2012年度 物理数学 II テスト

(2013年1月24日 13:00 – 14:30)

問題: あなたは物理数学のテストの日になって目が覚めてみると空間が1次元増えて4次元になっていることを発見した！これでは三次元空間における球面調和関数だけでは物理を理解することはできない、四次元における球面調和関数を決定しないといけない。しかし物理数学 II の講義で習った内容は四次元の球面調和関数を決定するのに十分だ。そこで、以下の順序にしたがって、四次元の球面調和関数について考えよう。

1. まずは三次元の球面調和関数について思い出そう。極座標は

$$(X, Y, Z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) \tag{1}$$

ととると、ラプラシアンは

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\phi} \tag{2}$$

ただし

$$\Delta_{\theta,\phi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{3}$$

だった。そこで、

$$\Delta_{\theta,\phi}f(\theta,\phi) = -\lambda f(\theta,\phi) \tag{4}$$

がどのような λ のときに解をもつか知りたかった。$f(\theta,\phi) = f_m(\theta)e^{im\phi}$ と仮定する。すると、$f_m(\theta)$ が満たす方程式は

$$(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{m^2}{\sin^2\theta})f_m(\theta) = -\lambda f_m(\theta) \tag{5}$$

となる。

(a) ここで、$z = \cos\theta$ と変数変換して $F_m(z) = f_m(\theta)$ とすると微分方程式は

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - 2z\frac{d}{dz} - \frac{m^2}{1-z^2} + \lambda\right]F_m(z) = 0 \tag{6}$$

となることを示せ。

(b) $m = 0$ のとき、$F_0(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$ として、a_n と a_{n+2} の関係をもとめよ。

(c) $F_0(z)$ が有限項の多項式になるには、非負整数 ℓ があって $\lambda = \ell(\ell+1)$ となることを説明せよ。

(d) $m \neq 0$ の場合は、$\lambda = \ell(\ell+1)$ かつ $\ell \geq |m|$ の場合のみ微分方程式 (6) はまっとうな解 $F_m(z)$ があることが知られている。これを $P_\ell^{(m)}(z)$ と書こう。それを用いると球面調和関数は $Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = P_\ell^{(m)}(\cos\theta)e^{im\phi}$ と書ける。すると

$$\Delta_{\theta,\phi}Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = -\ell(\ell+1)Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \tag{7}$$

である。 さて、固有値 $\ell(\ell+1)$ を固定した際、いろいろな m を選ぶことができるが、何通り選べるか。ℓ であらわせ。

問題は次ページにつづく。

2. 次に四次元の球面調和関数について考える。極座標は

$$(W, X, Y, Z) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha\sin\theta\cos\phi, r\sin\alpha\sin\theta\sin\phi, r\sin\alpha\cos\theta) \tag{8}$$

ととる。ラプラシアンは

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial W^2} + \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\alpha,\theta,\phi} \tag{9}$$

ただし

$$\Delta_{\alpha,\theta,\phi} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sin^2\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\Delta_{\theta,\phi} \tag{10}$$

となる。そこで、

$$\Delta_{\alpha,\theta,\phi}g(\alpha,\theta,\phi) = -\lambda g(\alpha,\theta,\phi) \tag{11}$$

がどのような λ のときに解をもつか知りたい。

(a) $g(\alpha,\theta,\phi) = g_\ell(\alpha)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ と仮定する。すると、$g_\ell(\alpha) \equiv g(\alpha,\theta,\phi)$ が満たす方程式は

$$(\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sin^2\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2\alpha})g_\ell(\alpha) = -\lambda g_\ell(\alpha) \tag{12}$$

となる。ここで、$w = \cos\alpha$ と変数変換して $G_\ell(w) = g_\ell(\alpha)$ とすると微分方程式は

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - 3z\frac{d}{dz} - \frac{\ell(\ell+1)}{1-z^2} + \lambda\right]G_\ell(z) = 0 \tag{13}$$

となることを示せ。

(b) $\ell = 0$ のばあい、$G_0(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots + a_n w^n + \cdots$ としたとき、a_n と a_{n+2} の関係をもとめよ。

(c) $G_0(w)$ が有限項の多項式になるには、非負整数 k があって $\lambda = k(k+2)$ となることを説明せよ。

(d) $\ell \neq 0$ のばあい、同様に $\lambda = k(k+2)$ ただし $k \geq \ell$ のときのみ微分方程式 (13) はまっとうな解 $G_\ell(w)$ があることが知られている。それを $C_k^{(\ell)}(w)$ と書こう。すると、四次元の球面調和関数は $\Upsilon_{k,\ell,m}(\alpha,\theta,\phi) = C_k^{(\ell)}(\cos\alpha)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ と書け、

$$\Delta_{\alpha,\theta,\phi}\Upsilon_{k,\ell,m}(\alpha,\theta,\phi) = -k(k+2)\Upsilon_{k,\ell,m}(\alpha,\theta,\phi). \tag{14}$$

を満たす。さて、固有値 $k(k+2)$ を固定した際、いろいろな ℓ と m を選ぶことができるが、何通り選べるか。k であらわせ。

問題は以上です。