QFT II/QFT   homework IV-3

- submission via the U Tokyo LMS. We request that the file name includes the problem number(s), such as II-1***.pdf or ****-IV-2-IX-1.jpeg. The LMS will show who had submitted the file (student ID and name), so the file name will not have to contain your name or ID number.

- course credit guaranteed by woking on $1\#[A] + 1.5\#[B] + 2\#[C] + 4\#[D] + 8\#[E] \geq 9$ problems.

- A sample solution is available as a pdf file for problems with the mark $\star$.

- The problem below (IV-3) intends to guide you through observations that perturbative series may well be a non-convergent series, only an asymptotic series, and through efforts to save the situation. This problem set was prepared originally as a homework problem for another course for undergraduate students (that is why it is in Japanese). An English equivalent of this problem set is this:

  - Read section 2 of the following paper by Cherman, Dorigoni and Unsal,
    https://arxiv.org/abs/1403.1277
    and write a summary of what you have learned.

  It was too harsh a demand for undergraduate students who have not learned QFT at all, so essentially the same contents have been translated in the problem set below into the language without using QFT / path integral / English. As a homework problem for the QFTII/QFT course, you can either follow the step-by-step guide below (in Japanese), or read one section in the paper referred to above.

- Eq. (1) looks like the partition function of the scalar ϕ^4 theory on 0+0-dimensional spacetime (in the path-integral formulation). The way to evaluate it through eq. (2,3) is what we do in perturbative calculations in QFT.

3. **摂動級数、漸近展開、非摂動効果** [C] $\star$
   前半: まずは

$$Z(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \, e^{-\frac{1}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4} \tag{1}$$

という λ の関数を考える。λ が正の実数である限り、被積分関数が Gauss 分布よりも速く小さくなるので積分は収束して、$Z(\lambda)$ は well-defined な関数となっている。

(a) 関数 $Z(\lambda)$ は

$$Z(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} d\phi\, e^{-\frac{1}{2}\phi^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\lambda}{4}\phi^4 \right)^n \right) \tag{2}$$

であるが、積分と n による無限和の順番を (適切な正当化なしに) 入れ替えて、$Z(\lambda)$ の摂動級数

$$Z[[\lambda]] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\lambda}{4} \right)^n \int_{\mathbb{R}} d\phi\, e^{-\frac{1}{2}\phi^2} \phi^{4n} \tag{3}$$

を定義する。積分を実行して、以下を示せ。

$$Z[[\lambda]] = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4\lambda)^n}{n!} \left(\frac{1}{4} \right)_n \left(\frac{3}{4} \right)_n . \tag{4}$$

但し、$(\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ である。

(b) 表式 (4) の級数 $Z[[\lambda]]$ の収束半径が $|\lambda| = 0$ であることを示せ。

つまり、摂動級数 $Z[[\lambda]]$ は摂動展開係数 λ につき正の収束半径を持たない。$Z[[\lambda]]$ は形式的冪級数ではあるが、well-defined な収束値を持つ領域が全く存在しないので、その領域から解析接続によって関数の定義域を広げていくこともできない。$Z(\lambda)$ と $Z[[\lambda]]$ は異なるし、積分と無限和の順番は入れ替えてはまずかった。しかし、実は摂動計算とはこのマズいことやっていることに当たるのです; 下記の解説 1 を参照のこと。

一般に、一変数 λ の級数 $f[[\lambda]] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ が正の収束半径を持たない場合—たとえば表式 (4) の $Z[[\lambda]]$—であっても $f[[\lambda]]$ から情報を引き出す方法として、次の手続き (Borel resummation という) が知られている。まず、一変数関数 Borel sum $Bf(s)$ を

$$Bf(s) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m!} s^m \tag{5}$$

で定義する。たとえ $f[[\lambda]]$ の収束半径が $|\lambda| = 0$ であっても、$Bf(s)$ が正の収束半径を持つ可能性はある。

(c) べき級数 $Z[[\lambda]]$ の Borel sum $BZ(s)$ の収束半径が $|s| = 1/4$ であることを示せ。実際、超幾何関数 ${}_2F_1(a,b;c;z) := \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n (b)_n z^n / [n!(c)_n]$ を用いて

$$BZ(s) = \sqrt{2\pi}\, {}_2F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}; 1; -4s \right) \tag{6}$$

と書ける。

(d) Borel sum $Bf(s)$ が正の収束半径を持ち、そこから解析接続をして定義域をある程度広げられるとしよう ($BZ(s)$ のように)。このとき、$Bf(s)$ に対して

$$\hat{f}(\lambda) := \lambda^{-1} \int_0^{+\infty} ds\, e^{-s/\lambda} Bf(s) \tag{7}$$

という関数 $\hat{f}(\lambda)$ を定義する。s の積分経路が $Bf(s)$ の定義された領域にとどまり、かつ $Bf(s)$ が Re(s) の大きい領域で指数関数的減少因子 $e^{-s/\lambda}$ を打ち消すほど増大しない限り、積分は well-defined になり、関数 $\hat{f}(\lambda)$ は well-defined になる。さて、ここで問題。この関数 $\hat{f}(\lambda)$ を、(2)⇒(3,4) のように扱ってみよう: $Bf(s)$ を級数展開し、級数の無限和と s の積分の順序を (正当化せずに) 入れ替えて評価せよ。それが $f[[\lambda]]$ と等しくなることを確認せよ。

前半まとめの解説１： 表式 (1) で導入した関数 $Z(\lambda)$ は、経路積分を学んだ暁には、

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q})^2 - \frac{m}{2}\omega^2 q^2 - \frac{m^2}{4} g q^4 \tag{8}$$

というラグランジアンをもつ一自由度 (q) 量子力学系 (m, ω, g は系のパラメター) の高温極限 ($T \to \infty$) での分配関数であると解釈できる ($\phi := \sqrt{\frac{m}{T}}\omega q$, $\lambda := \frac{Tg}{\omega^4}$)。経路積分については秋学期の場の量子論 II の講義をお待ちください。なので、表式 (1) の $Z(\lambda)$ は分配関数、変数 $\lambda \propto g$ は相互作用定数、積分変数 ϕ は量子系の力学的自由度と解釈される。

一般の量子論もしくは場の量子論の系においては、分配関数は $N =$ 無限の次元の空間上の積分によって与えられ、表式 (1) の $Z(\lambda)$ のような $N =$ 有限次元積分 $d\phi$ では済まない。[1] しかし、その結果として得られる分配関数 $Z(\lambda)$ は、その系の相互作用係数 λ の関数である。

前半での議論は、$Z(\lambda)$ のような量子系、場の量子論での物理量を求める際、まずは摂動級数 $Z[[\lambda]]$ を求め、そこから Borel sum $BZ(s)$ を求め、さらにもう一度変換して $\hat{Z}(\lambda) := \lambda^{-1}\int ds\, e^{-s/\lambda} BZ(s)$ を求めれば、だいたい $\hat{Z}(\lambda)$ は $Z(\lambda)$ みたいなものでは？　という主張をしている。

$\hat{Z}(\lambda)$ の定義に 1 次元積分 ds が含まれるが、もとの $Z(\lambda)$ のような経路積分の $N =$ 無限の次元の積分ではないから、随分マシになっているよね、というお話です。

前半まとめの解説２： 関数 $Bf(s)$ から $\hat{f}(\lambda)$ を与える式 (7) は、冒頭の λ^{-1} を除けば、s の関数からラプラス変換で λ^{-1} の関数を作っている操作である。だから、系 (理論) の相互作用定数である λ に対して、変数 s は「対応する」ものではあるけれど、λ と似たもの (規格化の変更とか) とは思わない方がよい。関数 $Bf(s)$ が定義される抽象的な変数の空間 $s \in \mathbb{C}$ を Borel plane とよぶ。

[1] 表式 (1) の $Z(\lambda)$ では、場の量子論ではなく有限自由度の量子力学系を扱い、しかも高温極限をとったことによって、積分すべき自由度が $N = 1$ 次元分 $d\phi$ にまで減っているのです。

後半： 前半で扱った表式 (1) の $Z(\lambda)$ の場合、Borel sum $BZ(s)$ が Borel plane $s \in \mathbb{C}$ 上、実軸正の方向に特異点がなく、解析接続が可能である (超幾何関数の性質を思い出しましょう)。ゆえに $\hat{Z}(\lambda)$ を Borel plane 実軸正の方向へのラプラス変換によって与えればよい。$\hat{Z}(\lambda) = \lambda^{-1} \int_0^{+\infty} ds\, e^{-s/\lambda} {}_2F_1(3/4, 1/4; 1; -4s)$。しかし、問題設定によっては、話がこれで終わらない場合がある。後半では、そのような場合を扱う。

表式 (1) の関数のかわりに、次の関数を考えよう:

$$Z(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\psi\, e^{-\frac{1}{2\lambda}\sin^2(\psi)} = \int_{-\pi/(2\sqrt{\lambda})}^{+\pi/(2\sqrt{\lambda})} d\phi\, e^{-\frac{1}{2\lambda}\sin^2(\sqrt{\lambda}\phi)}. \tag{9}$$

有限区間上の連続関数の積分であって、この $Z(\lambda)$ も λ の関数として well-defined である。この関数 $Z(\lambda)$ に対して、前半と似たようなプロセスで摂動級数 $Z_0[[\lambda]]$ を以下のように与える:

$$\begin{aligned}
Z(\lambda) &= \int_{-\pi/(2\sqrt{\lambda})}^{+\pi/(2\sqrt{\lambda})} d\phi\, e^{-\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{6}\phi^4 - \frac{\lambda^2}{45}\phi^6 + \cdots} \\
&= \int_{-\pi/(2\sqrt{\lambda})}^{+\pi/(2\sqrt{\lambda})} d\phi\, e^{-\frac{1}{2}\phi^2} \left(1 + \frac{\lambda}{6}\phi^4 + \lambda^2\left(\frac{\phi^8}{72} - \frac{\phi^6}{90}\right) + \cdots\right) &(10) \\
&\Rightarrow \int d\phi e^{-\frac{1}{2}\phi^2} + \frac{\lambda}{6}\int d\phi e^{-\frac{1}{2}\phi^2}\phi^4 + \frac{\lambda^2}{72}\int d\phi e^{-\frac{1}{2}\phi^2}\phi^8 - \frac{\lambda^2}{90}\int d\phi e^{-\frac{1}{2}\phi^2}\phi^6 + \cdots \\
&= \sqrt{2\pi}\left[1 + \frac{(2\lambda)}{4} + \frac{((1/2)_2)^2}{2}(2\lambda)^2 + \cdots\right] =: Z_0[[\lambda]]. &(11)
\end{aligned}$$

表式 (10) を表式 (11) で置き換える際、無限和と積分の順序を (正当化なしに) 入れ替え、積分範囲を $\mathbb{R}$ に取り換えて Gauss 分布の端っこをごまかした (小さい λ の場合、$e^{-1/\lambda}$ は λ のどんな正冪よりも小さい)。この級数、

$$Z_0[[\lambda]] = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1/2)_n)^2}{n!} (2\lambda)^n \tag{12}$$

であるそうな (少なくとも (10) と (12) は λ^2 の係数まで一致する)。以下は、この $Z_0[[\lambda]]$ の表式を信じて使おう。

(e) $BZ_0(s) = \sqrt{2\pi}{}_2F_1(1/2; 1/2; 1; 2s)$ であること、そして収束半径が $|2s| = 1$ であることを確認せよ。

(f) 超幾何関数 ${}_2F_1(a, b; c; z)$ を $z \simeq 0$ 周辺から $\mathrm{Re}(z) \gg 1$ の領域へと解析接続するためには、超幾何微分方程式の特異点 $z = 1$ を上半平面 $\mathrm{Im}(z) > 0$ もしくは下半平面 $\mathrm{Im}(z) < 0$ を経由して回り込めばよい。$z \simeq 0$ 近傍での超幾何微分方程式の解 ${}_2F_1(a, b; c; z)$ は、

$1-z \simeq 0$ 近傍での二つの独立な解の線形結合へと解析接続され、その公式は

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,b;c;z) &= \Gamma(a+b-c)(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z) \\ &\quad + \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}F(a,b;a+b-c+1;1-z) \end{aligned} \tag{13}$$

である。ただし、$a+b=c$ である場合には、

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}F(a,b;a+b;z) = -\ln(1-z)F(a,b;1;1-z) + (\text{non log})_{(1-z)} \tag{14}$$

となる; ただし第二項は、$\ln(1-z)$ を含まない $(1-z)$ の冪級数である。以上を用いて、小問 (e) の $BZ_0(s)$ を Borel plane $s \in \mathbb{C}$ 内 $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ の領域へと解析接続しよう。上半平面経由か下半平面経由かでによって、以下の違いが出ることを示せ:

$$\begin{aligned}\delta BZ_0(s) &:= 2^{-1}\lim_{\epsilon\to+0}[BZ_0(s+i\epsilon) - BZ_0(s-i\epsilon)] \qquad (s\in\mathbb{R}, \quad 1/2 < s) \\ &= +i\sqrt{2\pi}{}_2F_1(1/2,1/2;1;1-2s). \end{aligned} \tag{15}$$

摂動級数 $Z_0[[\lambda]]$ から Borel resummation によって well-defined な関数を作ろうとするなら、Borel plane 内の積分経路を取る際に $s=+1/2$ の特異点をどちらに避けるかによって結果が異なる。積分経路 $C_\pm := [0, +\infty \pm i\epsilon]$ に対し

$$\hat{Z}_{0\pm}(\lambda) := \lambda^{-1}\int_{C_\pm} ds\, e^{-s/\lambda} BZ_0(s). \tag{16}$$

目論見は $\hat{Z}_{0+}(\lambda)$ や $\hat{Z}_{0-}(\lambda)$ が $Z(\lambda)$ みたいなものだろうと主張することであるが、$\hat{Z}_{0\pm}(\lambda)$ のうち一方がもう片方よりよいと考える理由がなくて困る。一番安直なその場しのぎ案は、その二択を足して 2 で割ること:

$$\begin{aligned}\hat{Z}(\lambda) &:= \hat{Z}_{0+}(\lambda) - \lambda^{-1}\int_{+1/2}^{+\infty} ds\, e^{-s/\lambda}\delta BZ_0(s), \qquad (17) \\ &= \hat{Z}_{0-}(\lambda) + \lambda^{-1}\int_{+1/2}^{+\infty} ds\, e^{-s/\lambda}\delta BZ_0(s). \qquad (18)\end{aligned}$$

以下では、このその場しのぎがスジの良い解決であることを見よう。

(g) $\hat{Z}_{0\pm}(\lambda)$ に対する補正項 $(\hat{Z}(\lambda) = \hat{Z}_{0\pm}(\lambda) \pm \hat{Z}_{\mathrm{nP}}(\lambda))$

$$\hat{Z}_{\mathrm{nP}}(\lambda) := -i\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda}\int_{+1/2}^{+\infty} ds\, e^{-s/\lambda}\, F(1/2,1/2;1;1-2s) \tag{19}$$

において、積分変数を $s \to s' + 1/2$ で置き換え、あとは (2)⇒(3,4) や (10)⇒(11) でやったように超幾何級数を s' で冪展開し、級数和と積分の順序を (正当化なしに) 入れ替えた表式を書き下せ。このようにして得られる冪級数 $Z_{\mathrm{nP}}[[\lambda]]$ の初項は $-i\sqrt{2\pi}e^{-1/(2\lambda)}$ であることを確認せよ。(この形ゆえに、補正項を非摂動効果と呼ぶのは自然である)

この非摂動効果がもとの表式 (9) の中に実は含まれているのだということを、以下のようにして確認する。そのため、相互作用定数 λ を正の実数値から少しずらして正の虚部がある状況で関数 $Z(\lambda)$ の定義を考え直そう。なお、以下の議論は、$\mathrm{Im}(\lambda) < 0$ の場合ににもやり直すことができる。

(h) 関数 $Z(\lambda)$ を定義する積分も、被積分関数は (9) のままながら、積分経路は複素 ψ 面内に変形することを許そう。もとは実 $N = 1$ 次元の積分 $d\psi$ であったが、今後複素 $N = 1$ 次元空間内の実 $N = 1$ 次元部分多様体 Γ の上の積分 $d\psi$ となる。積分する実部分多様体 Γ の取り方を決めるため、被積分関数の振舞いを調べる。$e^{-(2\lambda)^{-1}\sin^2(\psi)}$ の絶対値が大きくなるのは $|\mathrm{Im}(\psi)| \gg 1$ かつ $\mathrm{Re}(\psi) \sim 0$ の領域であり、絶対値が小さくなるのは $|\mathrm{Im}(\psi)| \gg 1$ かつ $\mathrm{Re}(\psi) \sim \pm\pi/2$ の領域であることを示せ。

(i) この積分を鞍点法で評価するため、鞍点を調べ挙げよう。$\psi = 0$ は鞍点なのだが、これ以外に $\psi = \pm\pi/2$ も鞍点であることを示せ。　　個々の鞍点につき、その点からの最速降下方向は実 N 次元部分多様体をなすのだが、現在の問題では $N = 1$ なので実 1 次元分である。さて、引き続き問題。$\mathrm{Im}(\lambda) \sim +\epsilon > 0$ である場合、その実 $N = 1$ 次元の降下方向が $\psi = 0$ の鞍点では $(\psi - 0) \sim (1 + i\epsilon)\mathbb{R}$, $\psi = -\pi/2$ の鞍点では $(\psi + \pi/2) \sim (1 + i\epsilon)i\mathbb{R}$ であることを示せ。

鞍点 $\psi = 0$ を通る最速降下方向の部分多様体を Γ_+ とする (向き付けは実軸正の方向へ)。Γ_+ は $\psi \sim -\pi/2 - i\infty$ から $\psi \sim +\pi/2 + i\infty$ へと (鞍点 $\psi = 0$ を経由しつつ) 向かう。また、鞍点 $\psi = -\pi/2$ を通る最速降下方向の部分多様体を Γ_{nP} とする (向き付けは虚軸正の方向へ)。Γ_{nP} は $\psi \sim -\pi/2 - i\infty$ から $\psi \sim -\pi/2 + i\infty$ へと (鞍点 $\psi = -\pi/2$ を経由しつつ) 向かう。

(j) 相互作用定数 λ を $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $\mathrm{Im}(\lambda) = +\epsilon > 0$ に取る場合、分配関数 $Z(\lambda)$ を

$$Z(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\Gamma_+} d\psi\, e^{-\frac{1}{2\lambda}\sin^2(\psi)} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\Gamma_{\mathrm{nP}}} d\psi\, e^{-\frac{1}{2\lambda}\sin^2(\psi)} \tag{20}$$

とすれば、$\epsilon \to +0$ の極限で (9) に戻ることを確認せよ。

(k) 表式 (20) の第 2 項についても、鞍点まわりで (2)⇒(3,4) や (10)⇒(11) の手続きを適用して、λ の冪級数展開を与えることができる。それをしたとき、その初項が $Z_{\mathrm{nP}}[[\lambda]]$ の第 1 項 $-i\sqrt{2\pi}e^{-1/(2\lambda)}$ に一致することを確認せよ。

後半のまとめ解説３： 後半で扱った系の場合、相互作用定数が $\mathrm{Im}(\lambda) = +\epsilon$ の領域にあるなら、表式 (20) の第 1 項と第 2 項がそれぞれ表式 (17) 右辺の第 1 項と第 2 項に当たる。表式 (20) の各項を鞍点まわりで Gauss 分布 x 冪の積分の級数として (正当化せずに) 取り扱うと、摂動級数 $Z_0[[\lambda]]$ と非摂動級数 $Z_{\mathrm{nP}}[[\lambda]]$ となる。摂動級数 $Z_0[[\lambda]]$ は漸近展開になっていて意味をなさないが、Borel resummation $\hat{Z}_{0+}(\lambda)$ は well-defined である。$\mathrm{Im}(\lambda) = +\epsilon > 0$ 領域の場合に表式 (20) が (18) ではなく (17) と対応がつくのは、Borel plane 内の積分は C_+ に取った時に、$e^{-s/\lambda}$ が複素位相なしに純指数関数的に速く減っていくからと考えてよい。

後半のまとめ解説３'： 後半で扱った系だけでなく、量子論、場の量子論の系で一般に成り立っているだろうと想像されている仕組み (物語) は次のようなものである。

摂動級数 $Z_0[[\lambda]]$ は一般に漸近級数になってしまってぞれ自身では意味をなさないが、Borel resummation を用いることで well-defined な関数 $\hat{Z}_0(\lambda)$ に戻すことができる。一方で、真空以外の運動方程式の解 (鞍点) の周りの摂動展開の寄与も $Z(\lambda)$ に取り入れるべきである ($Z_{\mathrm{nP}}[[\lambda]]$)。この $Z_{\mathrm{nP}}[[\lambda]]$ も、やはり Borel resummation を用いて、well-defined な関数 $\hat{Z}_{\mathrm{nP}}(\lambda)$ となる。後者を非摂動効果と呼ぶ。

Borel plane 上に Borel transform $BZ_0(s)$ が特異点を持つ場合、Borel plane 内の積分経路 C の取り方によって $\hat{Z}_0(\lambda)$ には不定性が生じてしまうのだが、C の取り方は、相互作用定数 $\lambda \in \mathbb{C}$ の領域によって変えるのが妥当である。同時に、複素化された N 次元力学自由度空間内の実 N 次元部分空間 (Γ's) 上での経路積分も $\lambda \in \mathbb{C}$ の領域によって部分空間 (Γ's) がトポロジカルに変わり、非摂動効果の効き方も変わる。摂動効果 $\hat{Z}_0(\lambda)$ の (C-dependent な) 不定性が $\hat{Z}_{\mathrm{nP}}$ の効き方の不定性によって打ち消され $Z(\lambda)$ ($\hat{Z}(\lambda)$) は全体として不定性がなくなる、と。[2] ただし、この物語がきちっと示されているのは、この問題のような非常に単純化された特殊な系のみである。

後半のまとめ解説４： 相互作用定数 λ を実軸からずらして虚部を持たせれば、理論のラグランジアンやハミルトニアンがエルミートではなくなってしまう。物理系としてはあまり興味が持てない状況である。しかし、時にはそんな設定にも頭を巡らせてみると、理解が明快になる助けとなることもたまにはある。

後半まとめの解説５： 幸いにして $\hat{Z}_{0+}(\lambda)$ と $\hat{Z}_{\mathrm{nP}}(\lambda)$ それぞれが well-defined な λ の関数となり、さらに、$\hat{Z}_{\mathrm{nP}}(\lambda)$ の値は、$0 < \mathrm{Re}(\lambda) \ll 1$ ($\mathrm{Im}(\lambda) = +\epsilon$) ならばとても小さい。実験測定の精度は常に限りがあるので、定量的には $\hat{Z}_{\mathrm{nP}}(\lambda)$ は重要ではない。$Z_0[[\lambda]]$ の最初の数項だけを用いれば、$\hat{Z}_0(\lambda)$ のよい近似となる。それが摂動計算の意味です。

$\mathrm{Re}(\lambda) \sim \mathcal{O}(1)$ の領域では $Z_0[[\lambda]]$ の少数の項を計算しても役に立たない。大概の物理系では $Z_0[[\lambda]]$ や $Z_{\mathrm{nP}}[[\lambda]]$ を all order で求めて解析的な表式を得る望みはほとんどない。つまり、

[2] 小問 (i)–(k) では $\mathrm{Im}(\lambda) \sim +\epsilon > 0$ の場合にのみ話を限って作業量を半分にした。時間に余裕があるなら、$\mathrm{Im}(\lambda) \sim -\epsilon < 0$ の場合にやり直してみて、非摂動効果の効き方が逆符号に変わることまで確かめてみると楽しいことでしょう。

$Z_{\mathrm{nP}}[[\lambda]]$ の各項を頑張って解析的に計算して報われることは、実務上はめったにない。

この問題のもとネタは、Cherman, Dorigoni and Unsal の論文 https://arxiv.org/abs/1403.1277 の中の解説部分 section 2 です。この解説部分を学部４年生が読みこなしやすい形に書き直したのがこの問題です。