第4回 弦理論のことばで数学を見る (第10週)

No. ①
Date

第2回 1+1次元の世界面 Σ 上の超共形場理論であって、

- 自由度の総量が 空間1次元分の自由度相当の10倍 丁度ある
- ユニタリな場の理論
- 世界面の時間方向のEuclid化操作に対してよい振舞をする (modular不変性)
- (※) 追加の条件

⟺ 弦理論の解であって (※″) な性質をもつもの

(※) 時空(d+1)次元分の自由度を含む ⟺ (※″) SO(1,d) 対称性がある。

共形場の理論になっている。 ⟺ Einstein方程式をみたす

時空、座標 X^μ ($\mu=0,1,\cdots,d$)

$$S=\frac{-1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d\xi^0 d\xi^1\sqrt{-\det(h_{..})}\times\left\{\begin{array}{l}h^{ab}(\partial_a X^\mu)(\partial_b X^\nu)G_{\mu\nu}\\ +(\text{他の自由度})\end{array}\right\}$$

⟺ 計量 $ds^2=\eta_{\mu\nu}\,dx^\mu\otimes dx^\nu$

$ds^2=G_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu\otimes dx^\nu$

(時空の幾何的情報であって、適切な方程式をみたすもの) ⟹ (世界面上の超共形場理論の真空)

⟸ ? 逆問題については、のちほど。

☆弦理論の相対性 (string duality) とは?

(*「形式」という jargon をあてて それとは別物。)

前提
超弦理論には いくつかの 定式化* がある。

IIA型、IIB型、ヘテロティック型、が代表的。

定式化ごとに「どんな超共形場理論を許すか」「超共形場理論からどう時空解釈をひきだすか」がちがう。

(数学(幾何学)的 input data) ⟹ (1+1次元 超共形場理論) ⟹ (時空の物理としての解釈)

「**型弦理論」

PLUS

No.
Date ②

string duality とは

(※₁型 超弦理論の (※※₁) というクラスの真空s) ⇒ (時空の物理) ⇐ (※₂型 超弦理論の (※※₂) というクラスの真空s)

((※※₁) というクラスの math data) ⇒ (※※₁) というクラスの真空s

((※※₂) というクラスの math data) ⇒ (※※₂) というクラスの真空s

[これが完全に一致する (低エネルギーから高エネルギーに至るまで) という主張.

まずは、この主張を確信できるような証拠を集める.

そして (※※₁) math data ⟺ (※※₂) math data の非自明な辞書を導く

その辞書を用いて、数学の問題を解く.

string duality を示す.

というのが string duality にかかわる研究の典型的なありかた.

$\boxed{\text{例 1}}$ IIA型 — IIB型 duality (ミラー対称性).

(※※₁) カラビーヤウ多様体 M

(※※₂) カラビーヤウ多様体 W

(実6次元 (複素3次元))

$$\mathrm{IIA}/(M\times \mathbb{R}^{3,1}) = \mathrm{IIB}/(W\times \mathbb{R}^{3,1})$$ という主張.

(うまく $M \leftrightarrow W$ 対応をみつけたら)

◎ 80年代後半から evidence があつまりはじめる.

◎ '00 Hori Vafa: 「示す」 by 1+1次元場の理論.

◎ 「M上の vector bundle の集合」⟺「W上のある条件をみたす(変)3-cycle の集合」 対応があるはず.

◎ M上の数えあげ問題 ⟸ W上の周期積分の計算.

(楕円積分 $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k x^2)}}$ を計算するみたいなもの)

幾何の数えあげ問題の古典的な例.

$\boxed{\mathbb{CP}^3 \text{ の中の}\underbrace{\text{超曲面}}_{3\text{次}} \quad X_0^3+X_1^3+X_2^3+X_3^3=0.}$

→ 斉次座標 $[X_0:X_1:X_2:X_3]$ $\quad \approx \mathbb{C}^3$ 中 $\{1+x_1^3+x_2^3+x_3^3=0\}$

この中に「直線」が入っている。 例. $\{(x_1=-1,\ x_2=t,\ x_3=-t) \mid {}^{\forall}t\}$

合計 27 本ある。 答: $(x_j=-\zeta_3^n x_i,\ x_\ell=-\zeta_3^m x_k)$ $\quad \boxed{27\text{通り}}$

$\zeta_3=e^{2\pi i/3}$ で
- $n\in\{0,1,2\}$ 3択
- $m\in\{0,1,2\}$ 3択
- $x_0\sim x_3$ をpairに分ける 3択.

画像検索「27 lines in cubic surface」

$\boxed{\text{例 2}}$ $\boxed{\text{ヘテロティック}-\mathrm{IIA}\ \text{duality}}$

(※※$_{\mathrm{Het}}$) T^4-fibration over $\mathbb{CP}^1$ で作られるカラビ-ヤウ 3-fold + vector bundle

(※※$_{\mathrm{IIA}}$) K3-fibration over $\mathbb{CP}^1$ で作られるカラビ-ヤウ 3-fold

だろう… という感触.

実2次元多様体に複素構造を入れたもの

☆ 幾何を（点集合＋座標系）として見るのでなく（Riemann面でprobeする）
と どうなる？

新たなprobe手法は、科学を大きく発展させてきた。
顕微鏡　望遠鏡　プリズム　微積分　抽象代数学 …
（生物・医学）（天文・宇宙論）（分光）（力学）（数学のあらゆる領域）…

◎ 特徴：小さい長さ（volume）の領域の見え方がちがう。

$$S = \frac{-1}{4\pi\alpha'}\int d^2\xi \sqrt{-\det(h)}\, h^{ab}(\partial_a X^\mu)(\partial_b X^\nu) G_{\mu\nu}(X) + \cdots$$

長さ $\sqrt{\alpha'}$ くらいの大きさの時空（幾何）の領域なら
弦の世界面が容易に（低コストで）くるっと巻きつくことが可能。

⇒「数え上げ問題」はこの量子補正の計算で出てくる。

◎ 問題＋見方の拡張（超共形場の理論の集合）⊇（方程式をみたす幾何の集合）

✓ 小volume領域の幾何は、もはや単なるSCFTとして扱えばよい
（補正が大きいので）

✓ SCFTは幾何の概念を拡張する？

✓ 真部分集合か？（全てのSCFTに幾何の極限としての解釈を与えられるか）

⊙ 幾何学は 共形場理論を知っている。

共形場理論は 幾何学を知っている.... ??

✓ 幾何の計量などの無限小変分 ⟺ SCFTの無限小変分.

("質量" "相互作用" などの)

✓ 幾何の可能なトポロジー分類 ⟺ SCFT のファミリーの分類
　　不等式　　　　　　　　　　　　　不等式

という具合にたぶんなっているはずなんです。

✓ 幾何の特異点を、特異点解消操作で解析する ⟺ 対応するSCFTの状態空間を調べる.

例 $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N \text{ 特異点} \\ \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_{2N}\rtimes\mathbb{Z}_2 \text{ 特異点} \end{array}\right.$ ⟺ $\begin{array}{l} \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_N \text{ SCFT} \\ \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}_{2N}\rtimes\mathbb{Z}_2) \text{ SCFT} \end{array}$

⇓

blow-up 操作で smooth 化すると

実2-cycle が $\left\{\begin{array}{l} (N-1)\text{個 あり,} \\ (N+2)\text{個.} \end{array}\right.$

交点数行列が

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{(N-1)}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & & \\ & & 1 & -2 & 1 & 1 \\ & & & 1 & -2 & 0 \\ 0 & & & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{(N+2)}$$

A_{N-1}, D_{N+2} の Cartan行列の $\times(-1)$

E_6, E_7, E_8 もあります。

◎ ある種の幾何の数え上げ量の生成母関数をdefしたときに、

それが modular form になる…という予言

例：K3 surface 上の vector bundle V で $\mathrm{rank}(V)=r$　$c_1(V)=0$

$ch_2(V)=-I$

なものの moduli 空間の Euler 数

$=: n_{r,I}$

$\Rightarrow n_{r,I}$ は $r(I-r)$ にのみ依る $=: m_{r(I-r)}$

$$\boxed{\sum_{h\in\mathbb{Z}} m_h\, e^{2\pi i\tau h} = \frac{1}{q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}}}$$

（生成母関数のダミー変数 $q := e^{2\pi i\tau}$　$\tau\in$ 複素上半平面）

右辺：$\tau \mapsto \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$　$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2;\mathbb{Z})$

操作で不変な関数になっている。

90's 後半の発見　00's 数学による証明