

東大数理 数学講究 XB 「場の量子論と因子化代数」

2024年7月10日、担当：山崎雅人（カブリ IPMU）

1 参考文献

本講義では場の量子論の数学的定式化、特に因子化代数に関連したアプローチについて入門的説明を与えた。参考文献として基本的なのは

- K. Costello and O. Gilliam, “Factorization Algebras in Quantum Field Theory,” Vol. 1 and Vol. 2, Cambridge University Press

であるが本格的である。より気軽には

- K. Costello and O. Gilliam, “Factorization algebra,”
<https://arxiv.org/abs/2310.06137>

を挙げておく。不完全ではあるが日本語による講義として筆者による講義・講演の記録が YouTube から視聴できる。例として、

- 山崎雅人、「場の量子論の数理」、
<https://www.youtube.com/watch?v=D9HEV12FD0c>（全4回の第1回）

2 レポート問題

- 提出期限：2024年7月25日（木曜日）24:00
- 提出先：UTOL 上で山崎作成のボックスにアップロード

以下の問題を解け。

問題 1

1. 教科書（例えば、志甫「層とホモロジー代数」）やウェブサイトなどを参考にして、前層（pre-sheaf）の定義についてまとめよ。また、講義中に定義された前因子化代数（pre-factorization algebra）との類似点および相違点についてまとめよ。
2. 教科書においては、前層から出発してより強い条件を満たす層（sheaf）を得ることができることが説明されている。前層から層が得られること、また前層と前因子化代数が類似していることを考えると、前因子化代数にさらに条件を課すことで「因子化代数」を定義するのは自然なように思える。そこで、因子化代数の自分なりの定義を与え、それがなぜ層の類似になっているかを説明せよ。（注：この定義が必ずしも標準的な定義と一致する必要はないが、なぜ「自然な」定義であるのか、何らかの説明を与えてほしい。）

問題 2

一般に、 d 次元多様体上の前因子化代数 \mathcal{F} が局所定数 (locally constant) であるとは、 $D \subset D'$ を満たす任意の二つの d 次元開円板 (境界を含まないディスク) D, D' に対して、写像 $m_{D'}^D : \mathcal{F}(D) \rightarrow \mathcal{F}(D')$ が同型であることを指す¹。このような前因子化代数は位相的場の理論 (topological quantum field theory) の文脈で議論されている。

ここでは特に $d = 1$ の場合を考え、1次元開円板として開集合 $D = (a, b) \subset \mathbb{R}$ を考える。この場合に前因子化代数の公理を整理し、 \mathbb{R} 上の局所定数な前因子化代数からある代数 A が現れることを示せ。 A はどのような性質を持つか？

同様の考察を S^1 の場合に行うと、今度は S^1 上の局所定数な前因子化代数から別の代数 A' が得られる。 A' と A の関係を述べよ。

この例からわかるように、前因子化代数はその定義されている多様体の情報も一部含んでいる。

¹本レポートでは必要ないが、参考までにコメント：より一般には \mathcal{F} が複体であると考え、その間のチェイン写像 $m_{D'}^D$ が擬同型であることを要請する。