での計量の情報は使わなかったので，この理論で何を計算してもその結果は計量にはよらないはずであり，具体的な計算をせずとも理論は位相的であると結論できる．つまり，低エネルギー理論として位相的な場の理論である BF 理論が得られたことになる．

もっとも，我々は $n=1$ の時にすでにこの理論は自明であると結論づけたのであった．$n>1$ の時にはもとの $U(1)$ 対称性のうち $\mathbb{Z}_n$ 対称性が残っているので理論が非自明である示唆は得られているが，ゲージ対称性はあくまで理論の冗長性であるのでこれだけから理論が非自明であると結論することはできない．

そこでこの理論の観測量を考えよう．通常の電磁気学ではゲージ場 A を直接観測することはできないが，その場の強さにあたる $F=dA$ あるいはその関数はゲージ変換 (4) のもとで不変であり観測可能量である．同様に，2-形式のゲージ場 B の場の強さ $H=dB$ やその関数も観測可能量であると期待できる．

しかし，それらの量は局所的に自明になってしまうことがすぐわかる．ラグランジアン (12) の変分から得られる運動方程式は $F=dA=0$ および $H=dB=0$ なのである．これは局所的なゲージ不変な演算子の値を測定しようとしてもいつも自明になってしまうということを表している．もっとも，考え直してみるとこれは驚くべきことではない—我々はトポロジカルな理論を考えていて時空の多様体は局所的にはそのトポロジーが自明なのだから．

時空のトポロジカルなデータを拾ってくるためにはもっと大域的な情報を考える必要がある．時空 M の取り方によってはゲージ不変な量を考えることができる．まず，M に 1 次元の閉曲線 Γ があるとゲージ場 A に対して**ウィルソンライン**と呼ばれる演算子

$$\hat{W}(\Gamma)=\exp\left(i\int_\Gamma A\right) \tag{14}$$

を考えることができる．この演算子はゲージ場 A を含んでいるのでゲージ変換のもとで変換してしまいそうだが，Γ を境界に持つような 2 次元曲面 S（$\partial S=\Gamma$）が与えられるとすると，ストークスの定理を用いて

$$\hat{W}(\Gamma)=\exp\left(i\int_S F\right) \tag{15}$$

と明白にゲージ不変な形に書くこともできる．後者の式では $\hat{W}(\Gamma)$ の値は S の取り方に依存しそうだが実はそうでない．もし S の代わりに別の S'（$\partial S'=\Gamma$）をとると，S,S' はどちらも Γ を境界として持つので Γ に沿って両者を貼り合わせると閉じた 2 次元曲面 $\underline{S}=S\cup_\Gamma(-S')$ が得られ（図 2 参照．ただし $-S'$ は S' の向きを逆にしたことを表す），(5) により $\int_\Sigma F-\int_{\Sigma'}F=\int_{\underline{S}}F\in 2\pi\mathbb{Z}$ となるので $\hat{W}(\Gamma)$ の値が曖昧さなく定まっていることがわかる．

BF 理論はトポロジカルなのだから，$\hat{W}(\Gamma)$ は Γ のトポロジーにしかよらないはずである．実際，Γ を Γ' に連続変形すると，$\partial S=\Gamma\cup(-\Gamma')$ とな

る 2 次元曲面 S が存在するはずだが（図 3），S について前と同様に (5) を適用すると

$$\int_\Gamma A - \int_{\Gamma'} A = \int_{\partial S} A = \int_S F \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{16}$$

となるので，量子化条件 (5) より $\hat{W}(\Gamma) = \hat{W}(\Gamma')$ が得られる．

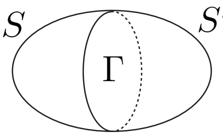

図 2　曲線 Γ に沿って境界をもつ二つの 2 次元曲面 S, S' を貼り合わせる．

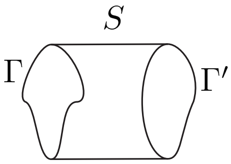

図 3　曲線 Γ を 2 次元曲面 S に沿って別の曲線 Γ' に連続変形する．

ここまでゲージ場 A について考えたが，ゲージ場 B についても同様に，2 次元閉曲面 Σ があると

$$\hat{H}(\Sigma) = \exp\left(i\int_\Sigma B\right) \tag{17}$$

をゲージ不変な観測量として考えることができる．

9. 電磁ペアリングとしての絡み数

量子場の理論においては，一般に演算子 $\hat{O}$ が定まると，経路積分によりその期待値 $\langle\hat{O}\rangle$ を定めることができ，例えば

$$\langle\hat{W}(\Gamma)\hat{H}(\Sigma)\rangle \tag{18}$$

を考えることができる．ここで Γ と Σ はそれぞれ 4 次元時空内の 1 次元・2 次元部分空間であるので，必要ならば一般的に交わらないものと仮定して良い．この時，

$$\langle\hat{W}(\Gamma)\hat{H}(\Sigma)\rangle = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\mathrm{Lk}(\Gamma,\Sigma)\right) \tag{19}$$

を満たすことが知られている[3]．ここで，$\mathrm{Lk}(\Gamma,\Sigma) \in \mathbb{Z}$ は**絡み数**（linking number）と呼ばれ，Γ と Σ の 4 次元空間内での絡みを数学的に定量化した位相不変量である．（4 次元時空を想像するのは難しいが，3 次元時空で二つの 1 次元部分空間が絡み合う様子を図 4 に示した．*6)）この不変量は非自明であるから，我々の位相的場の理論が $n > 1$ のとき非自明であることが確かめられたことになる．

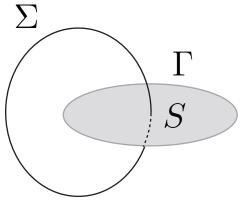

図 4　4 次元空間で 1 次元曲線 Γ と 2 次元曲面 Σ が絡みあう様子（を 3 次元空間で表現したもの）．$\partial S = \Gamma$ となる S は Σ と交差する．Γ と Σ の絡み数は S と Σ の交点数として定義できる．

我々は Γ と Σ のトポロジーのみに興味があるので，これらを自由に変形することができるが，両者が絡み合っている時にはそれをほどくことはできない．このことは場の理論に戻っても確認できる．今の設定では Γ と Σ は直接交わっていないので $\hat{W}(\Gamma)$ は $\hat{H}(\Sigma)$ がいても我関せずという状況のように見える．しかし，前節の議論では $\hat{W}(\Gamma)$ が $\partial S = \Gamma$ となる S を選ぶと (15) のように書けることを議論したことを思いだそう．一方，$\hat{H}(\Sigma)$ が存在すると B の運動方程式は $F = 0$ から $(n/(2\pi))F + \delta_\Sigma = 0$ と変形される．（ここで，δ_Σ は部分空間 Σ に特異性を持つカレントで，一点に特異性を持つ通常のデルタ関数の一般化に相当するものである．より数学的には Σ のポアンカレ双対である．）ここで S が Σ と交わると，その交点においてゲージ場 A の特異性が存在するので (15) に新たな寄与を生み出すのである．より具体的には，$d\eta_I = \delta_I$ となる η_I を $I = \Sigma, \Gamma$ について考えると，運動方程式はそれ

---

*6)　絡み数の 3 次元版が位相的場の理論の一種であるチャーン–サイモンズ理論からどう現れるかについては 4) を参照．

ぞれ $A = -(2\pi/n)\eta_\Sigma, B = -(2\pi/n)\eta_\Gamma$ と解けるので，それを演算子付きの作用に挿入すると $\exp(-(2\pi i/n)\eta_\Gamma \wedge \delta_\Sigma)$ を得る．実は $\eta_\Gamma = -\delta_S$ でもあるので*7)，これは $\exp((2\pi i/n)\int_M \delta_S \wedge \delta_\Sigma)$ となるが $\int_M \delta_S \wedge \delta_\Sigma$ は S と Σ の交点数であり図4に示された絡み数の定義を再現する．

関係式(19)は電場と磁場のペアリングを表していると解釈することもできる．ここまでの議論においても，A と B とがかなり類似していることは明らかであったが，より踏み込んで両者が相補的・双対な関係にあることがわかる．実際，A の正準共役な運動量を考えると $\pi_A := \delta\mathcal{L}_{BF}/\delta(\partial_t A) \propto B$ が得られ，同様に B の正準共役な運動量 π_B も A に比例している．通常の電磁気学では電場と磁場は正準共役な関係にあるので，今の場合は A と B が「互いに電場と磁場の関係にある」と表現してもそれほど不正確ではない．こうして考えてみると，より物理的にはこれは電荷と磁荷のペアリング，つまり一種の**アハラノフ–ボーム効果**を表しており，通常の電磁気学でのディラックの量子化条件の導出の類似になっていることがわかるであろう．

ただし，通常の電磁気学と違いがあることにも注意しよう．(19)には1の冪根が登場しているので，より一般の電荷・磁荷 $e, g \in \mathbb{Z}$ を持つ演算子 $\hat{W}(C)^e, \hat{H}(\Sigma)^g$ を考えても，その演算子の満たす関係式は $e \sim e+n, g \sim g+n$ のもとで不変である．これは今 $\mathbb{Z}_n$ ゲージ理論を考えていることに対応する—通常の $U(1)$ ゲージ群ではその表現のラベルとして整数 $\mathbb{Z}$ が現れるが，$\mathbb{Z}_n$ 群の表現のラベルはそれ自身 $\mathbb{Z}_n$ で与えられ，したがって電荷・磁荷が $\mathbb{Z}_n$ で与えられるのだ．我々の議論の出発点は $U(1)$ ゲージ群が $\mathbb{Z}_n$ ゲージ群に破れることだったのだから，これは元々の期待と合致する結論である．

*7) 2-形式 ω に対して $-\int_M \omega \wedge d\delta S = \int_M d\omega \wedge \delta S = \int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega = \int_\Gamma \omega$ であるので $-d\delta_S = \delta_\Gamma$．

10. 北の大地へ

こうしてとある場の理論の低エネルギー極限として4次元位相的場の理論である BF 理論が得られたが，話はそこで終わりではない．得られた BF 理論は $\mathbb{Z}_n$ ゲージ理論であるのだから，先に $U(1)$ ゲージ理論を $U(1)$ 大域対称性を持つ複素スカラー場の理論に結合させて理論を変更したように，BF 理論を別の $\mathbb{Z}_n$ 大域対称性を持つ理論 $\mathcal{T}$ に適切に結合させてやれば，その理論を別の理論 $\mathcal{T}'$ に変更させてやることができるのである．

今結合に用いている位相的場の理論は「局所的には自明」な理論であるのだから，$\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}'$ は例えば理論の（観測可能な）局所演算子の期待値だけを見ていても区別できないと期待できる．しかし，一般的な時空 M を考えると，結合させた位相的場の理論の効果が現れて理論が非自明になると期待できる．つまり，**位相的場の理論を結合させることで，理論の大域的な性質だけを変更できる**のである[5]．

一般に，理論に対称性が与えられるとその対称性を破るあるいはゲージ化する，さらには繰り込み群のフローを考えるといった操作を組み合わせることで，より豊かな理論をどんどん構成することができ，その理論空間に豊かな数学的構造が存在するというのが筆者の著書[6]の主張であった．この立場からすると，位相的場の理論とはそのような手続きのトポロジカルな側面を「冷やして抽出する」ことにより得られる理論であると考えることもできるのかもしれない．量子場の理論たちが活躍する夢の国にも四季はあるのだとすると，そこに冬が訪れた時，位相的場の量子論たちが美しく輝く世界が広がっているのだろう．自由な想像力さえあれば，我々は位相的場の量子論の美しい世界に旅立っていくことができるのだ．

参考文献

1) 山崎雅人，我々はトポロジカルな世界から生まれたのか？，「科学」8月号（岩波書店，2022）．
2) A. Lavasani, M. J. Gullans, V. V. Albert and M. Barkeshli, [arXiv:2405.19412 [quant-ph]].

3) G. T. Horowitz and M. Srednicki, Commun. Math. Phys. **130**, 83-94 (1990).
4) 山崎雅人，場の理論と結び目，「数理科学」4 月号（サイエンス社，2020）.
5) A. Kapustin and N. Seiberg, JHEP **04**, 001 (2014) [arXiv:1401.0740 [hep-th]].
6) 山崎雅人，『場の理論の構造と幾何』，「数理科学」別冊（サイエンス社，2015）.

（やまざき・まさひと，東京大学大学院理学系研究科／東京大学国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構）