現代物理学入門 Part I (渡利担当分)　　　レポート問題 I-2

- 東大 ITC-LMS 経由で提出。締め切り (7 月下旬か 8 月上旬を予定) までの間は複数のファイルを複数回アップロードできます。各問につき、提出は必須ではありません。
- ファイル名に名前や学生番号などは含めなくて結構です。レポートは手書きでもタイプでも、(時間を食わない) お好きな方で。だいたい読めれば十分です。レポート冒頭にどの小問をやったか (どれをやらなかったか) を明記してもらえると、採点ミスを防げて助かります。
- 問題を自分一人で解く必要はありません。仲間と議論をするのも結構。但し、解に至ったのがほとんど自力とは思えない時には、「かなり XX さんのおかげ」とレポートの一番最初のところに記してください。その場合、渡利流の成績評価では XX さんに加点するけれどあなたには減点しません。
- レポート提出のあった方には、9 月に入って、解答例を ITC-LMS 経由でお返しします。

2. **Veneziano 散乱振幅** [配点 20]
Veneziano が 1967 年に書き下した散乱振幅

$$\mathcal{M}_V(s,t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))}, \qquad \alpha(x) := \alpha' x + a \tag{1}$$

をいじってみよう。ハドロン粒子 1 (運動量 p_1^μ) とハドロン粒子 2 (運動量 p_2^μ) の弾性散乱の散乱振幅をあらわしていてくれないかなぁ、という意図のもとに導入された。散乱後にこの 2 つの粒子の運動量が p_3^μ, p_4^μ になる場合、

$$s := (p_1+p_2)^\mu \eta_{\mu\nu}(p_1+p_2)^\nu, \qquad t := (p_1-p_3)^\mu \eta_{\mu\nu}(p_1-p_3)^\nu \tag{2}$$

である; Minkowsky 空間 $\mathbb{R}^{3,1}$ の計量は $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$ に取る。s は散乱の重心系でのエネルギーを捉えている変数であり、t は弾性散乱での粒子 1 から粒子 2 へと受け渡される運動量 (運動量移行) の大きさを捉えている変数である。上記 $\mathcal{M}_V(s,t)$ を与えるに際して使われる関数 $\alpha(x)$ において、パラメター α' と a は質量次元 -2 と 0 をもつ。

(a) 以下の 2 つの公式

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \left(1 + \frac{1}{12z} + \mathcal{O}(1/z^2)\right), \tag{3}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \tag{4}$$

を用いて $\mathcal{M}_V(s,t)$ が $\mathrm{Re}(\alpha' s) \gg 1$ の運動学的変数の領域において $1/(\alpha' s)$ 展開をし、leading 項が

$$\mathcal{M}_V(s,t) \simeq \Gamma(-\alpha(t)) \left(\frac{\alpha' s}{e}\right)^{\alpha(t)} \times \begin{cases} e^{-\pi i \alpha(t)} & \mathrm{Im}(\alpha(s)) \gg 1, \\ e^{+\pi i \alpha(t)} & \mathrm{Im}(\alpha(s)) \ll -1 \end{cases} \tag{5}$$

であることを示せ。

$\mathcal{M}_V(s,t)$ の中の因子 $\Gamma(-\alpha'(s))$ が $-\alpha(s) = 0, -1, \cdots$ に pole を持つこと、すなわち $s \in (\alpha')^{-1}\{-a,\ 1-a,\ 2-a, \cdots\}$ で共鳴粒子に相当する pole を持つことは容易に見て取れるでしょうから、これはレポート課題には含めません。

(b) Veneziano 散乱振幅 $\mathcal{M}_V(s,t)$ には以下の積分表示がある:

$$\mathcal{M}_V = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))} = \int_0^1 dx\, x^{-\alpha(s)-1}(1-x)^{-\alpha(t)-1}. \tag{6}$$

この積分表示式を 2 つの方法で書き換えよう。1 つめの方法: $(1-x)^{-\alpha(t)-1}$ を x で展開し (二項級数展開し[1])、積分と級数和の順序を入れ替え、$\alpha(s)$ が実数かつ負の値であると想定して積分を実行せよ。そのようにして得られた表式の各項を s に関して解析接続した場合に、s の一位の pole の位置を読みだせ。もう一つの方法: $(1-x)^{-\alpha(t)-1}$ はそのまま、$x^{-\alpha(s)-1} = (1-(1-x))^{-\alpha(s)-1}$ を $(1-x)$ で級数展開し (二項級数を用いる)、同様に積分と級数和の順序を入れ替え、積分を実行せよ。t の一位の pole の位置とそこでの留数を読みだせ。

(c) Veneziano 散乱振幅の積分表示 (6) は、単に数学的に正しいというだけでなく、双対共鳴模型・弦理論において物理的な意味があります。その雰囲気を味わって頂くために、次の (数学的な) 作業をしていただきましょう。積分する座標 $x \in [0,1]$ は実軸 $\mathbb{R}$ の中にあって、さらに実軸は複素平面のうちの上半分 $z \in \mathbb{C}$ ($\mathrm{Im}(z) > 0$) という領域の境界に当たります。複素上半平面の z を一次分数変換

$$\omega = \frac{z-i}{z+i} \tag{7}$$

で複素平面内に写し替えるとき、$x = z = 0, 1, \infty$ の 3 点がどの $\omega \in \mathbb{C}$ の点に写されるか調べよ。また、実軸 ($\mathrm{Im}(z) = 0$) が $|\omega| = 1$ の円周に写されることを示せ (z の上半平面は $|\omega| < 1$ 円内へ)。積分座標 $x =\in [0,1]$ が $x = 0$ から $x = 1$ へと変わっていくとき、$z = 0, x, 1, \infty$ の 4 点は $|\omega| = 1$ の円周の上でどのような位置関係になっているか?

解説:この複素 ω 面の $|\omega| \le 1$ 領域は、端点を持つ弦の量子状態の散乱を弦理論で計算するときに実際に使うものです。$\omega \in \mathbb{C}$ の複素面は、弦の世界面 (世界「線」から 1 次

[1] $(1+x)^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \nu(\nu-1)\cdots(\nu+n-1)/n! = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n(-\nu)_n/n!$. $a_n := a(a+1)\cdots(a+n-1)$.

元上がって) の時間方向が解析接続されたものです。弾性散乱の始状態粒子 1 と粒子 2 が世界面 $|\omega| \leq 1$ 円盤に $\omega(z = x)$ と $\omega(z = 0)$ で入り、終状態粒子 1 と粒子 2 が円盤の $\omega(1)$ と $\omega(\infty)$ から出ていくとして、その 4 点の配位を足し上げ (積分) しながら弦理論では散乱振幅を計算します。その積分範囲内にには、始状態粒子 1 の位置 $\omega(x)$ が始状態粒子 $\omega(0)$ に近い (s-channel 共鳴に近い) 配位も含まれるし、終状態粒子 1 $\omega(1)$ に近い (t-channel 粒子交換に近い) 配位も含まれる。