巻頭言

山崎　雅人

（注：本稿は雑誌「数理科学」の記事（Vol.63-12, pp.5-6, サイエンス社, 2025 年）の著者稿である.）

最近の学生の皆さんに何に興味があるのかを聞いてみると，位相的場の量子論（TQFT）*1) という答えが返ってくることが少なくないようです．筆者自身もその昔，位相的な弦理論について考えることから自らの研究をスタートさせたので，若い皆さんに位相的な場の理論が人気があるのは頷けるところがあります．その一方で，若い人の発表などを聞いていると，位相的場の理論に対する感性も世代とともに変わってきたのだろうかと考えさせられます．古くて新しい，位相的場の理論とはそういうトピックなのかもしれません．

歴史を遡ると位相的場の理論が導入された当初はその意義を理解できた人は多くはなかったようです．しかし，位相的場の理論の重要性は時を経るとともに着実に増してきており，その応用範囲も数学・物理学双方にまたがって拡大を続けてきました．位相的場の理論はそれ自体厳密に定式化できる場の量子論の例であり，例えば本特集でも扱うように３，４次元多様体論，結び目理論，共形場の理論などとも密接に関係しており，トポロジーや微分幾何のみならず代数や表現論，圏論など様々な数学に刺激を与え，華々しい成果を生み出してきました．一方，物理学では超弦理論の研究において位相的場の理論が頻出するほか，物性理論における量子ホール効果やトポロジカル相の研究，量子情報理論における量子誤り訂正やトポロジカル量子計算などにおいても位相的場の理論は本質的に活躍し，分野を大々的に横断するための鍵となる理論的枠組みとして成長してきました．

このような位相的場の理論の豊かさ，そして何よりもその面白さを，数学・物理学双方の専門家による多彩な記事を集めることで伝えようとするのが本特集の趣旨です．位相的場の理論の様々な側面についてはこれまでの本誌でも取り上げられてきましたが，本特集では若手中心の執筆者による現代的な思想を反映した記事が数多く収録されています．これから位相的場の理論を勉強したいという方には特におすすめの特集だといえるでしょう．

本特集はまずは数学・物理学それぞれの立場からの入門的な記事からはじまります．数学の立場からの入門となる五味氏の記事では，位相的場の理論の数学的定義がボルディズム圏からの関手として定義されます．これは Atiyah による古典的な定義ですが，近年，この定義を拡張する extended TQFT が活発に研究されているほか，その分類に関係してコボルディズム仮説や関連した圏論も注目を集めており，五味氏の記事ではこうした最近の発展についてもまとめられています．

物理学の立場からの入門となる山崎の記事にお

*1) 位相的場の理論（TFT, Topological Field Theory）そのものは古典論であっても良いのですが，特にその量子的性質を考えるときには位相的場の量子論あるいは位相的量子場の理論（TQFT, Topological Quantum Field Theory）と呼びます．実際上はあまり厳密に区別せずに使うことも多く，以下では位相的場の理論と書きます．

いては，より伝統的な場の理論との関係を念頭に，アーベリアン・ヒッグズ模型と呼ばれる具体的な場の理論から 4 次元の位相的場の理論が現れることを議論しました．この例にあるように，それ自体はトポロジカルでない場の理論の研究においてもその様々な側面を理解するためにトポロジカルな場の理論が現れるというのは，近年の物理学では重要性を増しつつある考え方です．

引き続く 3 つの記事では位相的場の理論の数学的な側面が掘り下げられます．鈴木氏の記事では Jones 多項式を 3 次元的に解釈せよという Atiyah の問いを巡って，色付き Jones 多項式から閉 3 次元多様体の不変量，さらに普遍構成を経て 3 次元位相的場の理論へと話が展開していきます．Jones 多項式を 3 次元的に解釈するという Atiyah の問いについては一定の理解は存在するものの，現在でもまだまだ理解を深める余地があることが感じられるでしょう．

森脇氏の記事では，2 次元共形場理論が主に表現論的な立場から議論されています．共形場理論は位相的場の理論に時空の計量依存性を部分的に持ち込むことにより理論を拡張したものともみなせます．特に，2 次元においてはヴィラソロ対称性と呼ばれる無限次元の対称性が存在するので理論が強い制限を受け，その代数の表現論と関数解析的な公理系との関係を理解するなど，場の量子論の異なる数学的側面を精密に理解することが可能になります．従って，この記事では位相的場の理論を超えた場の理論の世界が垣間見えているといえるでしょう．

今野氏の記事では 4 次元のゲージ理論が議論されます．4 次元超対称ゲージ理論（のツイストにより得られる位相的場の理論）の 4 次元多様体論への応用は数学における近年の大きな成果の一つです．今野氏の記事ではフレアー理論の基本的な考え方を導入した後，ヤン–ミルズ，サイバーグ–ウィッテン，ヒーガード–フレアーという 3 つのゲージ理論の概要が，相互の関係などが対比されながらまとめられており，それぞれの理論をより詳細に勉強する前の概観としても適した解説になっています．

引き続く 3 つの記事では，より物理的な文脈で位相的場の理論が論じられます．米倉氏の議論では，「最も簡単な」量子場の理論として，ヒルベルト空間が 1 次元しかない可逆場の理論が議論されています．この理論は位相的場の理論の中でもより単純な場合に相当しており，同境不変量による分類を議論することができます．こうした理論はアノマリーやトポロジカル相などに関係して素粒子物理学・物性物理学の双方から注目を集めています．

大森氏の記事では，一般化対称性の概念及びその文脈で最近注目を集めている位相的場の理論の一種である SymTFT が取り扱われています．ここでは一般化対称性がトポロジカルな演算子の組で与えられること，さらにそれが SymTFT とそのトポロジカル境界の組としても理解できることが議論されます．このように，位相的場の理論は一般の理論の対称性についての性質を抽出する構造としても現れるのです．

最後に，菅野氏の記事では，位相的弦理論から現れる組み合わせ論が議論されています．位相的弦理論は弦理論の世界面にツイストと呼ばれる操作を施したものでそれ自体興味深いですが，特にその理論において数え上げを行うと数学的な不変量が得られます．この記事では平面分割の組み合わせ論が登場し，具体的な数式が扱われるので他の記事とはまた異なった楽しみ方ができるでしょう．

本特集の記事にはかなり高級な内容を扱ったものもあり，一読しても分からないこともあるでしょう．しかし，それぞれの記事は独立していますので，細かいところは気にせず読み進めてもらえればと思います．また，記事を読み進める中で，別々の記事の間の関連に気付かされ，理解が深まっていくこともあるでしょう．そのような探究の過程で，数学と物理学が存分に交錯する分野としての位相的場の理論の魅力を味わっていただければと思います．

位相的場の量子論の世界へようこそ，その入り

口はもう目の前です.

（やまざき・まさひと，東京大学大学院理学系研究科／東京大学
国際高等研究所カブリ数物連携宇宙研究機構）