

第4回 弦理論のこぼれで数学を見る (第10回)

No.

①

Date

第2回

1+1次元の世界面上の超共形場理論

- ・自由度の総量が、空間1次元分の自由度相当の10倍丁度ある
- ・ユニタリ性場の理論
- ・世界面の時間方向のEuclid化操作に対してよく振舞える (modular 不変性)
- ・(*) 追加の条件

⇔ 弦理論の解 であり (*) の性質をもつもの

(*) 時空(d+1)次元分の自由度と合致 ⇔ (**) SO(1,d) 対称性がある。

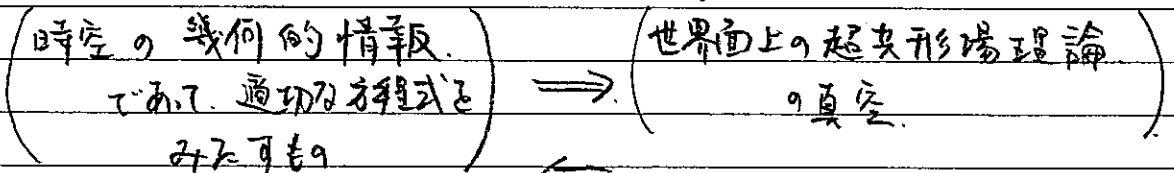
共形場の理論にならざる ⇔ Einstein 方程式をみたす

時空座標 x^M

($\mu=0,1,\dots,d$)

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{-\det(h_{\dots})} \times \left\{ \begin{array}{l} h^{ab} (\partial_a X^M) (\partial_b X^N) G_{MN} \\ + (\text{他の自由度}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{計量 } ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = G_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$



? 逆問題 については、のちほど。

★弦理論の相対性 (string duality) とは?

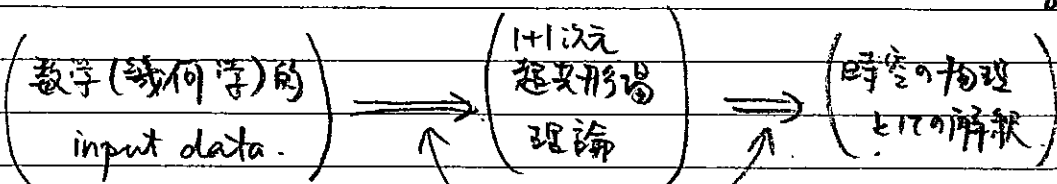
(*) 「形式」 という jargon があり、これは別物。

超弦理論 には、いくつかの定式化*がある。

前提

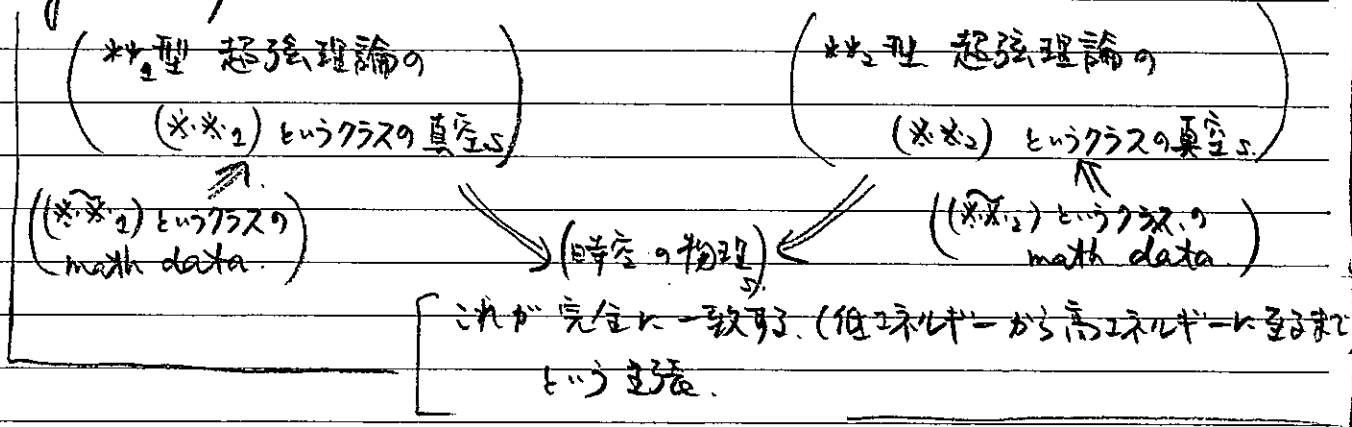
IIA型, IIB型, ヘテロティック型, が代表的。

定式化とは「与えられた超共形場理論を計りか、時空解釈をひきだすことができる」



★型弦理論

string duality とは.



すなわち、この主張を確信で持とうな証拠を集める。

例として、 $(\tilde{*}, \tilde{*}_2)$ math data \Leftrightarrow $(*, *2)$ math data の非自明な辞書写像とその辞書を用いて、数学の問題を解く。

string duality と示す。

というものが string duality にかかわる研究の典型的なありかた。

例1 IA型 - IB型 duality (ミラー対称性)

- $(\tilde{*}, \tilde{*}_1)$ カウビー-ヤウ多様体 M
- $(\tilde{*}, \tilde{*}_2)$ カウビー-ヤウ多様体 W
(実6次元(複素3次元))

$IA / (M \times \mathbb{R}^{3,1}) = IB / (W \times \mathbb{R}^{3,1})$ という主張。
 (つまり $M \leftrightarrow W$ 対応をみる)

- ◎ 80年代後半から evidence があつたりはした。
- ◎ '00 Hori Vafa: 「示す」 by 1+1次元場の理論。
- ◎ 「 M 上の vector bundle の集合」 \Leftrightarrow 「 W 上のある条件をみたす 3-cycle の集合」
対応がある。
- ◎ M 上の数えあげ問題 \Leftarrow W 上の周期積分の計算。
 (楕円積分 $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}$ と計算可能な積分)

幾何の教えない問題の古典的例

$$\text{CP}^3 \text{ の中の超曲面 } X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = 0.$$

3次

$$\rightarrow \text{斉次座標 } [X_0 : X_1 : X_2 : X_3] \cong \mathbb{C}^3 \text{ 中 } \{1 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\}$$

中の直線が入る。例. $\{(x_1 = -1, x_2 = t, x_3 = -t) \mid t \in \mathbb{C}\}$

合計 27 本ある。答: $(X_j = -\xi_3^n X_i, X_k = -\xi_3^m X_i)$

$$\xi_3 = e^{2\pi i/3} \quad \tau \quad n \in \{0, 1, 2\}$$

$$m \in \{0, 1, 2\}$$

$X_i \sim X_j$ は pair-wise

27通り

↑
3本

3本

3本

画像検索 「27 lines in cubic surface」

例 2 $\text{Fano 3-fold} - \text{IIA duality}$

(*) Het T^2 -fibration over \mathbb{CP}^1 で作られる cubic 3-fold + vector bundle

(*) IIA $K3$ -fibration over \mathbb{CP}^1 で作られる cubic 3-fold

7-fold... との感觸.

実次元多様体の複素構造を扱えない。

★ 幾何を (点集合 + 座標系) と見るとなく (Riemann面として probe する)

と どうなる?

新たな probe 手法は、科学を大きく発展させた。

顕微鏡 望遠鏡 フォトリソム 微積分 抽象代数学 ...
 (生物・医学) (文・福論) (光学) (力学) (数論のあらゆる領域) ...

① 特徴: 小さな長さ (volume) の領域の見え方から行う。

$$N = \frac{-1}{4\pi\alpha'} \int d^4x \sqrt{\det(h)} h(\partial_\mu X^\nu)(\partial_\nu X^\rho) G_{\mu\rho}(X) + \dots$$

長さ $\sqrt{\alpha'}$ 以下の天竺の時空 (幾何) の領域から。

弦の世界面が容易に (低次元で) くる、と巻きまくることが可能。

⇒ 「数え上げ問題」は、この量子補正の計算で出てくる。

② 問題 + 見方の拡張: (超共形場の理論の集合) \supseteq (方程式をみたす幾何の集合)

✓ 小 volume 領域の幾何は、むしろ、単なる SCFT として扱える (補正が大きいから)。

✓ SCFT は 幾何の概念を拡張する?

✓ 真部分集合か? (全ての SCFT は 幾何の極限として、解根を与えられるか?)

① 幾何学は、共形場理論を知っている。

共形場理論は幾何学を知っている....??

✓ 幾何の計量などの無限小変分 \Leftrightarrow SCFTの無限小変分。
 ("質量", "相互作用" などの)

✓ 幾何の可能なトポロジー分類 \Leftrightarrow SCFT のファミリーの分類
 不等式. 不等式.

この具合に大よみになっているはずです。

✓ 幾何の特異点と、対応するSCFTの
 特異点解消操作で解析的 \Leftrightarrow 状態空間を調べる。

例 $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N \text{ 特異点} \\ \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2N} \times \mathbb{Z}_2 \text{ 特異点} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N \text{ SCFT} \\ \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}_{2N} \times \mathbb{Z}_2) \text{ SCFT} \end{array} \right.$

↓
 blow-up 操作で smooth 化すると。
 実 2-cycle が $\begin{cases} (N-1) \text{ 個. あり.} \\ (N+2) \text{ 個.} \end{cases}$

交点数行列が

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ & 2 & -2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 1 & -2 \\ & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(N-1) (N+2)

A_{N-1}, D_{N+2} の Cartan 行列の $\times (-1)$

E_6, E_7, E_8 もあり。

◎ 各種の幾何の次元上付き量の生成母関数を def 17k とき.

これが modular form になる. という話.

例. = K3 surface 上の vector bundle V として $\text{rank}(V)=r$ $c_1(V)=0$.

$$c_2(V) = -1.$$

なる g の moduli 空間の Euler 数.

$$=: \eta_{r,1}.$$

$$\Rightarrow \eta_{r,1} = \int_{\mathcal{M}_r} r(I-r) \text{ の期待値} =: \eta_{r,1}$$

$$\sum_{h \geq 0} m_h e^{2\pi i h} = \frac{1}{q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}}$$

生成母関数の q-変数

$$q := e^{2\pi i \tau}$$

$\tau \in$ 複素上半平面.

$$\text{右辺: } \tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$$

操作で不変な関数 になる.

90's 後半の発見 00's 数学の証明.